Verschwindungssätze für Hermitesche Modulformen sowie Siegelsche Modulformen zu den Kongruenzuntergruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$ und $\Gamma^{(n)}(N)$

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes
von

Markus Klein

Saarbrücken
2004

Tag des Kolloquiums :	22.12.2004
Dekan:	Herr Professor Dr. J. Eschmeier
Berichterstatter:	Herr Professor Dr. R. Schulze-Pillot Herr Professor Dr. E. U. Gekeler

Meinen Eltern

Vorbemerkungen

Im Jahre 1939 begründete C. F. Siegel in seiner Arbeit 'Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades' (siehe [62]) die Theorie der Modulfunktionen und Modulformen zur symplektischen Gruppe

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \quad = \quad \left\{ M \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R}) \,\middle|\, M^t \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Theorie ist eine Verallgemeinerung der im 19-ten Jahrhundert entstandenen Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Formen, die aus den Untersuchungen von elliptischen Funktionen entstand. Die Modulformen n-ten Grades werden heute als Siegelsche Modulformen bezeichnet. Es sind holomorphe Funktionen auf dem Siegelschen Halbraum

$$\mathbb{H}_n \quad = \quad \{ Z = X + \mathfrak{i}Y \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{C}) \mid Y \text{ ist positiv definit} \},$$

einer Verallgemeinerung der oberen Halbebene $\mathbb{H}_1 = \{c \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Im}(c) > 0\}$, die bis auf den Fall der elliptischen Modulformen (n=1) bereits vollständig durch ein gewisses Transformationsverhalten beschrieben werden. Den Siegelsche Halbraum $\mathbb{H}_n$ fassen wir hierbei als Teilmenge eines $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimensionalen komplexen Raumes auf, indem wir die Variablen z_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq n$ irgendwie anordnen. Ist

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}),$$

dann operiert $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$ vermöge

$$Z \quad \mapsto \quad M\langle Z \rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

Das Transformationsverhalten einer Modulform f lässt sich durch

$$(f|_k M)(Z) \quad = \quad f(Z), \quad \forall\, M \in \Gamma \subset \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$$

mit

$$(f|_k M)(Z) \quad = \quad \chi(M)\det(CZ+D)^{-k} f(M\langle Z \rangle)$$

angeben. Hierbei ist $k \in \mathbb{Z}$ eine (halb)ganze Zahl, die als das Gewicht von f bezeichnet wird, $\chi(M) : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ ein Charakter und Γ eine gewisse arithmetisch definierte Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$. Zu einer systematischen Untersuchung dieser Modulformen wurde C. F. Siegel durch seinen Hauptsatz motiviert, in dem er Darstellungen

$$M^t S M \quad = \quad T, \qquad M \in \mathrm{MAT}(m,n,\mathbb{Z})$$

einer quadratischen Form mit Gram-Matrix T durch eine positiv definite quadratische Form mit Gram-Matrix S untersucht. Begründet wird dieses Interesse unter anderem dadurch, dass die Thetareihe zu einer geraden, unimodularen, positiv definiten quadratischen Form mit Gram-Matrix S,

$$\theta_S^n(Z) \quad = \sum_{M \in \mathrm{MAT}(2m,n,\mathbb{Z})} e^{\pi i \mathrm{tr}(M^t S M Z)}, \quad Z \in \mathbb{H}_n, \tag{1}$$

eine Siegelsche Modulform vom Gewicht m zur Modulgruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ ist. Ist S eine Gram-Matrix einer geraden, positiv definiten quadratischen Form und N die kleinste, ganze, positive Zahl, so dass NS^{-1} wieder gerade ist, dann ist die in 1 definierte Thetareihe $\theta_S^n(Z)$ eine Siegelsche Modulform zur Untergruppe

$$\Gamma_0^{(n)}(N) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \middle| C \equiv 0_n (\mathrm{mod}\, N) \right\}$$

mit Charakter. In [62] zeigt C. F. Siegel, dass es für die volle Modulgruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ keine nichttriviale Siegelsche Modulform vom Gewicht $k < 0$ gibt, und dass der Raum $M_n^k(\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}))$, den die Mengen der Siegelschen Modulformen zur vollen Modulgruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ von vorgegebenem Gewicht k bilden, endlichdimensional ist. Er zeigt auch, dass jeweils

$$\frac{n(n+1)}{2} + 2$$

Siegelsche Modulformen einer algebraischen Gleichung genügen. Die entsprechenden Endlichkeitsaussagen für die Räume $M_n^k(\Gamma)$ der Siegelschen Modulformen vom Gewicht k für Untergruppen $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ von endlichem Index lassen sich leicht auf die Aussage für $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ zurückführen. Die Räume $M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ werden, wie E. Freitag in [23] gezeigt hat, von Thetareihen aufgespannt, falls man Räume von Gewicht k betrachtet, die kleiner als $\frac{1}{2}n$ sind. S. Böcherer zeigt dies in [4] für den Fall: $k > 2n$, mit $4|k$. Der Fall $2k = n$ wurde von A. N. Andrianov [1] bearbeitet und S. Böcherer und R. Schulze-Pillot haben gezeigt, dass auch die Räume $M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ für $k \leq n \leq 2k$ unter einigen Zusatzbedingungen durch Thetareihen aufgespannt werden (siehe [6]).

Eine andere Art den Begriff der elliptischen Modulform zu verallgemeinern wurde von H. Braun in den Arbeiten [8], [9], [10] vorgestellt. Ist K ein imaginärquadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathfrak{O}_K$, so operiert die unitäre Gruppe

$$\mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \quad = \quad \left\{ M \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}) \middle| \overline{M}^t \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

auf dem Hermiteschen Halbraum

$$\mathbb{H}_n(\mathbb{C}) \quad = \quad \left\{ Z \in \mathrm{MAT}(n,\mathbb{C}) \middle| \frac{1}{2i}\left(Z - \overline{Z}^t\right) \text{ ist positiv definit } \right\}$$

vermöge

$$Z \mapsto M \cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \text{ für } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C}).$$

Hermitesche Modulformen sind nun holomorphe Funktionen auf $\mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ für die

$$(f|_k M)(Z) = \det(CZ+D)^{-k} f(M\cdot Z), \qquad \forall M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$$

gilt. Hierbei ist $k \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, die wir das Gewicht der Hermiteschen Modulform f nennen. Die Menge aller Hermiteschen Modulformen mit fest vorgegebenem Gewicht k bildet wieder einen endlichdimensionalen Vektorraum.

Aufgrund des Transformationsverhaltens einer Siegelschen Modulform gilt für alle ganzen (halbganz mit ganzer Diagonale) Matrizen T die Beziehung

$$f(Z+T) = f(Z).$$

Somit läßt sich $f(Z)$ in eine Fourierreihe

$$f(Z) = \sum_{T \text{ ganz}} a_T e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$$

nicht. entwickeln, und es gilt

$$a_{U^tTU} = \det(U)^k a_T \quad \forall U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}).$$

M. Koecher hat in [41] gezeigt, dass es aufgrund des nach ihm benannten Koecherprinzips genügt in der Fourierentwicklung einer Siegelschen Modulform über Klassen ganzer positiv semidefiniter Matrizen zu summieren. Man interessiert sich im Besonderen für Siegelsche Spitzenformen. Dies sind im Fall der vollen Modulgruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ Siegelsche Modulformen, deren Träger nur positiv definite Matrizen enthält. Der Träger $\mathrm{Supp}(f)$ einer Siegelschen Modulforme f ist hierbei die Menge aller semipositiv definiten Matrizen T aus $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Z})$, für die der Koeffizient a_T in der Fourierentwicklung von f ungleich null ist. Für eine Spitzenform f wollen wir das Symbol $\mathrm{Supp}(f)$ auch für die Teilmenge aller symmetrischen rationalen Matrizen T benutzen, von denen wir a priori nicht wissen, ob der Fourierkoeffizient a_T von f gleich null ist oder nicht. Eine Siegelsche Spitzenform zu einer Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ ist eine Siegelsche Modulform f zur Untergruppe Γ, für die die Träger aller Fourierentwicklungen von $(f|_k M)(Z)$, $M \in \Gamma\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ nur positiv definite Matrizen enthalten. Für ein vorgegebenes Gewicht k bilden die Siegelschen Spitzenformen einen Unterraum $S_n^k(\Gamma)$ von $M_n^k(\Gamma)$.

Auch eine Hermitesche Modulform kann in eine Fourierreihe entwickelt werden. Sätze, die die Aussagen von M. Koecher verallgemeinern wurden in [10], Satz 1 und Satz 2 von H. Braun bewiesen.

Um die Räume $S_n^k(\Gamma)$ explizit zu konstruieren, braucht man ein Kriterium, um zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Spitzenformen f und g gleich sind, beziehungsweise ob $f - g$ identisch null ist. Die vorgelegte Arbeit beschäftigt sich damit, möglichst effiziente Kriterien hierfür anzugeben, um eine algorithmische Berechnung dieser Räume zu erleichtern beziehungsweise erst zu ermöglichen. Eine Möglichkeit zur Konstruktion von Spitzenformen wird durch die Berechnung von Thetareihen gegeben, so dass wir besonderen Wert auf die Untergruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$ legen.

Als Verschwindungssätze wollen wir im Folgenden Sätze bezeichnen, die Teilmengen X des Trägers einer Fourierentwicklung einer Spitzenform beschreiben, für die aus der Forderung

$$a_T = 0 \text{ für alle Elemente } T \in X$$

folgt, dass f identisch Null ist. C. F. Siegel hat bereits in [62] einen Verschwindungssatz angegeben. In Abhängigkeit vom Grad und Gewicht einer Spitzenform f gibt er dort eine Schranke für den größten gemeinsamen Teiler aller r-dimensionalen Unterdeterminanten von Klassen von Matrizen T an (r bezeichne hierbei den Rang von T), für die nachzuweisen ist, dass die Fourierkoeffizienten a_T gleich Null sind (siehe [62], (63)). Von besonderem Interesse sind Verschwindungssätze, die für eine Fourierentwicklung einer Spitzenform f und für eine bestimmte diskrete Funktion

$$\lambda : \mathrm{Supp}(f) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

eine Schranke c liefern, so dass das Verschwinden von f äquivalent mit dem Verschwinden aller Fourierkoeffizienten a_T, $T \in \mathrm{Supp}(f)$ ist, für die $\lambda(T) < c$ gilt. Ein Satz, der eine solche Aussage für die Spur von Klassen von positiv definiten Matrizen macht und ebenfalls von C. F. Siegel stammt, wurde 1951 mit dem Einverständnis von C. F. Siegel in einer Arbeit von H. Maaß veröffentlicht (Siehe [43], Satz 7). Dieser Satz erlaubt es zu entscheiden, ob eine Spitzenform identisch Null ist, indem man nur endlich viele Fourierkoeffizienten berechnet. M. Eichler nutzte 1975 in [21], [22] die Hermitefunktion

$$m(T) \quad = \quad \min_{x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}} x^t T x,$$

um hierfür einen Verschwindungssatz anzugeben. Die n-te Wurzel der Determinante einer positiv definiten quadratischen Form ist eine andere Funktion, die auch zur Angabe eines Verschwindungssatzes dient, bei dessen Anwendung es ebenfalls genügt nur endlich viele Fourierkoeffizienten einer Spitzenform zu berechnen, um zu entscheiden, ob diese identisch Null ist oder nicht. Da ganze, positiv definite quadratische Formen meist nach der Größe der Determinante aufgelistet werden, ist diese Funktion für explizite Rechnungen einfach zu nutzen. Jedoch sind die Schranken, die man für diesen Verschwindungssatz kennt, groß, so dass sehr viele Fourierkoeffizienten einer Spitzenform f berechnet werden müssen, um das Verschwinden von f nachzuweisen. Nutzt man die Hermitefunktion, so erhält man im entsprechenden Verschwindungssatz zwar eine endliche Schranke, muss aber unter Umständen unendlich viele Fourierkoeffizienten berechnen, um zu zeigen, dass eine vorgelegte Spitzenform identisch Null ist. Dies liegt daran, dass es zu einer genügend großen Schranke const unendlich viele ganze, positiv definite quadratischen Formen gibt, deren Minimum kleiner als const ist. Da die Spur keine $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-Klassenfunktion ist, also der Wert der Spur nicht nur an der $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-Klasse ($\{UTU^t \mid U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})\}$ ist die $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-Klasse von T) ihres Argumentes hängt, das Verschwinden eines Fourierkoeffizienten aber nur von der $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-Klasse von T abhängt, müssen beim Siegelschen Verschwindungssatz auch unnötig viele Fourierkoeffizienten berechnet werden. C. Poor und D. S. Yuen haben im Jahr 2000 einen neuen Verschwindungssatz veröffentlicht, der auf dem Begriff der dyadischen Spur beruht. Die dyadische Spur ist eine $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-Klassenfunktion. Sie liefert für explizite Rechnungen einen Verschwindungssatz, bei dem im Vergleich zu den oben beschriebenen Verschwindungssätzen am wenigsten Fourierkoeffizienten berechnet werden müssen. Der Verschwindungssatz von C. Poor und D. S. Yuen soll in der vorliegenden Arbeit verallgemeinert werden. Kapitel 2 und 3 beschäftigen sich dabei mit Verallgemeinerungen auf Spitzenformen zu den Untergruppen $\Gamma^{(n)}(N)$ und $\Gamma_0^{(n)}(N)$ von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$. Im abschließenden Kapitel 4 wird ein Verschwindungssatz für Hermitesche Modulformen bewiesen, der auf einer Verallgemeinerung des Begriffs der dyadischen Spur auf imaginärquadratische Zahlkörper basiert. Verschwindungssätze, die mit der Spur arbeiten, wurden von H. Braun bereits in [10], Satz 4 und Satz 5 angegeben.

Im ersten Kapitel werden allgemeine Tatsachen über Hermitesche und Siegelsche Modulformen zusammengetragen, insofern sie für die folgenden Kapitel von Relevanz sind. Darüber hinaus werden hier im Abschnitt 1 wesentliche Eigenschaften der dyadischen Spur angesprochen. Im Abschnitt 4 wird auf die Fricke-involution und die sich daraus ergebenden Folgerungen für Fourierentwicklungen von Modulformen zu $\Gamma_0^{(n)}(N)$ eingegangen. Insbesondere wird hierbei besonderer Wert auf eine explizite Darstellung der Träger dieser Fourierentwicklungen und explizite Zusammenhänge von Fourierkoeffizienten in einigen speziellen Spitzen gelegt. Die Darstellung der Ergebnisse ist hier so gewählt, wie sie in einem späteren Abschnitt zur Verbesserung von Schranken für diese Spitzen benötigt wird.

In Kapitel 2 wird ein Verschwindungssatz für die Kongruenzuntergruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$, $4 \nmid N$ vorgestellt. Um den Satz herzuleiten muss zunächst die Struktur von $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ und $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$ untersucht werden. Hierbei bezeichnet $\Delta(n,\mathbb{Z})$ den Durchschnitt der Siegelschen maximalen parabolischen Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Q})$ mit $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$, also die Menge der Matrizen aus $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$, deren Einträge im unteren linken $n \times n$–Block alle gleich Null und sonst

beliebige Elemente aus $\mathbb{Z}$ sind. Da für eine Kongruenzuntergruppe Γ die Doppelnebenklassen aus $\Gamma\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$ eine wesentliche Rolle für das Behandeln von Verschwindungssätzen für Spitzenformen zu Γ spielen und da diese Doppelnebenklassen in Bijektion zu den nicht äquivalenten 0–dimensionalen Spitzen von Γ stehen, bezeichnen wir sie als Spitzenklassen von Γ. Für den Begriff der Spitze sei der Leser noch auf die 1956 erschienene Arbeit 'On the Compactification of the Siegel space' ([55]) verwiesen, in der I. Satake den Quotientenraum $\Gamma\backslash\mathbb{H}_n$ so kompaktifiziert, dass ein Hausdorffraum entsteht. Wir werden vollständige Repräsentanten der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ angeben und erhalten somit an dieser Stelle auch explizite Formeln für die Anzahl der 0–dimensionalen Spitzen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$.
Ist $\mathfrak{O}_K$ der Ganzheitsring eines Zahlkörpers K und $\mathfrak{N}$ ein Ideal in $\mathfrak{O}_k$, dann lässt sich durch die hier vorgestellten Mittel auch die Struktur von $\Gamma_0^{(n)}(\mathfrak{N})\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathfrak{O}_k)$ aufklären. Im rationalen Fall werden für die Untersuchung der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ die Klassifikation von quadratischen Formen über dem Körper der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$ unter $\mathbb{Z}_p$-äquivalenz, also Äquivalenz bezüglich p-adischen ganzen Zahlen, sowie der Elementarteilersatz benötigt. Man kann also für eine Untersuchung von $\Gamma_0^{(n)}(\mathfrak{N})\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathfrak{O}_k)/\Delta(n,\mathfrak{O}_K)$ mit den in dieser Arbeit formulierten Beweisen nur ein Ergebnis für Zahlkörper mit Klassenzahl 1 erhoffen. Ob eine Verallgemeinerung auf Zahlkörper mit Klassenzahl ≥ 1 möglich ist, ist hierbei noch offen. Die notwendigen Modifikationen durchzuführen wird aber mühsam sein.
In Abschnitt 3 des Kapitels wird dann ein Verschwindungssatz für Spitzenformen zu den Kongruenzgruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$ formuliert. Die hier angegebenen Schranken hängen von den Weiten der Spitzen ab, in denen man eine Fourierentwicklung betrachtet. Für explizite Rechnungen ergeben sich hierdurch erhebliche Unterschiede für die Anzahl der benötigten Fourierkoeffizienten, um das Verschwinden einer Spitzenform nachzuweisen. Im Abschnitt 5 des Kapitels wird dieses Problem aufgegriffen, und mit Hilfe der Frickeinvolution gelingt es für einige spezielle Spitzen verbesserte Schranken herzuleiten. Hierbei wird die in Abschnitt 1.4 dargestellte Theorie benutzt.
Schließlich wird noch auf die Dimensionen von Räumen von Spitzenformen eingegangen, wobei wir besonderen Wert auf kleine Gewichte legen. Zunächst stellen wir hierbei für Formen vom Gewicht 2 und Grad 2 untere Abschätzungen vor, wie sie 1991 von S. Böcherer und R. Schulze-Pillot in [6] angegeben wurden.

