Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Variationsrechnung (SS 2015)
Blatt 9

Bitte beachten Sie, dass die durch (*) gekennzeichneten Aufgaben nicht bewertet und korrigiert werden. Sie werden im Tutorium gemeinsam bearbeitet.

Aufgabe 1 (2+2+1 Punkte)

(a) Beweisen Sie das *Lemma von Ehrling*:
Seien X, Y und Z Banachräume. Wenn X kompakt in Y eingebettet ist und Y stetig in Z eingebettet ist, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c(\varepsilon)$ sodass

$$\|x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + c(\varepsilon)\|x\|_Z$$

für alle $x \in X$. (*Hinweis*: Beweisen Sie die Aussage indirekt!)

(b) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet und $1 \leq p < n$. Zeigen Sie dass durch

$$\|u\|'_{k,p} := \|\nabla^k u\|_p + \|u\|_p$$

eine Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ gegeben ist, die zur Standardnorm äquivalent ist. Wo verwendet man hierbei, dass Ω ein Lipschitzgebiet ist?
(*Hinweis*: Verwenden Sie (a) mit $X = W^{k,p}(\Omega)$, $Y = W^{k-1,p}(\Omega)$ und $Z = L^p(\Omega)$)

(c) Verwenden Sie Aufgabe 2 um zu zeigen, dass für Lipschitzgebiete $L^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$ gilt.

Aufgabe 2 (*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Wir definieren den Raum $L^{k,p}(\Omega)$ als die Menge aller Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, deren k-te partielle Distributionsableitungen p-integrierbar sind (d.h. die k-ten partiellen Ableitungen existieren im Sinne des Sobolevraumes $W^{k,p}(\Omega)$), versehen mit der Norm $\|.\|'_{k,p}$ aus Aufgabe 1 (b). Zeigen Sie, dass $C^\infty(\Omega)$ dicht in $L^{k,p}(\Omega)$ liegt.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)

Beweisen Sie die Sobolev-Poincaré-Ungleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $1 \leq p < n$.

(a) Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ist

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^s(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dabei ist $s = np/(n-p)$ und $(u)_\Omega := \fint_\Omega u dy$.

(b) Für $u \in W^{1,p}(B_r(x_0))$ ist

$$\|u - (u)_{B_r(x_0)}\|_{L^s(B_r(x_0))} \leq cr^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x_0))}$$

mit $\alpha := n(1/s - 1/p) + 1$.

Hinweis: Gehen Sie bei (a) indirekt vor und benutzen Sie bei (b) $v : B_1(0) \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto u(x_0 + rx)$.

Aufgabe 4 (*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie: Zu jedem linearen Funktional $\phi : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gibt es $v_\alpha \in L^q(\Omega)$, $q = p/(p-1)$, sodass

$$\phi(v) = \sum_{|\alpha|<k} \int_\Omega \partial^\alpha u \, v_\alpha dx$$

für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gilt.

Abgabe: Am Montag, den 6. Juli vor der Vorlesung.