Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 7

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte)

Eine alternative Definition des Raumes $BV(\Omega)$ ist im eindimensionalen Fall für $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$ gegeben durch

$$BV(\Omega) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{BV} := |f(a)| + \mathrm{var}(f,\Omega) < \infty\},$$

wobei die *Variation* von f auf $[a,b]$ definiert ist durch

$$\mathrm{var}(f,[a,b]) := \sup\{\sum_{i=1}^{m} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \mid m \in \mathbb{N},\, a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b\}.$$

Zeigen Sie

(a) Für $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ ist

$$\mathrm{var}(f,[x_1,x_3]) = \mathrm{var}(f,[x_1,x_2]) + \mathrm{var}(f,[x_2,x_3]).$$

(b) Es existieren

$$f(x^+) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+\varepsilon) \quad \text{und} \quad f(x^-) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x-\varepsilon)$$

für $a \leq x < b$ bzw. $a < x \leq b$.

(c) f hat höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen.

Aufgabe 2 (*)

Beweisen Sie die *schwache* Version des Gaußschen Divergenzssatzes: Für eine Funktion $F \in W^{1,1}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ auf einem Gauß-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \mathcal{N} d\mathcal{H}^{n-1}$$

wobei $\mathcal{N}$ die äußere Einheitsnormale an den Rand $\partial\Omega$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \left\{ \int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^p dx \right\},$$

die für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $1 \leq p < \infty$ gilt ($C > 0$ ist eine Konstante, die von p und Ω abhängt).

Aufgabe 3 (*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|f'| \leq M$ in $\mathbb{R}$. Dann ist für jede Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, auch $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$. (*Kettenregel in* $W^{1,p}(\Omega)$)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 < p \leq \infty$, q der zu p konjugierte Exponent und $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

$$u \in W^{k,p}(\Omega) \iff u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ und } |T_\gamma \eta| \leq c\|\eta\|_q \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega) \text{ und alle } \gamma \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\gamma| \leq k,$$

wobei $T_\gamma \eta := \int_\Omega u \partial^\gamma \eta dx$ und c eine positive Konstante ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 vom 2. Übungsblatt zum Beweis von "$\Leftarrow$".

Abgabe: Am Montag, den 22. Juni vor der Vorlesung.