In Kapitel 3 wird ein Verschwindungssatz zu den Kongruenzuntergruppen $\Gamma^{(n)}(N)$, den Kernen der natürlichen Homomorphismen

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \quad\rightarrow\quad \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \qquad N \in \mathbb{N}$$

vorgestellt. Dieser Fall ist im Vergleich zum Fall der Spitzenformen zur $\Gamma_0^{(n)}(N)$ viel leichter zu handhaben. Dies beruht ursächlich darauf, dass $\Gamma^{(n)}(N)$ eine normale Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ ist, $\Gamma_0^{(n)}(N)$ aber nicht. Die erhaltenen Schranken im Fall $\Gamma^{(n)}(N)$ sind unabhängig von der Spitze, in der eine vorgegebene Spitzenform entwickelt wird. Zum Abschluss werden einige Beispiele dieser Schranken aufgelistet und daraus obere Abschätzungen von Dimensionen für Räume von Spitzenformen mit kleinem Gewicht angegeben. Für einige kleine Stufen kann damit nachgewiesen werden, dass es für kleines Gewicht keine Spitzenformen gibt.

Im letzten Kapitel wird ein Verschwindungssatz für Hermitesche Formen hergeleitet. In den ersten beiden Abschnitten werden dazu zunächst einige Tatsachen aus der Reduktionstheorie für Hermitesche Formen und Grundlegendes zur Hermite-Humbert Konstante zusammengestellt. Diese werden benötigt, um den Begriff der dyadischen Spur auch für Hermitesche Formen zu definieren und wesentliche Eigenschaften dieser herzuleiten. Nachdem dies im dritten Abschnitt des Kapitels durchgeführt ist, werden anschliessend die zum Formulieren des Verschwindungssatzes notwendigen Ergebnisse für den Hermiteschen Fall bewiesen. Der Verschwindungssatz wird im letzten Abschnitt vorgestellt. Da eine explizite Abschätzung für die Hermite-Humbert Konstante für imaginärquadratische Zahlkörper nicht bekannt ist, wird die Spur durch die Determinante abgeschätzt und abschließend wird in einem Beispiel die Schranke des Verschwindungssatzes explizit ausgerechnet. Diese Abschätzung führt jedoch zu einer Schranke, die bei expliziten Rechnungen für den Nachweis des Verschwindens von Spitzenformen bereits zu groß ist.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. R. Schulze-Pillot danken, der mich zur Beschäftigung mit diesem Thema angeregt hat, und das Entstehen dieser Arbeit stets mit fachlichem Rat und vielen hilfreiche Kommentaren unterstützt hat.

Mein Dank gilt auch den Herren Prof. Dr. C. Poor und Prof. Dr. D. S. Yuen für das Versorgen mit Preprints und Hinweisen, insbesondere für die Konstante $\pi/6$ aus (2.54) beziehungsweise Proposition 2.61.

Herrn Prof. Dr. R. Schmidt danke ich für wertvolle Diskussionen und viele Verbesserungs- und Korrekturvorschläge.

Desweiteren möchte ich all denen meinen Dank aussprechen, die direkt oder indirekt an der Fertigstellung der Arbeit beteiligt waren. Insbesondere auch all denen, die das Entstehen dieser Arbeit durch die Vergabe eines Stipendiums nach dem Landesgraduiertenförderungsgesetz unterstützt haben.

Allgemeine Notationen

Nun wollen wir noch einige Notationen bereitstellen. Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, und $\mathbb{C}$ seien die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen, beziehungsweise komplexen Zahlen bezeichnet. Für die Menge der positiven reellen Zahlen benutzen wir das Zeichen $\mathbb{R}_{>0}$, sowie das Zeichen $\mathbb{R}_{\geq 0}$ für $\mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}$. Das Vorzeichen einer reellen Zahl r wird durch $\operatorname{sgn}(r)$ symbolisiert. Die komplexe Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{i}$. Mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kürzen wir den Restklassenring von $\mathbb{Z}$ modulo $n\mathbb{Z}$ und mit $\mathbb{Z}_{[n]}$ die Teilmenge $\{0, \ldots, n-1\}$ von $\mathbb{Z}$ ab. Für einen Ring R sei R^* die Menge der Einheiten von R. Im Allgemeinen bezeichnen wir Matrizenringe oder Teilmengen solcher mit Großbuchstaben. Eine Ausnahme hiervon bildet

- $\mathrm{Sp}(n, R)$ die Gruppe der symplektischen Matrizen über R.

Für einen Ring R sind somit zum Beispiel:

- $\mathrm{MAT}(m, n, R)$ die Menge der $m \times n$ Matrizen,
- $\mathrm{MAT}(n, R)$ die Menge der $n \times n$ Matrizen über R,
- $\mathrm{GL}(n, R)$ die Menge der über R invertierbaren Matrizen aus $\mathrm{MAT}(n, R)$,
- $\mathrm{SL}(n, R)$ die Menge der Matrizen aus $\mathrm{GL}(n, R)$, deren Determinante Eins ist,
- $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, R)$ die Menge der symmetrischen Matrizen,
- $\mathrm{MAT}^{\triangle}(n, R)$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen,
- $\mathrm{MAT}_{\triangle}(n, R)$ die Menge der unteren Dreiecksmatrizen,
- $\Delta(n, R)$ die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, R) \;\middle|\; C = 0_n \right\}$, die Siegel maximal parabolische Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n, R)$,
- $\mathrm{HER}(n, R)$ die Menge der Hermiteschen Matrizen über R.

Ist S eine Teilmenge von R, so bezeichnet $\mathrm{MENGE}(n, S)$ die Menge von Matrizen $\mathrm{MENGE}(n, R) \cap \mathrm{MAT}(n, S)$, wobei $\mathrm{MAT}(n, S)$ die Menge von Matrizen mit Einträgen aus S ist. Hierbei betrachten wir 'MENGE' lediglich als Platzhalter für eine der oben aufgelisteten Matrixgruppen. Wir benutzen die Symbole E_n beziehungsweise E für die $n \times n$–Einheitsmatrix sowie 0_n beziehungsweise 0 für die $n \times n$ Matrix deren Einträge alle Null sind. Des weiteren wird für $M_i \in \mathrm{MAT}(n_i, R)$ mit $\mathrm{Diag}(M_1, \ldots, M_j)$ eine verallgemeinerte Diagonalmatrix beschrieben, deren Diagonalelemente aus den Matrizen M_i bestehen. Für eine Matrix $A \in \mathrm{MAT}(n, R)$ bezeichne a_{ij} den ij-ten Eintrag von A. Einträge einer Matrix, die im Kontext in dem sie benutzt werden unwichtig sind, werden wir gelegentlich mit $\star$ bezeichnen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden Matrixeinträge, die aus Nullen bestehen, häufig einfach weggelassen. Weiterhin sei A^t die Transponierte und A^{-1} die Inverse von A. Falls $R \subset \mathbb{C}$ und $\bar{\cdot}$ die komplexe Konjugation bezeichnet, so bezeichne $\overline{A}$ die komplex-konjugierte von A, also die Matrix $(\overline{a_{ij}})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$. Das Zeichen $\square$ wird unter anderem dazu benutzt, das Ende von Sätzen, Propositionen, Lemmata und Korollaren, seien sie mit oder ohne Beweise aufgeführt, anzuzeigen. Das Zeichen wir aber auch verwendet, um das Ende von Beispielen und Bemerkungen zu kennzeichnen.

Weitere Notationen sind im Text erklärt. Im Symbolverzeichnis auf Seite xiii, *ff.* finden sich für die wichtigsten Symbole Hinweise auf die entsprechenden Textstellen.

Symbolverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Allgemeine Tatsachen

Zerlegen wir eine komplexwertige Matrix $Z \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{C})$ in ihren Real- und Imaginärteil X und Y, also $Z = X + \mathfrak{i}Y$ mit $X, Y \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{R})$, so lässt sich in $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{C})$ der Siegelsche Halbraum durch

$$\mathbb{H}_n \quad = \quad \{Z \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{C}) \mid Y > 0_n\}$$

definieren. Dabei schreiben wir kurz $Y > 0_n$, um auszudrücken, dass Y positiv definit ist. Der Siegelsche Halbraum ist eine Verallgemeinerung der oberen Halbebene

$$\mathbb{H}_1 \quad = \quad \{c \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(c) > 0\}.$$

Auf $\mathbb{H}_n$ operiert die reelle symplektische Gruppe

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \quad = \quad \left\{ M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \middle| M^t \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \right\}$$

durch

$$Z \quad \mapsto \quad M\langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \text{ für } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Die Untergruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$, die wir Siegelsche Modulgruppe nennen, operiert dabei eigentlich diskontinuierlich. Das heißt dass für zwei Kompakta K_1, K_2 von $\mathbb{H}_n$ die Menge

$$\{M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) \mid M\langle K_1 \rangle \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Die Siegelsche Modulgruppe wird von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E_n & S \\ & E_n \end{pmatrix} \text{ mit } S \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{Z})$$

erzeugt. Im Fall $n=1$ ist die Siegelsche Modulgruppe gerade die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Auch ist die Operation der reellen symplektischen Gruppe auf dem Siegelschen Halbraum im Fall $n=1$ gerade die Operation von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}_1$.
Eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$$

ist genau dann symplektisch, falls

$$A^tC = C^tA, \quad B^tD = D^tB \text{ und } A^tD - C^tB = E$$

gilt. Das Inverse einer symplektischen Matrix M ist

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalbereich $\mathcal{F}(n,\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}))$ für die Operation von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}_n$ wurde von C. F. Siegel in [62] wie folgt angegeben:

$$\mathcal{F}(n,\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})) \;=\; \left\{ Z = X + \mathrm{i}Y \in \mathbb{H}_n \;\middle|\; \begin{array}{l} Y \text{ ist Minkowski-reduziert,} \\ |x_{jk}| \le \frac{1}{2} \text{ und } \forall M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \\ \text{ist } |\det(CZ+D)| \ge 1 \end{array} \right\}.$$

Für den Fall $n=2$ hat E. Gottschling in [25] gezeigt, dass der Fundamentalbereich $\mathcal{F}(2,\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ durch 28 reell 5-dimensionale Randflächen begrenzt wird. Definierende Relationen wurden danach für $n>2$ von H. Klingen in [36] angegeben. Wir sind an Untergruppen der Siegelschen Modulgruppe interessiert. Für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ wird der Kern des natürlichen Homomorphismus

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \;\longrightarrow\; \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe N genannt. Er ist ein Normalteiler von endlichem Index in $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ und wird mit $\Gamma^{(n)}(N)$ bezeichnet. Es gilt

$$\Gamma^{(n)}(N) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv E_{2n} \pmod N \right\}.$$

Allgemeiner bezeichnen wir jede Untergruppe, die eine Hauptkongruenzuntergruppe enthält als Kongruenzuntergruppe. J. Mennicke hat in [45] gezeigt, dass für $n \ge 2$ jede Gruppe von endlichem Index eine Hauptkongruenzuntergruppe enthält. Im Fall $n=1$ kennt man Gruppen von endlichem Index, die keine Kongruenzuntergruppen sind. Wir interessieren uns hier insbesondere für die Untergruppen

$$\Gamma_0^{(n)}(N) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \;\middle|\; C \equiv 0_n (\mathrm{mod}\, N) \right\}.$$

Diese haben endlichen Index, genauer gilt, wie H. Klingen in [35] zeigt:

$$\left[\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}):\Gamma_0^{(n)}(N)\right] = N^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{\substack{p|N \\ p\mathrm{Prim}}} \prod_{i=1}^{n} \left(1+\frac{1}{p^i}\right). \tag{1.1}$$

Bemerkung 1.1
Sei $\mathfrak{O}_K$ der Ganzheitsring von K und $\mathfrak{N}$ ein ganzes Ideal in $\mathfrak{O}_K$. Betrachten wir die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n,K)$ über einem Zahlkörper K, also die multiplikative Gruppe aller $2n\times 2n$-Matrizen M, die die Gleichung

$$M^t J_n M \;=\; J_n, \quad \mathit{mit} \quad J_n \;=\; \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix}$$

erfüllen, so haben die Kongruenzuntergruppen

$$\Gamma_0^{(n)}(\mathfrak{N}) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,\mathfrak{O}_K) \middle| C \equiv 0_n (\mathrm{mod}\,\mathfrak{N}) \right\}$$

auch endlichen Index in $\mathrm{Sp}(n,\mathfrak{O}_K)$. Formel (1.1) gilt, wie ebenfalls in [35] gezeigt wird, auch in diesem Fall. Dabei setzt man in (1.1) anstelle von $\mathbb{Z}$ den Ganzheitsring $\mathfrak{O}_K$ von K, und anstatt N das ganze Ideal $\mathfrak{N}$ ein. Auf der rechten Seite der Formel stehen anstelle ganzer Zahlen die Normen von Idealen. Das erste Produkt läuft dabei über alle Primideale, die $\mathfrak{N}$ teilen.

$\square$

Ist $N=\prod\limits_{i=1}^{t} p_i^{\nu_i}$ die Primfaktorzerlegung von N, so beweist M. Kneser in [39], Satz 2 einen starken Approximationssatz für die symplektische Gruppe. Hieraus folgt:

$$\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \cong \prod_{i=1}^{t} \Gamma_0^{(n)}(p_i^{\nu_i})\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}). \tag{1.2}$$

Diese erlaubt es uns, dass wir uns in vielen Situationen auf die Annahme beschränken können, dass N eine Primzahlpotenz ist.
Ist $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ eine Untergruppe von endlichem Index I und $M_1,\dots,M_I$ ein Repräsentantensystem von $\Gamma\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$, so ist

$$\mathcal{F}(n,\Gamma) \;=\; \bigcup_{i=1}^{I} M_i\langle\mathcal{F}(n,\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}))\rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Operation von Γ auf $\mathbb{H}_n$. Dabei soll das Vertretersystem von $\Gamma\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ nicht notwendig so gewählt sein, dass $\mathcal{F}(n,\Gamma)$ zusammenhängend ist.
Wir nennen einen Homomorphismus χ von Γ in die Gruppe der Einheitswurzeln Kongruenzcharakter von Γ oder einfach nur Charakter von Γ, wenn er trivial auf einer Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma^{(n)}(N)$ mit $\Gamma^{(n)}(N) \subset \Gamma$ ist.

Definition 1.2
Eine Siegelsche Modulform n-ten Grades vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ mit Charakter $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ zur Kongruenzuntergruppe Γ ist eine Funktion $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$, für die gilt:

i) f ist holomorph,

ii) das Transformationsverhalten von f wird für alle $M \in \Gamma$ durch

$$\det(CZ+D)^{-k} f(M\langle Z\rangle) \;=\; \chi(M) f(Z), \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

beschrieben,

iii) ist $n = 1$, so ist $(CZ+D)^{-k} f(M\langle Z\rangle)$ für alle $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ in 'Umgebungen von $i\infty$' beschränkt.

□

Mit dem Begriff der 'Umgebungen von $i\infty$' bezeichnen wir jede offene Teilmenge U von $\mathbb{H}_1$, für die bei festem $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $u \in U$ gilt: $\mathrm{Im}(u) > \epsilon > 0$. Eine für $n > 1$ zu iii) analoge Bedingung, nämlich

$f(M\langle Z\rangle) \det(CZ+D)^{-k}$ ist für alle $M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ in jedem Bereich der Art

$$\left\{ Z \in \mathbb{H}_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Im}(Z) - Y \text{ ist für eine positiv definite} \\ \text{Matrix } Y \text{ positiv definit} \end{array} \right\}$$

beschränkt,

ist für die Definition einer Modulform nicht nötig, da sie mit Hilfe des Koecherprinzips ([24], 3.5), bereits aus i) und ii) gefolgert werden kann.
Wir führen nun noch folgende Notation ein: Ist $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf dem Siegelschen Halbraum und $k \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, so sei für $M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$

$$(f|_k M)(Z) \;=\; \det(CZ+D)^{-k} f(M\langle Z\rangle).$$

Ist f holomorph auf $\mathbb{H}_n$, so auch $(f|_k M)(Z)$, und für $M_1, M_2 \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ gilt:

$$((f|_k M_1)|_k M_2)(Z) \;=\; (f|_k M_1 M_2)(Z).$$

Bemerkung 1.3
Im Allgemeinen benutzt man bei der Definition einer Modulform das etwas allgemeinere Transformationsverhalten

$$\forall M \in \Gamma \text{ gilt:} \quad \det(CZ+D)^{-k} f(M\langle Z\rangle) \;=\; \nu(M) f(Z).$$

Hierbei ist $k \in \mathbb{C}$, $\{\nu(M) \in \mathbb{C}^*|M \in \Gamma\}$ ein komplexes Multiplikatorsystem vom Gewicht k. Dabei ist ein Multiplikatorensysteme vom Gewicht k eine Funktion $\nu : \Gamma \to \mathbb{C}^*$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \nu(MN) &= \nu(M)\nu(N) \ \textit{für alle } N, M \in \Gamma, \\ \nu(-E) &= 1, \ \textit{falls } -E \in \Gamma. \end{aligned}$$

Für

$$\det(CZ + D)^{-k} \ = \ e^{-k\mathrm{Log}(\det(CZ+D))}$$

hat man hier für $k \notin \mathbb{Z}$ mehrere Zweige, von denen einer passend gewählt sei. Ist $n = 1$, so gibt es Formen zur vollen Gruppe, die nichtganzes Gewicht und nichttriviale Multiplikatorsysteme haben. Ist dahingegen aber $n > 1$ so hat U. Christian in [14] gezeigt, dass es zur vollen Modulgruppe nur Multiplikatorsysteme mit ganzem Gewicht gibt. Es folgt daraus, dass dies Charaktere sind. Der einzige nichttriviale Charakter tritt hierbei im Fall $n = 2$ auf (siehe [37], [44]). Betrachten wir hingegen Untergruppen, so sieht die Situation anders aus: Hier gibt es nichttriviale Multiplikatorsysteme. U. Christian hat in [13], [14] gezeigt, dass diese immer rationales Gewicht haben.

□

Die Menge $M_n^k(\Gamma, \chi)$ aller Modulformen n-ten Grades vom Gewicht k mit Charakter χ zur Kongruenzuntergruppe Γ bildet einen endlichdimensionalen Vektorraum. Für jede Modulform $f \in M_n^k(\Gamma, \chi)$ und für jede Matrix $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ existiert eine Fourierentwicklung,

$$(f|_k M)(Z) \ = \ \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Q}), \\ T \geq 0}} a_T e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)},$$

von der wir aufgrund des Koecherprinzips wissen, dass der Fourierkoeffizient a_T nur dann nicht Null ist, falls T positiv semidefinit ist. Bezeichnen wir mit S die Menge aller Matrizen, unter denen eine gegebene Modulform $f|_k M$ translationsinvariant ist,

$$S \ = \ \{\zeta \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{R}) | f(Z + \zeta) = f(Z)\},$$

dann wird in der Fourierentwicklung von $f|_k M$ über die Menge

$$S^\wedge \ = \ \{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{Q})| \ T \geq 0, \ \mathrm{tr}(T\zeta) \in \mathbb{Z} \ \forall \zeta \in S\} \tag{1.3}$$

summiert. Ist speziell $\Gamma = \Gamma_0^{(n)}(N)$, so genügt es für $f|_k E_n$ über alle positiv semidefiniten Matrizen aus $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \frac{1}{2}\mathbb{Z})$ mit ganzzahligen Diagonaleinträgen zu summieren. Für den Träger $\mathrm{Supp}(f)$ von f

$$\mathrm{Supp}(f|_k M) \ = \ \{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{Q})| \ T \geq 0, a_T \neq 0\}$$

gilt:

$$\operatorname{Supp}(f) \quad \subset \quad \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2} Z\right) \middle| \begin{array}{l} T \geq 0,\, T \text{ hat} \\ \text{ganze Diagonaleinträge} \end{array} \right\}. \tag{1.4}$$

Beachte zum Begriff des Trägers auch noch die Ausführungen nach Formel(1.5). Ein Fourierkoeffizient a_T von f hängt für eine Modulform zu $\Gamma_0^{(n)}(N)$ mit trivialem Charakter nur von der $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$–Klasse von T ab. Es gilt also für alle $U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$:

$$a_T \quad = \quad a_{U^t T U}.$$

Betrachten wir die Fourierentwicklung von $(f|_k M)(Z)$ mit $M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$, $f \in M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)$, dann ist für alle M

$$\operatorname{Supp}(f|_k M) \quad \subset \quad \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right) \middle| \begin{array}{l} T \geq 0, \\ NT \text{ hat ganze} \\ \text{Diagonaleinträge} \end{array} \right\}. \tag{1.5}$$

In Abschnitt 1.4 wird noch genauer auf die Fourierentwicklung einer Modulform eingegangen. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird der Begriff des Trägers $\operatorname{Supp}(f|_k M)$ einer Modulform f nicht immer als die Teilmenge aller Elemente T aus $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Q})$ aufgefasst, für die der Koeffizient a_T in der Fourierentwicklung von $f|_k M$ ungleich Null ist. Da meist eine beliebige Modulformen f zu einer Untergruppe Γ betrachtet wird, und der Träger dieser Modulform nicht explizit angegeben werden kann, werden die beiden Mengen aus (1.4) und (1.5), beziehungsweise die im Verlauf der Arbeit in Abschnitt 1.4 vorgestellte Teilmenge hiervon, in denen $\operatorname{Supp}(f|_k M)$ enthalten ist, auch selbst als Träger $\operatorname{Supp}(f|_k M)$ von f bezeichnt. Um Verwechselungen vorzubeugen, verwenden wir hierfür auch den Begriff potenzieller Träger.
Sei $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so dass

$$\lim_{t\to\infty} f\begin{pmatrix} Z & \\ & it \end{pmatrix},\ Z \in \mathbb{H}_{n-1}$$

existiert. Dann ist

$$(f|\Phi)(Z) \quad = \quad \lim_{t\to\infty} f\begin{pmatrix} Z & \\ & it \end{pmatrix}$$

eine Funktion auf $\mathbb{H}_{n-1}$. Wir bezeichnen Φ als den Siegelschen Φ–Operator . Er liefert eine Abbildung $M_n^k(\Gamma,\chi) \to M_{n-1}^k(\Gamma^{(n-1)},\chi^{(n-1)})$ mit

$$\Gamma^{(n-1)} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} A & & B & \\ & 1 & & 0 \\ C & & D & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$$

und

$$\chi^{(n-1)}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \;=\; \chi\begin{pmatrix} A & & B & \\ & 1 & & 0 \\ C & & D & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Form f heißt Spitzenform n-ten Grades vom Gewicht k mit Charakter χ zur Kongruenzuntergruppe Γ falls gilt:

$$((f|_k M)|\Phi)(Z) \;=\; 0 \quad \forall M \in \Gamma.$$

Den Unterraum aller Spitzenformen von $M_n^k(\Gamma,\chi)$ bezeichnen wir mit $S_n^k(\Gamma,\chi)$. In der Fourierentwicklung einer Spitzenform genügt es über positiv definite Matrizen zu summieren, da die Fourierkoeffizienten a_T für nicht positiv definite T alle Null sind. Um zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Spitzenformen f_1, f_2 gleich sind, beziehungsweise um die dazu äquivalente Frage zu beantworten, ob $f_1 - f_2$ identisch Null ist, ist es ausreichend, genügend Fourierkoeffizienten einer Entwicklung von f zu betrachten. C. F. Siegel hat für die volle Modulgruppe eine effektive Version dieser Aussage geliefert. Der entsprechende Satz findet sich in einer Arbeit von H. Maaß [43], der ihn dort mit dem Einverständnis von C. F. Siegel veröffentlicht hat.

Satz 1.4 (C. F. Siegel)
Ist $f \in S_n^k$ eine Spitzenform (zur vollen Modulgruppe) mit Fourierentwicklung

$$f(Z) \;=\; \sum_{T>0} a_T e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)},$$

dann sind äquivalent:

i) $f \equiv 0$,

ii) $\forall T$ *mit* $\operatorname{tr}(T) \leq \kappa_n \frac{k}{4\pi}$ *gilt* $a_T = 0$,

iii) $\forall T$ *mit* $\operatorname{tr}(T) \leq n\mu_n^n \frac{k}{2\sqrt{3}\pi}$ *gilt* $a_T = 0$,

iv) $\forall T$ *mit* $\sqrt[n]{\det(T)} \leq \mu_n^n \frac{k}{2\sqrt{3}\pi}$ *gilt* $a_T = 0$.

□

Dabei ist

$$\kappa_n \;=\; \sup_{Z \in \mathcal{F}(n,\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}))} \operatorname{tr}((\operatorname{Im} Z)^{-1})$$

eine endliche Konstante und μ_n die Hermitesche Konstante, also die kleinste Konstante, so dass für alle positiv definiten T aus $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{R})$ gilt:

$$\mathrm{m}(T) \;=\; \min_{x\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} x^tTx \leq \mu_n \sqrt[n]{\det(T)}.$$

Die Aussagen *i*), *ii*) und *iii*) des Verschwindungssatzes von Siegel erlauben es einem nun jeweils nur endliche viele Elemente T des Trägers einer Spitzenform $f|_kE_n$ zu untersuchen, um zu entscheiden, ob f verschwindet oder nich. Für die praktische Anwendung hat dieser Satz jedoch zwei Nachteile:

i) Die Schranken, die man für κ_n, $n>1$ kennt, sind wahrscheinlich schlecht.

ii) Das Verschwinden von Fourierkoeffizienten von Modulformen zur $\Gamma_0^{(n)}(N)$ mit Charakter hängt nur von der $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$–Klasse ab, $T\sim UTU^t$, $U\in\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ ($\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$–Äquivalenz). Die Spur ist aber weder $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$–Klassenfunktion noch eine $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$–Klassenfunktion ($T\sim UTU^t$, $U\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$–Äquivalenz)

Beide führen dazu, dass bei der Entscheidung, ob eine Spitzenform identisch Null ist, beziehungsweise ob zwei Spitzenformen gleich sind, unnötig viele Fourierkoeffizienten berechnet werden müssen. C. Poor und D. S. Yuen liefern in [52] einen Satz, der beide Nachteile behebt und für praktische Rechnungen bessere Ergebnisse liefert. Um diesen zu formulieren benötigen wir den Begriff der dyadischen Spur.

Definition 1.5
Wir sagen, eine Matrix $T\in\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{R})$ hat eine dyadische Darstellung, falls es $\alpha_i\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $v_i\in\mathbb{Z}^n-\{0\}$ gibt, so dass

$$T \;=\; \sum_i \alpha_i v_i v_i^t$$

ist.

□

Die Menge der positiv semidefiniten Elemente aus $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{R})$, die eine dyadische Darstellung besitzen bezeichnen wir mit C_n^*. Es gilt:

$$C_n^* \;=\; \mathbb{R}_{\geq 0}\langle vv^t\rangle_{v\in\mathbb{Z}^n-\{0\}}.$$

Die Menge C_n^* lässt sich auch durch den Begriff des Radikals

$$\mathrm{rad}(T) \;=\; \{v\in\mathbb{R}^n|\; v^tTv \;=\; 0\}$$

mittels

$$C_n^* \;=\; \{T\in\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{R})|\; T\geq 0, \mathrm{rad}(T) \text{ ist über } \mathbb{Q} \text{ definiert}\}$$

charakterisieren (siehe [52], Proposition3.2).

Definition 1.6
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \omega_n : C_n^* & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ T & \mapsto & \omega_n(T) \ = \sup\limits_{T=\sum\limits_i \alpha_i v_i v_i^t} \sum\limits_i \alpha_i \end{array}$$

heißt dyadische Spur.

□

Die dyadische Spur lässt sich auch als Infimum charakterisieren.

Satz 1.7
Für alle $T > 0, T \in C_n^*$ *gibt es* $Y_0 \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{R}), Y_0 > 0$, *so dass*

$$\omega_n(T) \ = \ \frac{\mathrm{tr}(TY_0)}{\mathrm{m}(Y_0)} \ = \inf_{\substack{Y>0 \\ Y \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{R})}} \frac{\mathrm{tr}(TY)}{\mathrm{m}(Y)}$$

gilt. Darüber hinaus gibt es eine dyadische Darstellung von T *in den Minimalvektoren von* Y_0,

$$T \ = \ \sum_i \alpha_i v_i v_i^t, \quad v_i \in \mathrm{MinVec}(Y_0) \ = \ \{x \in \mathbb{Z}^n |\ x^t Y_0 x \ = \ \mathrm{m}(Y_0)\}.$$

Beweis:
Siehe [52], Theorem 3.9

□

Proposition 1.8
Die dyadische Spur ist eine $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$*-Klassenfunktion.*
Beweis:
Mit $T = \sum\limits_i \alpha_i v_i v_i^t$ *ist auch* $UTU^t = \sum\limits_i \alpha_i (Uv_i)(Uv_i)^t$ *für alle* $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ *eine dyadische Darstellung von* UTU^t.

□

Mit Hilfe der Konstanten

$$\mathfrak{w}_n \ = \ \sup_{Z \in \mathbb{H}_n} \inf_{\sigma \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})} \omega_n(\mathrm{Im}(\sigma Z)^{-1}),$$

die sich durch

$$\mathfrak{w}_n \ \leq \ \frac{2}{\sqrt{3}} n \tag{1.6}$$

abschätzen lässt (siehe [52], p 218), können wir nun den Satz von C. Poor und D. S. Yuen formulieren.

Satz 1.9 (C. Poor, D. S. Yuen)
Ist $f \in S_n^k$ eine Spitzenform (zur vollen Modulgruppe) mit Fourierentwicklung

$$f(Z) \;=\; \sum_{T>0} a_T e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)},$$

dann sind äquivalent:

i) $f \equiv 0$,

ii) $\forall T$ *mit* $\omega_n(T) \leq \mathfrak{w}_n \frac{k}{4\pi}$ *gilt* $a_T = 0$,

iii) $\forall T$ *mit* $\omega_n(T) \leq n \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{k}{4\pi}$ *gilt* $a_T = 0$,

iv) $\forall T$ *mit* $\sqrt[n]{\det(T)} \leq \mu_n \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{k}{4\pi}$ *gilt* $a_T = 0$.

Beweis:
Siehe [52], Theorem 2.9

□

Bemerkung 1.10

i) Teil iv) des Satzes folgt aus Teil iii) und der Ungleichung

$$\omega_n(T) \;\geq\; \frac{n}{\mu_n} \sqrt[n]{\det(T)} \tag{1.7}$$

(siehe [52], p. 224). Diese Abschätzung kann auch dazu genutzt werden, um aus einer Liste von Formen, die nach der Diskriminante aufgelistet sind, alle Formen zu berechnen, deren dyadische Spur kleiner als eine fest vorgegebene Konstante const *ist. Diese sind dann in der Menge*

$$\left\{ T \,\middle|\, \det(T) \leq \left(\frac{\mathrm{const}\,\mu_n}{n} \right)^n \right\}$$

enthalten. Für den Fall $n = 2$ und $n = 3$ lassen sich diese Formen leichter berechnen. Siehe hierzu Lemma 2.63, sowie Gleichung (2.58) *und die anschließenden Ausführungen.*

ii) Insbesondere wird durch (1.7) *auch deutlich, dass im Verschwindungssatz von Poor und Yuen immer nur endlich viele $T \in \operatorname{Supp}(f)$ einer Spitzenform f betrachtet werden müssen um zu entscheiden, ob f verschwindet. Im Fall einer Grad* 1 *Spitzenform (n=1) stimmt die Aussage des Satzes mit der des Verschwindungssatzes von Siegel überein. Für $n = 2$ und $n = 3$ liefert die dyadische Spur für die zu betrachtende Anzahl der Elemente $T \in \operatorname{Supp}(f)$*

immer bessere Abschätzungen als die Spur. Für höhere Grade deuten einige Beispiele auf eine deutliche Reduzierung der Anzahl der Fourierkoeffizienten, die man berechnen muss, um das Verschwinden einer Spitzenform nachzuweisen. Obwohl der Zusammenhang zwischen Spur und dyadischer Spur nicht ganz geklärt ist, scheinen die Konstanten in Teil ii) der Verschwindungssätze von Siegel sowie von Poor und Yuen dies zu bestätigen.

□

Die Sätze von C. F. Siegel beziehungsweise von C. Poor und D. S. Yuen gehören zu einer ganzen Reihe von Sätzen, die effektive Versionen für die Entscheidung liefern, ob zwei Spitzenformen identisch sind. Seien für $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$

$$\mathrm{P}_n(R) \quad = \quad \{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, R) |\ T > 0\}$$

und

$$\mathrm{P}_n^{\mathrm{semi}}(R) \quad = \quad \{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, R) |\ T \geq 0\}.$$

Definition 1.11
Sei $\mathrm{P}_n(\mathbb{R}) \subset D \subset \mathrm{P}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{R})$*. Eine Funktion* $\phi : D \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *heißt Typ-*I*-Funktion, falls*

i) $\phi(T) > 0$ *für alle* $T \in \mathrm{P}_n(\mathbb{R})$*,*

ii) $\phi(\lambda T) = \lambda\phi(T)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$*,* $T \in D$ *und*

iii) $\phi(T_1 + T_2) \geq \phi(T_1) + \phi(T_2)$ *für alle* $T_1, T_2 \in D$*.*

*Des weiteren nennen wir eine Typ-*I*-Funktion* ϕ *Typ-*II*-Funktion, falls* $\phi(\mathrm{P}_n(\mathbb{Z}))$ *diskret in* $\mathbb{R}$ *ist.*

□

Beispiele für Typ-II-Funktionen sind $\mathrm{tr}(\cdot), \omega_n(\cdot)$, $\sqrt[n]{\det(\cdot)}$ und $\mathrm{m}(\cdot)$. Für jede Typ-II-Funktion erhält man einen Verschwindungssatz, also eine entsprechende Aussage der Sätze 1.4 und 1.9. Dabei liefert die dyadische Spur unter den aufgeführten Typ-II-Funktionen die rechnerisch besten Ergebnisse. Diese Sätze beruhen auf folgender auch für unser weiteres Vorgehen zentralen Aussage:

Satz 1.12
Sei $f \in S_n^k(\Gamma, \chi)$, Γ von endlichem Index in $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ und ϕ eine Typ-II-Funktion. Falls $\forall M \in \Gamma \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ gilt:

$$\min \phi(\mathrm{Supp}(f|_k M)) \quad > \quad \frac{k}{4\pi} \sup_{Z \in \mathbb{H}_n} \inf_{\sigma \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})} \phi(\mathrm{Im}(\sigma Z)^{-1}),$$

dann ist $f \equiv 0$.
Beweis:
Siehe [52], Theorem 2.5

□

Betrachten wir nun speziell die Gruppe $\Gamma = \Gamma_0^{(n)}(N)$. Da für alle $g \in \Gamma_0^{(n)}(N)$ und für alle $u \in \Gamma_0^{(n)}(N)$ der Form

$$u \quad = \quad \begin{pmatrix} A^t & S \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$$

der Träger $\mathrm{Supp}(f|_k gMu) = A\mathrm{Supp}(f|_k M)A^t$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \min(\omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k gMu))) &= \min(\omega_n(A\mathrm{Supp}(f|_k M)A^t)) \\ &= \min(\omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M))). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Wir interessieren uns deshalb für $\Gamma_0^{(n)}(N) \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) / \Delta(n, \mathbb{Z})$ mit

$$\Delta(n, \mathbb{Z}) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} A^t & S \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) \right\}.$$

Wir führen nun den Begriff der Spitzenklasse ein. Dieser wird ein wesentliches Hilfsmittel für eine Verallgemeinerung des Satzes von C. Poor und D. S. Yuen (Satz 1.9) auf die Untergruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$ sein.

Definition 1.13
Die Elemente von $\Gamma_0^{(n)}(N) \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) / \Delta(n, \mathbb{Z})$ nennen wir die 0-dimensionalen Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$, oder einfach nur die Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$.

□

Der Quotientenraum $\mathbb{H}_n / \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ trägt die Struktur einer quasiprojektiven Varietät. Die Satakekompaktifizierung (siehe [24], II).

$$\overline{\mathbb{H}_n / \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})} \quad = \quad \mathbb{H}_n / \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) \,\dot{\cup} \ldots \dot{\cup}\, \mathbb{H}_0 / \mathrm{Sp}(0, \mathbb{Z})$$

enthält $\mathbb{H}_n / \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ als offenen, dichten Teil. $\mathbb{H}_0 / \mathrm{Sp}(0, \mathbb{Z})$ steht hierbei für einen einzigen Punkt, die 0-dimensionale Standardrandkomponente. Zu jeder projektiv rationalen Matrix aus $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ gibt es weitere rationale Randkomponenten (Spitzen). Die Elemente aus $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$ stehen in eindeutiger Korrespondenz zu den 0-dimensionalen Randkomponenten modulo $\Gamma_0^{(n)}(N)$. Betrachten wir zum Beispiel den Fall der Dimension $n=1$, so lässt sich die obere Halbebene in die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ einbetten. Die Standardrandkomponente entspricht hierbei dem Punkt $\{\infty\}$ und die rationalen Randkomponenten sind einelementigen Teilmengen von $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. Diese werden auch als Spitzen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ bezeichnet. Jede Untergruppe Γ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ mit endlichem Index hat als Spitzen ebenfalls die einelementigen Teilmengen von $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ (Siehe [48], Corollary 1.5.5.). Die Elemente aus $\Gamma_0^{(1)}(N)\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Delta(1,\mathbb{Z})$ stehen in eindeutiger Korrespondenz zu den nicht äquivalenten Spitzen von $\Gamma_0^{(1)}(N)\backslash\mathbb{H}_1$, also den Elementen aus $(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})/\simeq$ mit

$$q\simeq q' \quad\Leftrightarrow\quad \exists\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0^{(1)}(N),\ \text{so dass}\ \frac{aq+b}{cq+d}=q'.$$

(Mit dem Symbol ∞ rechnen wir hier in üblicher Weise.) Die Elemente von $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$ können zur Beschreibung des 'Übergangs' von der 0-dimensionalen Standardrandkomponente zu einer anderen 0-dimensionalen Randkomponente benutzt werden. Jede der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ beschreibt dabei genau einen Übergang zwischen 'nicht-äquivalenten' 0-dimensionalen Randkomponenten. Auf den Begriff der Äquivalenz von 0-dimensionalen Randkomponenten wollen wir hier nicht weiter eingehen. Der interessierte Leser sei hiermit auf [11], Abschnitt 12 verwiesen. Abschließend behandeln wir noch als Beispiel $\Gamma_0^{(1)}(4)\backslash\mathbb{H}_1$. Hier haben wir drei nicht äquivalente Spitzen

$$\infty,\qquad 0=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\langle\infty\rangle\quad\text{und}\qquad \frac{1}{2}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\langle\infty\rangle.$$

Entsprechend ist

$$\Gamma_0^{(1)}(4)\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Delta(1,\mathbb{Z}) \;=\; \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Die auf Seite 4 beschriebenen Umgebungen von ∞, die bei der Satakekompaktifizierung Umgebungen von ∞ entsprechen, werden von den Elementen aus $\Gamma_0^{(1)}(4)\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Delta(1,\mathbb{Z})$, interpretiert als Modulsubstitutionen, auf Umgebungen von 0, $\frac{1}{2}$ beziehungsweise ∞ abgebildet.

1.2 Hermitesche Modulformen

In diesem Abschnitt sei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathfrak{O}_K$. Sei weiter

$$\mathrm{HP}_n(K) \;=\; \{s\in\mathrm{HER}(n,K)\mid s\;>0\}$$

die Menge der positiv definiten und

$$\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(K) \;=\; \{s \in \mathrm{HER}(n,K) \mid s \;\geq 0\}$$

die Menge der positiv semidefiniten Hermiteschen Matrizen mit Einträgen aus K. Entsprechend seien

$$\mathrm{HP}_n(\mathbb{C}) \;=\; \{s \in \mathrm{HER}(n,\mathbb{C}) \mid s \;> 0\}$$

und

$$\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C}) \;=\; \{s \in \mathrm{HER}(n,\mathbb{C}) \mid s \;\geq 0\}$$

definiert. Für einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ sei $|v|^2 = vv^*$. Ist $R \subset \mathbb{C}$ ein Teilring von $\mathbb{C}$, so sei

$$\mathrm{U}(n,R) \;=\; \left\{ M \in \mathrm{GL}(2n,R) \;\middle|\; \overline{M}^t \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die unitäre Gruppe. Ist $R = \mathfrak{O}_K$, so bezeichnen wir diese auch als Hermitesche Modulgruppe vom Grad n. Die Untergruppe

$$\mathrm{SU}(n,\mathfrak{O}_K) \;=\; \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K) \cap \mathrm{SL}(2n,\mathfrak{O}_K)$$

nennen wir die spezielle Hermitesche Modulgruppe vom Grad n. Die Hermitesche Modulgruppe operiert eigentlich diskontinuierlich durch

$$Z \;\mapsto\; M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \text{ für } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$$

auf dem Hermiteschen Halbraum

$$\mathbb{H}_n(\mathbb{C}) \;=\; \left\{ Z \in \mathrm{MAT}(n,\mathbb{C}) \;\middle|\; \frac{1}{2i}\left(Z - \overline{Z}^t\right) > 0 \right\}.$$

Beschränken wir uns auf den Fall, in dem K keine Ausnahmeeinheiten hat, also

$$K \notin \{\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3})\},$$

so wird in [9], p. 151 ein Fundamentalbereich $\mathcal{F}(n,\mathfrak{O}_K)$ für die Operation von $\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$ auf $\mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ beschrieben. Für den Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ findet sich eine explizite Beschreibung eines Fundamentalbereiches in [42], p. 58. Eine allgemeinere Definition findet sich ebenfalls in [42], p. 6. Erzeugendensysteme sind für $\mathrm{SU}(n,\mathfrak{O}_K)$ durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix} \right\} \;\cup\; \left\{ \begin{pmatrix} E_n & H \\ 0_n & E_n \end{pmatrix} \;\middle|\; H \in \mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_k) \right\}$$

und für $\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$ durch

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix} \right\} \\ \cup & \left\{ \begin{pmatrix} E_n & H \\ 0_n & E_n \end{pmatrix} \middle| H \in \mathrm{HER}(n, \mathfrak{O}_k), \right\} \\ \cup & \left\{ \begin{pmatrix} \overline{U}^t & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \middle| U = \mathrm{Diag}(\epsilon, 1, \ldots, 1), \epsilon \in \mathfrak{O}_k^* / \{\pm 1\} \right\} \end{aligned}$$

gegeben (siehe [18], Lemma 1.4). Sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{O}_K$ ein Ideal. Wir definieren

$$\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] \quad = \quad \{ M \in \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K) \,|\, M \equiv E_{2n} (\operatorname{mod} \mathfrak{a}) \}$$

und bezeichnen diese Gruppe als Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe $[\mathfrak{a}]$. Sie ist eine normale Untergruppe von $\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$ von endlichem Index. Eine Untergruppe Γ von $\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$ heißt Kongruenzuntergruppe modulo $\mathfrak{a}$, falls

$$\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] \quad \subset \quad \Gamma$$

gilt. Kongruenzuntergruppen sind diskret und operieren eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}_n(\mathbb{C})$. Seien weiter

$$\begin{aligned} \Delta_n(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n, R) \middle| \; C = 0 \right\}, \\ \mathrm{S}\Delta_n(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n, R) \middle| \; C = 0, \; \det(A) = 1 \right\}, \\ \Delta_n(\mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] &= \Delta_n(\mathfrak{O}_K) \cap \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] \quad \text{und} \\ \mathrm{S}\Delta_n(\mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] &= \mathrm{S}\Delta_n(\mathfrak{O}_K) \cap \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}]. \end{aligned}$$

Definition 1.14
Sei $\Gamma \subset \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$ eine Kongruenzuntergruppe, $k \in \mathbb{Z}$ und χ ein Charakter zu Γ. Eine Funktion $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ heißt eine Hermitesche Modulform mit Charakter χ vom Gewicht k zur Gruppe Γ, falls gilt:

1) *f ist holomorph auf $\mathbb{H}_n$ und im Fall $n = 1$ zusätzlich holomorph in allen Spitzen.*

2) *$f(M\langle Z \rangle) = \chi(M) \det(CZ + D)^k f(Z)$ für alle $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$.*

□

Bemerkung 1.15

i) *Schließt man im Fall* $n = 1$ *die beiden Körper* $Q(\sqrt{-1})$ *und* $Q(\sqrt{-3})$ *aus, so lässt sich die Theorie, die sich aus der Hermiteschen Modulgruppe und ihren Untergruppen ergibt, auf den Fall der gewöhnlichen Modulgruppe* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *und deren Untergruppen zurückführen (siehe hierzu [10]). Dies rührt daher, dass in diesen Fällen die Hermiteschen Modulgruppen mit der Siegelschen Modulgruppe übereinstimmen. Auch stimmen die Kongruenzuntergruppen dieser Gruppen überein.*

ii) *Wie auch schon für Siegelsche Modulformen ist im Fall* $n > 1$ *aufgrund des Koecherprinzips die Forderung der Holomorphie in jeder Spitze nicht mehr notwendig.*

iii) *Man kann hier ebenfalls anstatt mit Charakteren allgemeiner mit Multiplikatorsystemen arbeiten. Genau wie im Siegelschen Fall (siehe Bemerkung 1.3), haben die Multiplikatorsysteme, wie in [17] gezeigt wird, für* $\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$ *und* $\mathrm{SU}(n,\mathfrak{O}_K)$ *ganzes Gewicht. Sie sind also Charaktere. Es gibt bis auf die Fälle, in denen* K *Ausnahmeeinheiten hat, nur für* $n = 2$ *und* $\mathrm{Disk}(K) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ *nichttriviale Charaktere. Diese sind Fortsetzungen des nichttrivialen Charakters auf der Siegelschen Modulgruppe* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$*. Sie werden in [17] konstruiert. In den Fällen mit Ausnahmeeinheiten kommen die Charaktere von den Ausnahmeeinheiten. Dies sind:*

$$\mathfrak{O}_K^* = \{\zeta_4 |\ \zeta_4 \textit{ ist } 4\textit{-te Einheitswurzel}\}, \quad \textit{falls} \quad K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}),$$
$$\mathfrak{O}_K^* = \{\zeta_6 |\ \zeta_6 \textit{ ist } 6\textit{-te Einheitswurzel}\}, \quad \textit{falls} \quad K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}).$$

□

Die Menge der Hermiteschen Modulformen mit Charakter χ vom Gewicht k zur Gruppe Γ bildt einen Vektorraum, den wir mit $M_n^k(\Gamma,\chi)$ bezeichnen. Er ist endlichdimensional. Insbesondere gilt nach [10] für eine Kongruenzuntergruppe Γ mit Charakter χ:

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_n^k(\Gamma,\chi)) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad k < 0, \\ 0 & \text{falls} \quad k = 0 \text{ und } \chi \neq 1, \\ 1 & \text{falls} \quad k = 0 \text{ und } \chi = 0. \end{cases}$$

Für eine Funktion $f : \mathbb{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $M \in \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ und $k \in \mathbb{Z}$ notieren wir wie im Siegelschen Fall

$$(f|_k M)(Z) \quad = \quad \det(CZ + D)^{-k} f(M\langle Z\rangle).$$

Für jede Modulform $f \in M_n^k(\Gamma,\chi)$ lässt sich für jedes $M \in \mathrm{U}(n,K)$ die Funktion $(f|_k M)(Z)$ in eine Fourierreihe entwickeln (siehe hierzu [10]). Nach dem Koecherprinzip kommen dabei im Träger nur positiv semidefinite Elemente vor. Es ist:

$$(f|_k M)(Z) = \sum_{0 \le T \in (\mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K))^\#} a_T(M) e^{2\pi \mathrm{i} \frac{\mathrm{tr}(TZ)}{b}} \tag{1.9}$$

wobei $b \in \mathbb{N}$ nur von M und f abhängt und $(\mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K))^\#$ das Dual von $\mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K)$ bezüglich der Spur ist. Also ist

$$(\mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K))^\# \;=\; \{M \in \mathrm{HER}(n,\mathbb{C}) |\, \mathrm{tr}(TM) \in \mathbb{Z}\; \forall M \in \mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K)\}\,.$$

Ist Γ eine Kongruenzgruppe modulo (N), dem von $N \in \mathbb{N}$ in $\mathfrak{O}_K$ erzeugten Ideal, also

$$\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)[(N)] \;\subset\; \Gamma \;\subset\; \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$$

mit endlichem Index $[\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K) : \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)[(N)]]$, so ist $b = Nl^2$, wobei $l \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, dass lM und lM^{-1} ganz sind. Diese Reihenentwicklung konvergiert absolut gleichmäßig auf jeder in $\mathrm{MAT}(n,\mathbb{C})$ abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{H}_n(\mathbb{C})$. Ist U eine unimodulare Matrix mit Einträgen aus $\mathfrak{O}_K$, die die Kongruenz $U \equiv E_n (\mathrm{mod}\, b)$ erfüllt, so ist

$$a_{U^*TU}(M) \;=\; a_T(M).$$

Definition 1.16
Eine Modulform $f \in M_n^k(\Gamma,\chi)$ heißt Spitzenform, falls für alle $M \in \mathrm{U}(n,K)$ gilt:

$$((f|_k M)\,|\Phi)(Z) \;=\; 0.$$

□

Hierbei bezeichnet Φ wie im Siegelschen Fall den Siegelschen Φ-Operator

$$(f|\Phi)(Z_{n-1}) \;=\; \lim_{y\to\infty} f\begin{pmatrix} Z_{n-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{i}y \end{pmatrix} \text{ mit } Z_{n-1} \in \mathbb{H}_{n-1}(\mathbb{C})$$

und bildet $f \in M_n^k(\Gamma,\chi)$ auf eine Modulform $f|\Phi \in M_{n-1}^k(\Gamma_{n-1},\chi')$ für eine gewisse Untergruppe Γ_{n-1} vom Grad $n-1$ und einen gewissen Charakter χ' von Γ_{n-1} ab. Die Spitzenformen bilden einen Untervektorraum von $M_n^k(\Gamma,\chi)$, den wir mit $S_n^k(\Gamma,\chi)$ bezeichnen.

1.3 Thetareihen

Um Aussagen zur Existenz von Modulformen zu machen, hat man mehrere Möglichkeiten. Ein wichtiges Konstruktionsmittel für Modulformen sind Poincarésche Reihen (siehe [43], [24] p. 53 ff oder [13] p. 374 ff). Man nutzt aber auch Eisensteinreihen oder Liftungen von Formen zu anderen Gruppen, meist orthogonale

Gruppen. Eine andere wichtige Möglichkeit zur expliziten Konstruktion sind Thetareihen. Diese führen zu Liftungen von orthogonalen beziehungswesie unitären Gruppen. Auf Thetareihen wollen wir hier im Folgenden etwas genauer eingehen. Sei Λ ein Gitter mit Gram-Matrix $S = MM^t \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(m, \mathbb{Q})$. Sei weiter $T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{Q})$. Mit $a(S, T)$ bezeichnen wir die Anzahl der Lösungen der Matrixgleichung $X^t SX = T$ über $\mathbb{Z}$, also

$$a(S,T) \quad = \quad \sharp\{X \in \mathrm{MAT}(m,n,\mathbb{Z}) | X^t SX = T\}.$$

Sie hängt nur von der $\mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ beziehungsweise $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$-Klasse von S und T ab.

Definition 1.17

Sei $Z \in \mathbb{H}_n$ und $S \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(m, \mathbb{Z})$ eine ganzzahlige, symmetrische Matrix mit geraden Diagonaleinträgen. Wir definieren die Reihe

$$\begin{aligned}\theta^n_\Lambda(Z) \quad = \quad \theta^n_S(Z) \quad &= \sum_{T \in \mathrm{P}_n(\mathbb{Z})} a(S,T) e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)} \\ &= \sum_{M \in \mathrm{MAT}(m,n,\mathbb{Z})} e^{\pi i \mathrm{tr}(M^t SMZ)}.\end{aligned}$$

Sie heißt Siegelsche Thetareihe vom Geschlecht n zum Gitter Λ beziehungsweise zur quadratischen Form oder zur Matrix S.

□

Die Siegelsche Thetareihe konvergiert absolut und gleichmäßig in Kompakta. Sei N die Stufe von S beziehungsweise von Λ, also die kleinste ganze Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass $NS^{-1} \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z})$ auch eine ganzzahlige Matrix mit geraden Diagonaleinträgen ist. Sei weiter $m = 2k \in 2\mathbb{Z}$ gerade. Dann ist

$$\theta^n_S(Z) \quad \in \quad M^k_n(\Gamma^{(n)}_0(N), \chi^n_S).$$

Hier ist χ^n_S ein Charakter, genauer

$$\chi^n_S\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \left(\frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \det(S)}{\det(D)}\right),$$

wobei $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ das Jacobi-Symbol bezeichnet. Diese Aussage findet man zum Beispiel in [2], Theorem 2.2.2 und Theorem 1.4.10. Für eine allgemeinere Definition von Thetareihe betrachten wir die homogenen Polynome $P : \mathrm{MAT}(m, n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ in nm Unbekannten. Ein solches Polynom nennen wir pluriharmonisch, wenn für alle $A \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{C})$ die Polynome $P_A : X \mapsto P(XA)$ harmonisch sind, also

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 P_A(X)}{(\partial x_{ij})^2} \quad = \quad 0$$

gilt. Sei nun noch $\sqrt{S}$ die eindeutig bestimmte, positiv definite, symmetrische Matrix, so dass $\sqrt{S}\sqrt{S} = S$ ist.

Definition 1.18
Die Reihe

$$\theta^n_{S,P}(Z) \quad = \sum_{M \in \mathrm{MAT}(m,n,\mathbb{Z})} P(\sqrt{S}M)e^{\pi \mathrm{i} tr(M^t SMZ)}$$

nennen wir verallgemeinerte Thetareihe zu S vom Geschlecht n mit pluriharmonischem Polynom P.

□

Auch die verallgemeinerten Thetareihen sind Modulformen für $\Gamma_0^{(n)}(N)$. Sie haben Gewicht $\frac{m}{2} + \deg(P)$. Bezeichnen wir mit $Q_S(\underline{x})$ die Matrix mit Einträgen

$$Q_S(\underline{x})_{ij} \quad = \quad \frac{1}{2}B(x_i, x_j) \quad = \quad \frac{1}{2}x_i^t S x_i$$

für $\underline{x} = (x_i, \ldots, x_n) \in \Lambda^n$, und interpretieren P durch Wahl einer Orthonormalbasis von $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ als Funktion auf $(\Lambda \otimes \mathbb{R})^n$, dann kann man $\theta^n_{S,P}(Z)$ auch als

$$\theta^n_{S,P}(Z) \quad = \sum_{\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\Lambda^n} P(\underline{x})e^{\pi \mathrm{itr}(Q_s(\underline{x})Z)} \qquad (1.10)$$

schreiben.
Da man an den Räumen $M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$ interessiert ist, stellt sich über die Frage nach der Existenz von Modulformen hinaus die Frage, ob alle Thetareihen zu Gittern aus einem Geschlecht die Räume $M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N), \chi)$ bereits aufspannen. Ist $m = 2k < n$ so hat E. Freitag in [23] gezeigt, dass diese Räume von Siegelschen Thetareihen aufgespannt werden. S. Böcherer zeigt dies in [4] für den Fall: $k > 2n$, mit $4|k$. Der Fall $m = n$ wurde von A. N. Andrianov in [1] bearbeitet und für $\frac{m}{2} \leq n \leq m$ haben S. Böcherer und R. Schulze-Pillot [6] gezeigt, dass die Hecke-Eigenformen der Stufe N mit trivialem Charakter unter einigen Zusatzbedingungen durch Thetareihen ausgedrückt werden können. Weitere Aussagen zur Charakterisierung von Räumen von Modulformen durch Thetareihen findet man in [59].
Spitzenformen lassen sich aus Konvergenzgründen für $k < 2n$ nicht mit Hilfe von Poincaréreihen konstruieren. Hierzu nutzt man verallgemeinerte Thetareihen (siehe [24], III, Paragraph 3).

1.4 Frickeinvolutionen und Fourierentwicklungen

Wir stellen in diesem Abschnitt einige Aussagen über die Frickeinvolution zusammen, die wir in einem späteren Kapitel brauchen werden. Wir beginnen zunächst mit der Theorie für $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Die Frickeinvolution

$$\begin{aligned} w_N^{\mathrm{Fr}} : \mathbb{H}_1 &\to \mathbb{H}_1 \\ \tau &\mapsto \frac{-1}{N\tau} \end{aligned}$$

ist ein Automorphismus der oberen Halbebene. Sie kann durch die Operation der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{H}_1$ repräsentiert werden. Ist f eine Modulform geraden Gewichts zur Modulgruppe $\Gamma_0^{(1)}(N)$, so operiert w_N^{Fr}, genau wie

$$w_N^{\mathrm{fr}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{N}} w_N^{\mathrm{Fr}},$$

auf f durch:

$$\left(f|_k w_N^{\mathrm{Fr}}\right)(\tau) \quad = \quad (-N)^{-\frac{k}{2}} \tau^{-k} f\left(\frac{-1}{N\tau}\right).$$

Da

$$w_N^{\mathrm{Fr}}\, \Gamma_0^{(1)}(N)\, (w_N^{\mathrm{Fr}})^{-1} \quad = \quad \Gamma_0^{(1)}(N)$$

ist, liefern die Abbildung

$$\begin{aligned} w_N^{\mathrm{Fr}} : M_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N)) &\to M_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N)), \\ f &\mapsto f|_k w_N^{\mathrm{Fr}} \end{aligned}$$

und deren Einschränkung

$$w_N^{\mathrm{Fr}} : S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N)) \quad \to \quad S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N))$$

jeweils Vektorraumautomorphismen (siehe hierzu [61], Proposition 2.4). Sei die Fourierentwicklung von $f \in M_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N))$ um die Spitze $'0'$ vorgegeben, also

$$\left(f|_k \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\right)(\tau) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau/N}.$$

Es ist

$$\left(f|_k \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\right)(\tau) \quad = \quad \tau^{-k} f\left(\frac{-1}{\tau}\right),$$

also

$$\begin{aligned} \left(f|_k w_N^{\mathrm{Fr}}\right)(\tau) &= (-N)^{\frac{k}{2}} (N\tau)^{-k} f\left(\frac{-1}{N\tau}\right) \\ &= (-N)^{\frac{k}{2}} \left(f|_k \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\right)(N\tau). \end{aligned}$$

Die Fourierentwicklung von $\left(f|_k w_N^{\mathrm{Fr}}\right)(\tau)$ ist somit

$$\left(f|_k w_N^{\mathrm{Fr}}\right)(\tau) \quad = \quad (-N)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}.$$

Betrachten wir nun die Theorie für höhere Dimensionen. Wir führen die beiden Bezeichnungen

$$w_{n,N}^{\mathrm{fr}} \quad = \quad \begin{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{N}} E_n \\ -\sqrt{N} E_n & \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{MAT}(2n, \mathbb{R})$$

und

$$w_{n,N}^{\mathrm{Fr}} = \sqrt{N} w_{n,N}^{\mathrm{fr}} \quad = \quad \begin{pmatrix} & E_n \\ -N E_n & \end{pmatrix}.$$

ein. Durch die Operation von $w_{n,N}^{\mathrm{fr}}$ auf $\mathbb{H}_n$ wird ein Automorphismus des Siegelschen Halbraums

$$\begin{aligned} w_{n,N}^{\mathrm{fr}} : \mathbb{H}_n &\rightarrow \mathbb{H}_n \\ Z &\mapsto w_{n,N}^{\mathrm{fr}} \langle Z \rangle \ = \ -(NZ)^{-1} \end{aligned}$$

definiert, den wir hier ebenfalls mit $w_{n,N}^{\mathrm{fr}}$ bezeichnen wollen. Sei $A \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ eine projektiv rationale Matrix, also eine Matrix für die es eine reelle Zahl t so gibt, dass tA eine rationale Matrix ist. Durch die Abbildung

$$\begin{aligned} A : M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N)) &\rightarrow M_n^k(A^{-1}\Gamma_0^{(n)}(N)A) \\ f &\mapsto f|_k A \end{aligned}$$

und deren Einschränkung

$$A : S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N)) \quad \rightarrow \quad S_n^k(A^{-1}\Gamma_0^{(n)}(N)A)$$

werden dann Isomorphismen von $\mathbb{C}$-Vektorräumen gegeben. Einen Beweis hiervon findet man in [24], Bemerkung 6.8, p. 127 *f.* Wegen

$$(w_{n,N}^{\mathrm{fr}})^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} w_{n,N}^{\mathrm{fr}} \quad = \quad \begin{pmatrix} D & -\frac{C}{N} \\ -NB & A \end{pmatrix}$$

ist

$$(w_{n,N}^{\mathrm{fr}})^{-1} \Gamma_0^{(n)}(N) w_{n,N}^{\mathrm{fr}} \quad = \quad \Gamma_0^{(n)}(N),$$

und somit definiert

$$f \mapsto f|_k w_{n,N}^{\mathrm{fr}} = \det(-\sqrt{N} Z)^{-k} f(-(NZ)^{-1}) \tag{1.11}$$

Vektorraumautomorphismen von $M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ und $S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$. Ist die Fourierentwicklung von $(f|_k J_n)(Z) \in M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ mit

$$J_n = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix},$$

vorgegeben,

$$(f|_k J_n)(Z) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{\mathbb{Z}}{2}\right) \\ T \geq 0,\ t_{jj} \in \mathbb{Z}}} a_T e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} \mathrm{tr}(TZ)},$$

so ergibt sich daraus auch die Fourierentwicklung von

$$\begin{aligned} (f|_k w_{n,N}^{\mathrm{fr}})(Z) &= \det(-\sqrt{N} E_n)^{-k} f(-(NZ)^{-1}) \\ &= (-\sqrt{N})^{nk} \det(NZ)^{-k} f(-(NZ)^{-1}) \\ &= (-\sqrt{N})^{nk} \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{\mathbb{Z}}{2}\right), \\ T \geq 0,\ t_{jj} \in \mathbb{Z}}} a_T e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{tr}(TZ)}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Sei nun mit S_i, $1 \leq i \leq n$ die Matrix

$$S_i = \begin{pmatrix} E_{n-i} & & & \\ & & & E_i \\ & & E_{n-i} & \\ & -E_i & & \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Sei weiter $g = f|_k w_{n,N}^{\mathrm{fr}}$ das Bild einer Modulform zur Untergruppe $\Gamma_0^{(n)}(N)$ unter der Frickeinvolution, also selbst auch wieder eine Modulform zu $\Gamma_0^{(n)}(N)$, und die Fourierentwicklungen von $(g|_k S_i)(Z)$, $0 \leq i \leq n$ vorgegeben,

$$(g|_k S_i)(Z) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right), \\ T \geq 0,\ N t_{jj} \in Z}} a_T^{(i)} e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{tr}(TZ)}, \text{ falls } i > 0,$$

$$g(Z) = (g|_k S_0)(Z) = \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2}\mathbb{Z}\right), \\ T \geq 0,\ t_{jj} \in \mathbb{Z}}} a_T^{(0)} e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{tr}(TZ)}.$$

Bezeichnen wir weiter:

$$K_i = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{MAT}(i, \mathbb{Z}),$$

$$\begin{aligned}
T_n &= \begin{pmatrix} K_n & \\ & K_n \end{pmatrix}, \\
T'_{n,i} &= \begin{pmatrix} & -K_i & & \\ K_{n-i} & & & \\ & & & -K_i \\ & & K_{n-i} & \end{pmatrix}, \\
X &= \begin{pmatrix} \sqrt{N}E_i & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{N}}E_{n-i} & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{N}}E_i & \\ & & & \sqrt{N}E_{n-i} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$S_{n-i} = T'_{n,i} w_{n,N}^{\mathrm{fr}} S_i T_n X,$$

und da $T'_{n,i} \in \Gamma_0^{(n)}(N)$ ist, auch

$$\begin{aligned}
f|_k S_{n-i} &= f|_k T'_{n,i} w_{n,N}^{\mathrm{fr}} S_i T_n X \\
&= f|_k w_{n,N}^{\mathrm{fr}} S_i T_n X \\
&= (g|_k S_i)|_k T_n X
\end{aligned}$$

mit

$$T_n X = \begin{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{N}}K_{n-i} & & \\ \sqrt{N}K_i & & & \\ & & & \sqrt{N}K_{n-i} \\ & & \frac{1}{\sqrt{N}}K_i & \end{pmatrix}.$$

Im Fall $i \neq 0$ folgt dann für die Fourierentwicklung von $(f|_k S_{n-i})(Z)$:

$$\begin{aligned}
& (f|_k S_{n-i})(Z) \\
=\; & ((g|_k S_i)|_k T_n X)(Z) \\
=\; & \det \begin{pmatrix} & \sqrt{N}K_{n-i} \\ \frac{1}{\sqrt{N}}K_i & \end{pmatrix}^{-k} (g|_k S_i)\left(\begin{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{N}}K_{n-i} \\ \sqrt{N}K_i & \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} & \sqrt{N}K_i \\ \frac{1}{\sqrt{N}}K_{n-i} & \end{pmatrix}\right) \\
=\; & \left((-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{\frac{n}{2}-i}\right)^{-k} \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right), \\ T \geq 0,\ Nt_{jj} \in \mathbb{Z}}} a_T^{(i)} e^{2\pi \mathrm{itr}(\tilde{T}Z)} \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} & \sqrt{N}K_i \\ \frac{1}{\sqrt{N}}K_{n-i} & \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{N}}K_{n-i} \\ \sqrt{N}K_i & \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diejenigen T, über die die Summe in (1.13) läuft als

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{cases} T_{11} \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n-i, \mathbb{Z}), \\ T_{12} = T_{21}^t,\, T_{22} \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(i, \frac{\mathbb{Z}}{N}) \end{cases}$$

dann ist

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} NK_I T_{22} K_i & K_i T_{21} K_{n-i} \\ K_{n-i} T_{12} K_i & \frac{1}{N} K_{n-i} T_{11} K_{n-i} \end{pmatrix}.$$

Da bei Summation über ganze Matrizen $(f|_k S_{n-i})(Z)$ eine Fourierentwicklung in Termen von $e^{\pi \mathrm{i}/N}$ und nicht in Termen von $e^{\pi \mathrm{i}/N^2}$ besitzt (siehe (1.5)), folgt dass T_{11} Einträge aus $N\mathbb{Z}$ besitzt. Für die potenziellen Träger $\mathrm{Supp}(g|_k S_i)$ und $\mathrm{Supp}(f|_k S_{n-i})$ folgt:

$$\mathrm{Supp}(g|_k S_i) = \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right) \middle| \begin{array}{l} T \geq 0; \text{ der obere, linke} \\ i \times i\text{-Block von } T \text{ ist aus } \mathbb{Z}; \\ Nt_{jj} \in \mathbb{Z} \text{ falls } 1 \leq j \leq i \text{ und} \\ t_{jj} \in \mathbb{Z} \text{ falls } i < j \leq n \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{Supp}(f|_k S_{n-i}) = \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right) \middle| \begin{array}{l} T \geq 0; \text{ der obere, linke} \\ n-i \times n-i\text{-Block von } T \text{ ist} \\ \text{aus } \mathbb{Z};\ Nt_{jj} \in \mathbb{Z} \text{ falls } 1 \leq \\ j \leq n-i \text{ und } t_{jj} \in \mathbb{Z} \text{ falls} \\ n-i < j \leq n \end{array} \right\}.$$

Ist nun $i = 0$, so gilt für die Fourierentwicklung von $(f|_k S_n)(Z)$:

$$\begin{aligned} (f|_k S_n)(Z) &= ((g|_k S_0)|_k T_n X)(Z) \\ &= \det(\sqrt{N} K_n)^{-k} \, (g|_k S_0) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} K_n Z \frac{1}{\sqrt{N}} K_n \right) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}k} N^{-\frac{nk}{2}} \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right), \\ T \geq 0,\, t_{jj} \in \mathbb{Z}}} a_{NT}^{(0)} e^{2\pi \mathrm{i} \operatorname{tr}(K_n T K_n Z)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Bemerkung 1.19

i) Mit Hilfe der Formel (1.12) können wir aus der Fourierentwicklung von $(f|_k J_n)(Z)$ die Fourierentwicklung von $(f|_k w_{n,N}^{\mathrm{fr}})(Z)$ angeben. Mit Hilfe von (1.14) lässt sich umgekehrt aus der Fourierentwicklung von $(g|_k S_0)(Z) = (f|_k w_{n,N}^{\mathrm{fr}})(Z)$ die Fourierentwicklung von $(f|_k J_n)(Z) = (f|_k S_n)(Z)$ angeben. Nutzt man beide Formeln und bestimmt für $(f|_k J_n)(Z)$ eine Fourierentwicklung in Abhängigkeit der Fourierentwicklung von $(f|_k J_n)(Z)$, also von sich selbst, dann folgt durch einen Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}k} N^{-\frac{nk}{2}} (-\sqrt{N})^{nk} a_T &= a_{K_n T K_n} \\ \Leftrightarrow (-1)^{\frac{nk}{2}(n+1)} a_T &= a_{K_n T K_n}. \end{aligned}$$

Weiter ist (siehe hierzu auch [24] Hilfssatz 3.4)

$$a_{K_nTK_n} \quad = \quad \det(K_n)^k a_T.$$

Falls nk ungerade ist gibt es keine Modulformen mit trivialem Charakter Ist k gerade oder $n \equiv 0 (\bmod 4)$, so ist $(-1)^{\frac{nk}{2}(n+1)} = 1$ und $a_T = a_{K_nTK_n}$. Ist k ungerade und $n \equiv 2 \pmod 4$, dann ist $a_{K_nTK_n} = -a_T$. Die beiden Fourierentwicklungen für $(f|_k J_n)(Z)$ stimmen also wie erwartet überein.

ii) Stimmen die $SL(n, \mathbb{Z})$–Äquivalenzklassen von T und K_nTK_n überein, wie dies zum Beispiel für Diagonalmatrizen der Fall ist, dann müssen die beiden Fourierkoeffizienten a_T und $a_{K_nTK_n}$ gleich sein. Da im Fall k ungerade und $n \equiv 2 \pmod 4$ aber auch $a_{K_nTK_n} = -a_T$ gilt folgt für diesen Fall $a_T = a_{K_nTK_n} = 0$.

iii) Der Träger einer Modulform lässt sich auch mittels (1.3) einfacher darstellen als dies hier getan wurde. In einem späteren Kapitel werden wir aber noch sowohl die Form, in der die Elemente des Trägers angegeben sind, als auch die explizite Darstellung der Fourierkoeffizienten ausnutzen.

□

Zusammenfassend gilt:

Lemma 1.20
Ist g das Bild einer Modulform $f \in M_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ unter der Frickeinvolution, dann hat die Fourierentwicklung von $(g|_k S_i)(Z)$ die Form

$$\begin{aligned}
(g|_k S_0)(Z) \quad &= \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2\mathbb{Z}}\right), \\ T \geq 0,\ t_{jj} \in \mathbb{Z}}} a_T^{(0)} e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{tr}(TZ)}, \\
(g|_k S_i)(Z) \quad &= \sum_{T \in \mathrm{Supp}(g|_k S_i)} a_T^{(i)} e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{tr}(TZ)}, \ \textit{falls } i > 0.
\end{aligned}$$

mit potenziellem Träger

$$\mathrm{Supp}(g|_k S_i) \quad = \quad \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right) \,\middle|\, \begin{array}{l} T \geq 0, \textit{ Der obere, linke} \\ n-i \times n-i\textit{-Block von } 2T \textit{ ist} \\ \textit{aus } \mathbb{Z}.\ Nt_{jj} \in \mathbb{Z} \textit{ falls} \\ 1 \leq j \leq n-i,\ t_{jj} \in \mathbb{Z} \textit{ falls} \\ n-i < j \leq n \end{array} \right\}.$$

Mit obigen Bezeichnungen gilt für $i \neq 0$:

$$(f|_k S_{n-i})(Z)$$

$$= \left((-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{\frac{n}{2}-i}\right)^{-k} \sum_{\substack{T\in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n,\frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right)\\ T\geq 0,\ Nt_{jj}\in\mathbb{Z}}} a_T^{(i)} e^{2\pi i \mathrm{tr}\left(\left(\begin{smallmatrix} & \sqrt{N}K_i \\ \frac{1}{\sqrt{N}}K_{n-i} & \end{smallmatrix}\right) T \left(\begin{smallmatrix} & \frac{1}{\sqrt{N}}K_{n-i} \\ \sqrt{N}K_i & \end{smallmatrix}\right) Z\right)}$$

$$= \left((-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{\frac{n}{2}-i}\right)^{-k} \sum_{T\in \mathrm{Supp}(f|S_{n-i})} a_{\tilde{T}}^{(i)} e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}$$

mit

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} & \sqrt{N}K_{n-i} \\ \frac{1}{\sqrt{N}}K_i & \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{N}}K_i \\ \sqrt{N}K_{n-i} & \end{pmatrix}$$

und potenziellem Träger

$$\mathrm{Supp}(f|_k S_{n-i}) = \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right) \,\middle|\, \begin{array}{l} T \geq 0, \text{ der obere, linke} \\ i\times i\text{-Block von } 2T \text{ ist aus } \mathbb{Z}. \\ Nt_{jj} \in \mathbb{Z} \text{ falls } 1 \leq j \leq i, \\ t_{jj} \in \mathbb{Z} \text{ falls } i < j \leq n \end{array} \right\}.$$

Im Falle $i = 0$ ist:

$$\begin{aligned} (f|_k S_n)(Z) &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}k} N^{-\frac{nk}{2}} \sum_{\substack{T\in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n,\frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right),\\ T\geq 0,\ Nt_{jj}\in\mathbb{Z}}} a_T^{(0)} e^{2\pi i \mathrm{tr}(K_n T K_n Z)} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{-\frac{nk}{2}} \sum_{T\in \mathrm{Supp}(f|_k S_n)} a_{\tilde{T}}^{(0)} e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)} \end{aligned}$$

mit $\tilde{T} = NK_nTK_n$ und potenziellem Träger

$$\mathrm{Supp}(f|_k S_n) = \left\{ \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right) \,\middle|\, T \geq 0,\ Nt_{jj} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\square$

Bemerkung 1.21
Im obigen Lemma ist

$$\mathrm{Supp}(f|_k S_0) = \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2}\mathbb{Z}\right) \,\middle|\, T > 0, t_{jj} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\square$

Kapitel 2

Der Fall der Untergruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$

2.1 $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$

In diesem Abschnitt sollen explizit Repräsentantensysteme für die Klassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ bestimmt werden (Satz 2.7). Dabei soll insbesondere nicht angenommen werden, dass N quadratfrei ist. Die Aussage von Satz 2.7 kann auch mit gleichem Beweis auf Zahlkörper verallgemeinert werden. Siehe hierzu Bemerkung 2.13. Wir wollen uns hier dennoch auf $\mathbb{Z}$ beschränken, da die Verallgemeinerung offensichtlich ist und wir uns die zusätzlichen Notationen sparen wollen.
Als Motivation für den nicht quadratfreien Fall betrachten wir zunächst nur den quadratfreien Fall. Hierbei genügt es, sich auf den Fall zu beschränken, in dem $N = p$ eine Primzahl ist.

Mit Hilfe der Bruhat-Zerlegung, siehe zum Beispiel [33] Theorem I.8, p. 228*ff*, [67], §1.2 oder [30] X, 28, kann man die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p)$ als disjunkte Vereinigung von Doppelnebenklassen wie folgt darstellen:

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p) \quad = \quad \dot{\bigcup_{w\in W_{\mathrm{Sp}}}} \mathcal{B}w\mathcal{B}. \tag{2.1}$$

Hierbei bezeichne W_{Sp} eine Menge von Weylelementen von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p)$ und $\mathcal{B}$ die Standardboreluntergruppe (minimal parabolische Untergruppe) von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p)$. Da $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p)$ eine Liesche Gruppe vom Typ C_n ist, gilt für die Mächtigkeit der Weylgruppe

$$|W_{\mathrm{Sp}}| \quad = \quad n!2^n,$$

siehe zum Beispiel [38], Appendix C, p. 510. Bezeichne $\mathcal{N}_p$ das unipotente Radikal von $\mathcal{B}$, so ist

$$\mathcal{N}_p \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in \mathrm{MAT}_{\triangle}(n,\mathbb{F}_p),\ B \in \mathrm{MAT}(n,\mathbb{F}_p), \\ D \in \mathrm{MAT}^{\triangle}(n,\mathbb{F}_p), \text{ Die Diagonal-} \\ \text{einträge von } A \text{ und } D \text{ sind } 1 \end{array} \right\}$$

und

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F}_p) \quad = \quad \dot{\bigcup_{w \in W_{\mathrm{Sp}}}} \mathcal{B} w \mathcal{N}_p.$$

Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ ist durch

$$A \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} A & \\ & (A^t)^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

in $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F}_p)$ eingebettet. Als Repräsentanten für die Weylelemente der Weylgruppe W_{GL} von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ können die Permutationsmatrizen gewählt werden. Die Mächtigkeit von W_{GL} ist somit $n!$. Aufgrund von (2.2) kann W_{GL} als Untergruppe von W_{Sp} aufgefasst werden. Bezeichnen wir mit W die Faktorgruppe von W_{Sp} modulo W_{GL},

$$W \quad = \quad W_{\mathrm{GL}} \backslash W_{\mathrm{Sp}}, \tag{2.3}$$

dann ist $|W| = 2^n$, und wir erhalten eine Zerlegung

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F}_p) \quad = \quad \dot{\bigcup_{w \in W}} \Delta(n, \mathbb{F}_p) w \mathcal{N}_p. \tag{2.4}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(n)}(p) \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) \quad &= \quad \left(\Gamma^{(n)}(p) \backslash \Gamma_0^{(n)}(p)\right) \Big\backslash \left(\Gamma^{(n)}(p) \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})\right) \\ &= \quad \Delta(n, \mathbb{F}_p) \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{F}_p). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Das zweite Gleichheitszeichen in (2.5) beschreibt hierbei, um etwas genauer zu sein, lediglich eine natürliche Bijektion zwischen den beiden Restklassenmengen. Wir erhalten mit Hilfe von (2.4)

$$\Delta(n, \mathbb{F}_p) \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{F}_p) \quad = \quad \dot{\bigcup_{w \in W}} w \mathcal{N}_p^w,$$

als disjunkte Vereinigung. Dabei ist

$$\mathcal{N}_p^w \quad = \quad (\mathcal{N}_p \cap w^{-1} \Delta(n, \mathbb{F}_p) w) \backslash \mathcal{N}_p.$$

Hiermit sei noch einmal an die Notation $\mathbb{Z}_{[p]} = \{0, \ldots, p-1\} \subset \mathbb{Z}$, die auf Seite xi eingeführt wurde, erinnert. Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{N}^w$ eine Teilmenge aus

$$\mathcal{N} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in \mathrm{MAT}_{\triangle}(n, \mathbb{Z}_{[p]}),\ B \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}_{[p]}), \\ D \in \mathrm{MAT}^{\triangle}(n, \mathbb{Z}_{[p]}),\ \text{Die Diagonal-} \\ \text{einträge von } A \text{ und } D \text{ sind } 1 \end{array} \right\},$$

die unter der natürlichen Abbildung

$$\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}_p$$

als Repräsentantensystem von $\mathcal{N}_p^w$ aufgefasst werden kann. Es gilt dann

$$\Gamma_0^{(n)}(p)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) = \dot{\bigcup_{w\in W}} w\mathcal{N}^w.$$

Weiter bezeichnen bezeichnen wir mit $D^{(n)}$ die Menge

$$D^{(n)} = \{\mathrm{Diag}(x) \mid x \in \{0,1\}^n\}.$$

Es gelten für alle $I \in D^{(n)}$ die Rechenregeln

$$\begin{aligned} I^2 &= I \\ (E_n - I)^2 &= E_n - I \text{ und} \\ (I - E_n)^2 &= -(I - E_n), \end{aligned}$$

so dass (1.1) und eine kleine Rechnung sofort zeigen, dass die Menge

$$W^{(n)} = \left\{ w(I) = \begin{pmatrix} I & E_n - I \\ I - E_n & I \end{pmatrix} \middle| I \in D^{(n)} \right\}$$

aus symplektischen Matrizen besteht. In der folgenden Proposition werden wir ein Repräsentantensystem für $\Gamma_0^{(n)}(p)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ angeben, indem wir zeigen dass $W^{(n)}$ ein Vertretersystem für $W_{\mathrm{GL}}\backslash W_{\mathrm{Sp}}$ ist.

Proposition 2.1
Ist p eine Primzahl, so ist mit den obigen Notationen ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_0^{(n)}(p)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ durch die Menge

$$\dot{\bigcup_{w(I)\in W^{(n)}}} w(I)\mathcal{N}^{w(I)}$$

gegeben.

Beweis:
Es muss hierfür nur gezeigt werden, dass $W^{(n)}$ ein Repräsentantensystem von $W_{\mathrm{GL}}\backslash W_{\mathrm{Sp}}$ ist. Zunächst zeigen wir, dass die Elemente aus $W^{(n)}$ Repräsentanten von Elementen aus W_{Sp} sind. Bezeichnen wir mit T den maximalen Torus von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p)$ also die Menge aller Elemente aus $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p)$ die Diagonalgestalt haben und mit $N_{\mathrm{Sp}}(T)$ den Normalisator, sowie mit $C_{\mathrm{Sp}}(T)$ den Zentralisator von T in $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{F}_p)$, dann ist

$$W_{\mathrm{Sp}} = N_{\mathrm{Sp}}(T)/C_{\mathrm{Sp}}(T).$$

Sind

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \\ & D_2 \end{pmatrix} \in T$$

und $w(I) \in W^{(n)}$, dann ist

$$\begin{aligned} & w(I)Dw(I)^{-1} \\ = & \begin{pmatrix} ID_1I + (E-I)D_2(E-I) & ID_1(I-E) + (E-I)D_2I \\ (I-E)D_1I + ID_2(E-I) & ID_2I + (I-E)D_1(I-E) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sowohl die beiden Matrizen D_1 und D_2 als auch die Matrizen I, $E-I$ und $I-E$ sind Diagonalmatrizen. Also sind die vier $n \times n$-Blockmatrizen die in den Ecken von $w(I)Dw(I)^{-1}$ stehen auch Diagonalmatrizen. Die $n \times n$-Blockmatrizen im oberen rechten und im unteren linken Eck sind Null, da jeder Diagonaleintrag aus $ID_1(I-E)$, $(E-I)D_2I$, $(I-E)D_1I$ und $ID_2(E-I)$ entweder von links oder aber von rechts mit Null multipliziert wird. Also ist $w(I)Dw(I)^{-1}$ eine Diagonalmatrix und somit ein Element des maximalen Torus T von $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F}_p)$. Damit ist $w(I)$ ein Repräsentant eines Elementes aus W_{Sp}. Insbesondere sieht man dass zwei Elemente $w(I_1)$ und $w(I_2)$ nicht dasselbe Element aus W_{Sp} repräsentieren können, da die Gleichung

$$I_1D_1I_1 + (E-I_1)D_2(E-I_1) = I_2D_1I_2 + (E-I_2)D_2(E-I_2)$$

nur dann für alle Diagonalmatrizen $D_1, D_2 \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{F}_p)$ erfüllt sein kann, wenn $I_1 = I_2$ ist. Um zu zeigen dass $w(I_1)$ und $w(I_2)$ auch unterschiedliche Elemente von $W_{\mathrm{GL}} \backslash W_{\mathrm{Sp}}$ repräsentieren sei $w \in W_{\mathrm{GL}}$, $w \neq E_{2n}$. Es gibt dann eine Permutationsmatrix $P \neq E_n$ so dass

$$w = \begin{pmatrix} P & \\ & P^t \end{pmatrix}$$

ist. Aus

$$w(I_1) = ww(I_2) = \begin{pmatrix} PI_2 & P(E-I_2) \\ P^t(I_2-E) & P^tI_2 \end{pmatrix}$$

folgt nun $I_1 = PI_2$. Da P nicht die Einheitsmatrix ist, ist dies nur möglich, wenn $I_1 = I_2$ und somit auch $w(I_1) = w(I_2)$ gilt. Also enthält die Menge $W^{(n)}$ nur unterschiedliche Repräsentanten von $W_{\mathrm{GL}} \backslash W_{\mathrm{Sp}}$. Die Menge $W^{(n)}$ enthält 2^n Elemente. Die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{F}_p)$ ist eine Liegruppe vom Typ C_n. Ihre Weylgruppe W_{Sp} hat also $n!2^n$ Elemente. Die Mächtigkeit von W_{GL} ist $n!$. Also ist $|W_{\mathrm{GL}} \backslash W_{\mathrm{Sp}}| = 2^n$ und somit ist $W^{(n)}$ ein Repräsentantensystem von $W_{\mathrm{GL}} \backslash W_{\mathrm{Sp}}$.

□

Da Proposition 2.1, die später durch Satz 2.7 verallgemeinert wird, unser weiteres Vorgehen motiviert, wollen wir nun die angegebenen Repräsentantensysteme genauer untersuchen und berechnen zunächst

$$|\mathcal{N}^{w(I)}| \;=\; \frac{|\mathcal{N}|}{|\mathcal{N}\cap w(I)^{-1}\Delta(n,\mathbb{Z})w(I)|}.$$

Da $\mathcal{N}\subset\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ ist, ist für jedes Element aus $\mathcal{N}$ der obere rechte $n\times n$ Block symmetrisch und der untere rechte $n\times n$ Block eindeutig durch den oberen linken $n\times n$ Block bestimmt. Also ist

$$|\mathcal{N}| \;=\; p^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}} \;=\; p^{n^2}.$$

Da weiter

$$|\mathcal{N}\cap w(I)^{-1}\Delta(n,\mathbb{Z})w(I)| \;=\; |w(I)\mathcal{N}w(I)^{-1}\cap\Delta(n,\mathbb{Z})|$$

ist, bestimmen wir zunächst den linken unteren $n\times n$ Block von $w(I)\mathcal{N}w(I)^{-1}$. Sei dazu

$$w(I)\in W^{(n)} \quad \text{und} \quad m=\begin{pmatrix} u & g\\ 0 & o\end{pmatrix}\in\mathcal{N}.$$

Für geeignete Einträge $\star$ gilt dann:

$$w(I)mw(I)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \star & \star\\ (I-E_n)uI+(I-E_n)g(E_n-I)+Io(E_n-I) & \star\end{pmatrix}.$$

Untersuchen wir nun einzeln die drei Summanden im unteren linken $n\times n$ Block von $w(I)mw(I)^{-1}$.
Da $m\in\mathcal{N}$ ist, ist die Matrix u eine untere linke Dreiecksmatrix. Multipliziert man u von rechts mit I, haben alle Spalten s_i von uI Einträge gleich Null, bei denen in I am i-ten Diagonalelement eine Null steht. Alle anderen Einträge sind die gleichen wie in u. Durch Multiplikation von links mit $(I-E_n)$ werden nun alle Zeilen z_i von uI zu Null, für die am i-ten Diagonalelement von I eine Eins steht. Alle anderen Einträge werden mit -1 multipliziert. Insbesondere sind alle Diagonaleinträge von $(I-E_n)uI$ gleich Null. Analog können wir für $Io(E_n-I)$ vorgehen. Hier erhält man, da o obere rechte Dreiecksmatrix ist, nur Einträge ungleich Null, die oberhalb der Diagonale stehen. Deshalb haben $Io(E_n-I)$ und $(I-E_n)uI$ keinen Eintrag ungleich Null an derselben Stelle. $(I-E_n)g(E_n-I)$ erhält man aus g, indem man alle Einträge von Zeilen z_i und Spalten s_i von g mit Nullen auffüllt, für die am i-ten Diagonalelement von I eine Eins steht. Man sieht ebenfalls, dass es für sowohl $Io(E_n-I)$ und $(I-E_n)g(E_n-I)$, als auch für $(I-E_n)uI$ und $(I-E_n)g(E_n-I)$ keine gemeinsame Stelle gibt, an der ein Element steht, das ungleich Null ist. Dies wird deutlich, da in $Io(E_n-I)$ alle Zeilen Null sind, für die am i-ten Diagonalelement von I eine Null steht und für

$(I-E_n)g(E_n-I)$ sind alle Zeilen Null, für die am i-ten Diagonalelement von I eine Eins steht. Bei $(I-E_n)uI$ und $(I-E_n)g(E_n-I)$ betrachte man analog die Spalten.
Es gilt also:
Ist ein Eintrag im unteren linken $n\times n$ Block von $w(I)mw(I)^{-1}$ ungleich Null, so ist an dieser Stelle auch genau ein Eintrag der drei Summanden $(I-E_n)uI$, $(I-E_n)g(E_n-I)$ oder $Io(E_n-I)$ ungleich Null. Da m symplektisch ist, also $uo^t = E_n$ gilt, ist o durch u eindeutig bestimmt und es gilt:

$$Io(E_n-I) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad (I-E_n)uI \;=\; 0.$$

Es folgt:

$$|\mathcal{N}\cap w(I)^{-1}\Delta(n,\mathbb{Z})w(I)| \;=\; \frac{p^{n^2}}{|G(I)||\tilde{U}(I)|}$$

mit

$$G(I) \;=\; \{(I-E_n)g(E_n-I)|\ g\in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Z}_{[p]})\}$$

und

$$\tilde{U}(I) \;=\; \left\{(I-E_n)uI \mid u\in \mathrm{MAT}^{\triangle}(n,\mathbb{Z}_{[p]}) \text{ mit Diagonaleinträgen } 1\right\}.$$

Da $G(I)$ aus symmetrischen Matrizen besteht, ist:

$$|G(I)| \;=\; p^{\frac{(n-e_I)(n-e_I+1)}{2}}$$

mit

$$e_I \;=\; \mathrm{rg}(I). \tag{2.6}$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{rg}(I)$ den Rang von I. Des weiteren ist

$$|\tilde{U}(I)| \;=\; p^{t_I}$$

mit

$$t_I \;=\; \sum_{\substack{i=1\\ I_{ii}=1}}^{n-1} \sharp\{I_{jj}=0|\ i<j\leq n\}, \tag{2.7}$$

$$t_{0_n} \;=\; 0. \tag{2.8}$$

Im Gegensatz zur Übereinkunft Matrixeinträge mit Kleinbuchstaben zu bezeichnen, seien hierbei und im Folgenden I_{ii}, $i\in\{1,\ldots,n\}$ die Diagonalelemente von

I. Einige spezielle Werte für t_I finden sich in Tabelle 2.1 auf Seite 43. Insgesamt erhalten wir nun also:

$$\begin{aligned}|\mathcal{N}^w(I)| &= \frac{|\mathcal{N}|}{|\mathcal{N}\cap w(I)^{-1}\Delta(n,\mathbb{Z})w(I)|}\\ &= |G(I)||\tilde{U}(I)| \;=\; p^{t_I+\frac{(n-e_I)(n-e_I+1)}{2}}.\end{aligned}$$

Wir teilen die Repräsentanten nun in die Mengen $R_p^{(n)}(0),\dots,R_p^{(n)}(n)$ ein. Hierbei enthalte $R_p^{(n)}(i)$ alle diejenigen Repräsentanten aus

$$\bigcup_{w(I)\in W^{(n)}} w(I)\mathcal{N}^{w(I)},$$

für die der untere linke $n\times n$-Block den Rang i hat. Dies sind genau die Klassen $w(I)\mathcal{N}^{w(I)}$, für die I Rang $n-i$ hat, also

$$R_p^{(n)}(i) \;=\; \bigcup_{\substack{w(I)\in W^{(n)}\\ e_I=n-i}} w(I)\mathcal{N}^{w(I)}.$$

Setzen wir nun noch $r_p^{(n)}(i)=|R_p^{(n)}(i)|$, so liefert eine kleine Rechnung zum Beispiel:

$$r_p^{(1)}(0)=1,\qquad r_p^{(1)}(1)=p,$$

und

$$r_p^{(2)}(0)=1,\qquad r_p^{(2)}(1)=p+p^2,\qquad r_p^{(2)}(2)=p^3.$$

Lemma 2.2 (Pascalsches Dreieck)
Es gilt:

i) $r_p^{(n)}(n) \;=\; p^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

ii) $r_p^{(n)}(0) \;=\; 1$,

iii) $r_p^{(n)}(i) \;=\; p^i r_p^{(n-1)}(i-1)+p^i r_p^{(n-1)}(i)$, *falls* $0<i<n$.

Beweis:
Teil i) und ii) der Aussage erhält man sofort, da

$$r_p^{(n)}(n) \;=\; |R_p^{(n)}(n)| \;=\; |w(0_n)\mathcal{N}^{w(0_n)}| \;=\; p^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

und

$$r_p^{(n)}(0) \;=\; |R_p^{(n)}(0)| \;=\; |w(E_n)\mathcal{N}^{w(E_n)}| \;=\; \frac{|\mathcal{N}|}{|\mathcal{N}|} \;=\; 1$$

ist.
Für Teil iii) der Aussage sei $n > 2$, $w(I)\mathcal{N}^{w(I)} \subset R_p^{(n)}(i)$ und $I = \mathrm{Diag}(x_1, \dots, x_n)$. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$. Ist $x_1 = 0$, dann hat $I' = \mathrm{Diag}(x_2, \dots, x_n)$ genau $n - i = (n-1) - (i-1)$ Einsen als Einträge. Das zu I' gehörige $w(I') \in W^{(n-1)}$ liefert uns also eine Klasse $w(I')\mathcal{N}^{w(I')}$ aus $R_p^{(n-1)}(i-1)$. Da die erste Stelle in w eine Null ist, ist $t_I = t_{I'}$. Da die Anzahl der Einsen in I und I' übereinstimmen, folgt für e_I und $e_{I'}$ dass $e_I = e_{I'}$ ist. Also ist $|w(I)\mathcal{N}^w(I)| = p^i|w(I')\mathcal{N}^{w(I')}|$, denn

$$\begin{aligned} \frac{(n-e_I)(n-e_I+1)}{2} &= \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{(i-1)i}{2} + i \\ &= \frac{(n-1-e_{I'})(n-e_{I'})}{2} + i. \end{aligned}$$

Ist nun $x_1 = 1$, so geht mit denselben Notationen wie im obigen Fall I' aus I hervor, indem man bei I die erste Stelle, eine Eins, streicht. Diesmal ist $w(I')\mathcal{N}^{w(I')}$ eine Klasse aus $R_p^{(n-1)}(i)$. Für t_I und $t_{I'}$ ergibt sich nun $t_{I'} + i = t_I$. Wegen Streichens einer Eins ist $e_I = e_{I'} + 1$ und deshalb

$$\frac{(n-e_I)(n-e_I+1)}{2} = \frac{(n-1-e_{I'})(n-1-e_{I'}+1)}{2}.$$

Es gilt also auch hier

$$p^i|w(I')\mathcal{N}^{w(I')}| = |w(I)\mathcal{N}^w(I)|.$$

Insgesamt ist also

$$|R_p^{(n)}(i)| = p^i|R_p^{(n-1)}(i)| + p^i|R_p^{(n-1)}(i-1)|.$$

□

Bemerkung 2.3
Ist $q = p^\nu$ eine Primzahlpotenz und bezeichnet $\mathbb{F}_q$ den Körper mit q Elementen, so lassen sich die Gaußschen Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}_q &= \frac{(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\dots(q^k-q^{k-1})} \\ &= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q-1)} \end{aligned}$$

definieren. Dabei kann $\binom{n}{k}_q$ auch als Anzahl der k-dimensionalen Unterräume des n-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{F}_q^n$ interpretiert werden. Die Gaußschen Koeffizienten bilden ein q-Analogon zu den Binomialkoeffizienten. Unter anderem lässt *sich ein Analogon zum Pascalschen Dreieck herleiten*

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k\binom{n-1}{k}_q.$$

Diese und andere Tatsachen über Gaußsche Koeffizienten findet man in [3].
Mit Hilfe des obigen Lemmas 2.2 und Induktion nach n lässt sich nun leicht zeigen, dass

$$r_p^{(n)}(i) = p^{\frac{i(i-1)}{2}}\binom{n}{i}_p \tag{2.9}$$

gilt. Siehe Bemerkung 2.11 für den Beweis einer allgemeineren Formel.

□

Bemerkung 2.4
Für $I \in D^{(n)}$ seien

$$\begin{aligned} G(I) &= \{(I-E_n)g(E_n-I) \mid g \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Z}_{[p]})\} \text{ und} \\ U(I) &= \{(I-E_n)uI \mid u \in \mathrm{MAT}_{\triangle}(n,\mathbb{Z}_{[p]}) \text{ mit Diagonaleinträgen gleich Null}\}. \end{aligned}$$

Da

$$w(I)\mathcal{N}w(I)^{-1}\cap\Delta(n,\mathbb{Z}) \cong w(I)(\mathcal{N}\cap w(I)^{-1}\Delta(n,\mathbb{Z})w(I))w(I)^{-1}$$

und

$$(I-E_n)uI = -(Io(E_n-I))^t$$

sind, erhalten wir für $\Gamma_0^{(n)}(p)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ das folgende Repräsentantensystem:

$$\dot{\bigcup_{I\in D^{(n)}}}\left\{w(I)\begin{pmatrix} u+E_n & g \\ 0 & -u^t+E_n \end{pmatrix}\middle| u\in U(I),\ g\in G(I)\right\}.$$

Zu beachten ist hierbei, dass

$$(u^t+E_n)^{-1} = E_n-u^t$$

gilt, denn

$$(u^t+E_n)^{-1}(u^t+E_n) = E_n+(u^t)^2.$$

Da weiter $u \in U(I)$ ist, hat u eine Darstellung $(I-E_n)u'I$ und somit ist

$$\begin{aligned}(u^t)^2 &= I(u')^t(I-E_n)I(u')^t(I-E_n)\\ &= I(u')^t 0 (u')^t(I-E_n) \;=\; 0.\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.5
Bezeichnen wir mit $[w(I), G, U]$ die Menge

$$w(I)\begin{pmatrix} U+E_n & G \\ 0 & -U^t+E_n \end{pmatrix},$$

so erhält man zum Beispiel als Repräsentantensystem für $\Gamma_0^{(3)}(p)\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
&\left[w\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\\
\bigcup_{z,b,c\in\mathbb{Z}_{[p]}}&\left[w\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\b&c&0\end{pmatrix}\right]\\
\bigcup_{y,a\in\mathbb{Z}_{[p]}}&\left[w\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&y&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\\
\bigcup_{x\in\mathbb{Z}_{[p]}}&\left[w\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\\
\bigcup_{y,z,w,a,b\in\mathbb{Z}_{[p]}}&\left[w\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&y&w\\0&w&z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&0&0\end{pmatrix}\right]\\
\bigcup_{x,z,v,c\in\mathbb{Z}_{[p]}}&\left[w\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x&0&v\\0&0&0\\v&0&z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&c&0\end{pmatrix}\right]\\
\bigcup_{x,y,u\in\mathbb{Z}_{[p]}}&\left[w\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x&u&0\\u&y&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\\
\bigcup_{x,y,z,u,v,w\in\mathbb{Z}_{[p]}}&\left[w\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x&u&v\\u&y&w\\v&w&z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

□

Als nächstes wollen wir den Fall betrachten, in dem die Stufe N nicht mehr quadratfrei ist. Für den nicht quadratfreien Fall genügt es wegen (1.2) Primzahlpotenzen zu betrachten. Wir nehmen deshalb im Folgenden an, dass $N = p^\nu$ eine

Primzahlpotenz ist. Wir bestimmen im nächsten Beispiel Repräsentantensysteme für $n = 1$ und $n = 2$ und werden uns dann erst mit höheren Dimensionen beschäftigen.

Beispiel 2.6

i) Im Fall $n = 1$ kann man für

$$\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \quad = \quad \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

durch

$$R_{p^\nu}^{(1)}(0) \quad \cup \quad R_{p^\nu}^{(1)}(1)$$

mit

$$R_{p^\nu}^{(1)}(0) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \middle| \, h \in p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]} \right\}$$

und

$$R_{p^\nu}^{(1)}(1) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} \middle| \, d \in \mathbb{Z}_{[p^\nu]} \right\}$$

ein Repräsentantensystem angeben. Denn wie die folgenden Äquivalenzen zeigen

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \quad &= \quad \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h' & 1 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h-h' & 1 \end{pmatrix} \quad &= \quad \Gamma_0^{(1)}(p^\nu) \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} \quad &= \quad \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d' \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d-d' & 1 \end{pmatrix} \quad &= \quad \Gamma_0^{(1)}(p^\nu), \\
\Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \quad &= \quad \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\begin{pmatrix} d & -1 \\ hd+1 & -h \end{pmatrix} \quad &= \quad \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)
\end{aligned}$$

sind alle angegebenen Repräsentanten unabhängig. Beachte hierbei, dass h von p geteilt wird, und deshalb $hd+1 \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p^\nu)$ ist. Folglich ist

$$\sharp(R_{p^\nu}^{(1)}(0)) \quad = \quad p^{\nu-1}, \qquad \sharp(R_{p^\nu}^{(1)}(1)) \quad = \quad p^\nu$$

und somit ist mit (1.1)

$$\sharp(R_{p^\nu}^{(1)}(0)) + \sharp(R_{p^\nu}^{(1)}(1)) \;=\; p^\nu\left(1+\frac{1}{p}\right) \;=\; [\mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)].$$

Demnach ist $R_{p^\nu}^{(1)}(0) \cup R_{p^\nu}^{(1)}(1)$ *ein vollständiges Repräsentantensystem.*

ii) Für $n = 2$ *kann ein Repräsentantensystem für*

$$\Gamma_0^{(2)}(p^\nu)\backslash\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) \;=\; R_{p^\nu}^{(2)}(0) \cup R_{p^\nu}^{(2)}(1) \cup R_{p^\nu}^{(2)}(2)$$

angegeben werden, indem man

$$\begin{aligned}
R_{p^\nu}^{(2)}(0) &= w\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} E_2 & \\ h & E_2 \end{pmatrix}\middle|\, h \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(2, p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]})\right\},\\
R_{p^\nu}^{(2)}(1) &= w\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & o & g & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & h & -o & 1 \end{pmatrix}\middle|\, g \in \mathbb{Z}_{[p^\nu]};\ h, o \in p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]}\right\}\\
&\cup\ w\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ u & 1 & & g \\ h & & 1 & -u \\ & & & 1 \end{pmatrix}\middle|\, g, u \in \mathbb{Z}_{[p^\nu]};\ h \in p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]}\right\},\\
R_{p^\nu}^{(2)}(2) &= w\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} E_2 & g \\ & E_2 \end{pmatrix}\middle|\, g \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(2, \mathbb{Z}_{[p^\nu]})\right\}
\end{aligned}$$

setzt. Eine ähnliche Rechnung wie im Fall $n = 1$ *zeigt, dass je zwei Repräsentanten nicht zur selben Klasse gehören. Weiter ist*

$$\begin{aligned}
\sharp(R_{p^\nu}^{(2)}(0)) &= (p^{\nu-1})^3,\\
\sharp(R_{p^\nu}^{(2)}(1)) &= p^\nu(p^{\nu-1})^2 + (p^\nu)^2 p^{\nu-1} \quad \textit{und}\\
\sharp(R_{p^\nu}^{(2)}(2)) &= (p^\nu)^3,
\end{aligned}$$

also gilt mit (1.1)*:*

$$\begin{aligned}
\sharp(R_{p^\nu}^{(2)}(0)) + \sharp(R_{p^\nu}^{(2)}(1)) + \sharp(R_{p^\nu}^{(2)}(2)) &= (p^\nu)^3\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\\
&= [\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(2)}(p^\nu)]
\end{aligned}$$

und somit ist $R_{p^\nu}^{(2)}(0) \cup R_{p^\nu}^{(2)}(1) \cup R_{p^\nu}^{(2)}(2)$ *auch ein vollständiges Repräsentantensystem.*

□

Bevor wir im nächsten Satz für eine beliebige Dimension n ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ angeben, führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Repräsentantensysteme für ein allgemeines $N \in \mathbb{N}$ erhält man dann durch Liftung mit Hilfe des starken Approximationssatzes, und (1.2). Für $I \in D^{(n)}$ seien, allgemeiner als in Bemerkung 2.4:

$$\begin{aligned} G(I) &= \{(I-E_n)g(E_n-I)|\ g \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Z}_{[p^\nu]})\} \text{ und} \\ U(I) &= \left\{(I-E_n)uI \,\middle|\, \begin{array}{l} u \in \mathrm{MAT}_\triangle(n,\mathbb{Z}_{[p^\nu]}) \\ \text{mit Diagonaleinträgen gleich Null.} \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

Seien weiter:

$$\begin{aligned} H(I) &= \{IhI|\ h \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]})\}, \\ O(I) &= \left\{(I-E_n)oI \,\middle|\, \begin{array}{l} o \in \mathrm{MAT}^\triangle(n,p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]}) \\ \text{mit Diagonaleinträgen gleich Null.} \end{array}\right\}, \end{aligned}$$

und

$$N(I) = \left\{\begin{pmatrix} u+o+E_n & g \\ h & -u^t-o^t+E_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} u \in U(I),\ g \in G(I) \\ h \in H(I),\ o \in O(I) \end{array}\right\}.$$

Beachte, dass sich hier die Bedeutung von o in Bezug auf die Ausführungen nach Proposition 2.1 geändert hat. Analog zu Bemerkung 2.4 sieht man, dass

$$(u^t+o^t+E_n)^{-1} = E_n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(u^t+o^t)^i = -u^t-o^t+E_n$$

ist.

Satz 2.7
Mit den obigen Bezeichnungen ist ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ *durch die Menge*

$$\dot{\bigcup_{I\in D^{(n)}}} w(I)N(I)$$

gegeben.
Beweis:
Unter Ausnutzung von $gh=0$ für $g \in G(I)$, $h \in H(I)$, ist es leicht nachzuprüfen, dass die Elemente von $N(I)$ symplektische Matrizen sind. Wir werden wie in den obigen Beispielen vorgehen und zeigen, dass die angegebenen Repräsentanten alle zu unterschiedlichen Klassen gehören. Anschließend werden wir sie zählen und mit Hilfe von Formel (1.1) sehen, dass die Repräsentantensysteme vollständig sind.
Seien $I \in D^{(n)}$ und das dazugehörige

$$w(I) = \begin{pmatrix} I & E_n-I \\ I-E_n & I \end{pmatrix} \in W^{(n)}$$

vorgegeben. Sei weiter

$$m = \begin{pmatrix} u+o+E_n & g \\ h & -u^t-o^t+E_n \end{pmatrix} \in N(I).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & w(I)m \\ = & \begin{pmatrix} I(u+o)+I+(E_n-I)h & Ig+(E_n-I)(-u^t-o^t+E_n) \\ (I-E_n)(u+o)+(I-E_n)+Ih & (I-E_n)g+I(-u^t-o^t+E_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $u \in U(I)$, $o \in O(I)$, $h \in H(I)$ und $g \in G(I)$ sind, können wir u als $(I-E_n)u'I$, o als $(I-E_n)o'I$, h als $Ih'I$ und g als $(I-E_n)g'(E_n-I)$ schreiben. Deshalb und aufgrund der Beziehungen $I(E_n-I)=0$ und $(E_n-I)I=0$ sieht man, dass zum Beispiel der obere linke Eintrag von $w(I)m = I$ ist. Ähnlich zu dieser Argumentation lässt sich nun $w(I)m$ zu

$$\begin{pmatrix} I & E_n-I \\ X & Y \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} X &= -(I-E_n)(u'+o')I+(I-E_n)+Ih'I \\ Y &= -(I-E_n)g'(E_n-I)+I-I((u')^t+(o')^t)(I-E_n) \end{aligned}$$

umformen. Damit ist

$$\begin{aligned} & (w(I)m)^{-1} \\ = & \begin{pmatrix} -(E_n-I){g'}^t(I-E_n)+I-(I-E_n)(u'+o')I & -(E_n-I) \\ I({u'}^t+{o'}^t)(I-E_n)-(I-E_n)-I{h'}^tI & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seien nun $w(I_1)m_1$ und $w(I_2)m_2$ zwei Repräsentanten. Dann ist der linke untere Eintrag von $w(I_1)m_1(w(I_2)m_2)^{-1}$, wenn wir die Einträge von $w(I_i)$ und $m_i,\ i \in \{1,2\}$ entsprechend indizieren, gegeben als:

$$\begin{aligned} & (-(I_1-E_n)(u_1'+o_1')I_1+(I_1-E_n)+I_1h_1'I_1) \\ \cdot\ & (-(E_n-I_2){g_2'}^t(I_2-E_n)+I_2-(I_2-E_n)(u_2'+o_2')I_2) \\ +\ & (-(I_1-E_n)g_1'(E_n-I_1)+I_1-I_1((u_1')^t+{o_1'}^t)(I_1-E_n)) \\ \cdot\ & (I_2({u_2'}^t+{o_2'}^t)(I_2-E_n)-(I_2-E_n)-I_2{h_2'}^tI_2). \end{aligned}$$

Beschränken wir uns zunächst auf den Fall, in dem $I_1=I_2=I$ ist. Dann vereinfacht sich der obige Ausdruck zu:

$$\begin{aligned} & (E_n-I)({g_2'}^t-g_1')(I-E_n)+I(h_1'-{h_2'}^t)I \\ +\ & (I-E_n)((u_2'+o_2')-(u_1'+o_1'))I+I(({u_2'}^t+{o_2'}^t)-({u_1'}^t+{o_1'}^t))(I-E_n). \end{aligned}$$

Durch Betrachtung der jeweils linken beziehungsweise rechten Faktoren von je zwei dieser vier Summanden wird klar: Hat einer der Summanden an der ij-ten Stelle einen Eintrag, der von Null verschieden ist, so muss der andere Summand an der ij-ten Stelle als Eintrag eine Null haben. Der untere linke Block von $w(I_1)m_1(w(I_2)m_2)^{-1}$ ist also für $I_1 = I_2$ genau dann gleich Null, wenn ${g_2}^t = g_1$, $h_1 = {h_2}^t$ und $u_2 + o_2 = u_1 + o_1$ sind. Da für $i \in \{0,1\}$ die Matrizen g_i und h_i symmetrisch und u_i untere, o_i obere Dreiecksmatrizen mit Nullen auf der Diagonalen sind, sind für $I \in D^{(n)}$ die beiden Repräsentanten $w(I)m_1$ und $w(I)m_2$ genau dann gleich, wenn $m_1 = m_2$ ist. Die angegebenen Repräsentanten in der Menge $w(I)N(I)$ gehören also zu unterschiedlichen Klassen.
Nehmen wir nun an, dass I_1 und I_2 unterschiedlich sind. Sie unterscheiden sich also an mindestens einer Stelle, die auf der Diagonalen liegen muss, zum Beispiel an der Stelle ii. Wir unterscheiden die beiden Fälle

i) $I_{1ii} = 1$ und $I_{2ii} = 0$,

ii) $I_{1ii} = 0$ und $I_{2ii} = 1$,

von denen es aufgrund der Symmetrie des Problems genügt den ersten zu betrachten. In diesem können wir dann in der oben angegebenen Darstellung für den linken unteren Block von $w(I_1)m_1(w(I_2)m_2)^{-1}$ alle Summanden streichen, die an der ii-ten Stelle keinen Beitrag zur Summe liefern. Dies sind wenigstens diejenigen Summanden, die zum einen von rechts mit I_2, oder zum anderen von links mit $I_1 - E_n$ multipliziert werden, denn im ersten Fall ist die i-te Zeile im Produkt Null und im zweiten die i-te Spalte. Für die $n+i, i$-te Stelle von $w(I_1)m_1(w(I_2)m_2)^{-1}$ erhalten wir also aus obigem Ausdruck:

$$\begin{pmatrix} - & I_1h_1'I_1(E_n - I_2){g_2'}^t(I_2 - E_n) \\ + & I_1I_2({u_2'}^t + {o_2'}^t)(I_2 - E_n) \\ - & I_1(I_2 - E_n) \\ - & I_1({u_1'}^t + {o_1'}^t)(I_1 - E_n)I_2({u_2'}^t + {o_2'}^t)(I_2 - E_n) \\ + & I_1({u_1'}^t + {o_1'}^t)(I_1 - E_n)(I_2 - E_n) \end{pmatrix}_{ii}.$$

Im zweiten und fünften Summanden wird hier von links beziehungsweise von rechts mit einer Matrix I_1I_2 beziehungsweise $(I_1 - E_n)(E_n - I_2)$ multipliziert, die an der ii-te Stelle eine Null hat. Im letzten Summanden multipliziert man von rechts mit der Matrix $(E_n - I_1)(I_2 - E_n)$, die an der ii-ten Stelle eine Null hat. Unser Ausdruck vereinfacht sich also weiter zu:

$$\begin{pmatrix} - & I_1h_1'I_1(E_n - I_2){g_2'}^t(I_2 - E_n) \\ - & I_1(I_2 - E_n) \\ - & I_1(-{u_1'}^t - {o_1'}^t)(I_1 - E_n)I_2({u_2'}^t + {o_2'}^t)(I_2 - E_n) \end{pmatrix}_{ii}.$$

Der zweite Summand liefert nun an der ii-ten Stelle eine Eins. Die anderen liefern, bis auf den Summanden $I_1(u_1')^t(I_1 - E_n)I_2{u_2'}^t(I_2 - E_n)$, zur Summe nur

Beiträge, die Null oder aber ein Vielfaches von p sind, da in jedem ein Faktor h_1' beziehungsweise ${o_1'}^t$ oder ${o_2'}^t$ vorkommt, der nur Einträge hat, die entweder Null sind oder aber durch p teilbar sind. Der Summand $I_1(u_1')^t(I_1-E_n)I_2{u_2'}^t(I_2-E_n)$ ist ein Produkt aus strikten oberen Dreiecksmatrizen und Diagonalmatrizen, hat also auf der ganzen Diagonalen Einträge, die Null sind. Somit ist auch der Eintrag an der ii-ten Stelle gleich Null. Insgesamt folgt deshalb dass der ii-te Eintrag im linken unteren Block von $w(I_1)m_1(w(I_2)m_2)^{-1}$ aus $1+p\mathbb{Z}$ ist, also insbesondere ist dieser Eintrag ungleich Null. In den Mengen $w(I_1)N(I_1)$ und $w(I_2)N(I_2)$ können also im gerade betrachteten Fall nur Repräsentanten unterschiedlicher Klassen sein.
Damit liefern $w(I_1)m_1$ und $w(I_2)m_2$ auch hier Repräsentanten unterschiedlicher Klassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$. Wir verallgemeinern nun die Bezeichnung für $R_N^{(n)}(i)$, $N=p$ auf den Fall, in dem $N=p^\nu$ eine Primzahlpotenz ist, indem wir

$$R_{p^\nu}^{(n)}(i) \quad = \quad \bigcup_{\substack{I\in D^{(n)}\\ e_I=n-i}} w(I)N(I), \quad i\in\{0,\dots,n\}$$

setzen. Sei wieder $r_{p^\nu}^{(n)}(i)=|R_{p^\nu}^{(n)}(i)|$. Wir werden in Lemma 2.10 zeigen, dass

$$\sum_{i=0}^n r_{p^\nu}^{(n)}(i) \quad = \quad p^{\nu\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{1}{p^i}\right)$$

ist. Damit ist dann mit (1.1)

$$\Big|\bigcup_{I\in D^{(n)}} w(I)N(I)\Big| \quad = \quad [\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}):\Gamma_0^{(n)}(N)].$$

Somit ist das angegebene Repräsentantensystem vollständig und der Satz bis auf Lemma 2.10 bewiesen.

□

Bevor wir zum fehlenden Lemma aus dem Beweis von Satz 2.7 kommen, setzen wir

$$\begin{aligned} s_I &= \sum_{\substack{i=1\\ I_{ii}=0}}^{n-1} \sharp\{I_{jj}=1 \mid i<j\le n\}, \qquad (2.10)\\ s_{0_n} &= 0 \end{aligned}$$

und zeigen eine Rekursionsformel (Pascalsches Dreieck) für $r_{p^\nu}^{(n)}(i)$. Des weiteren geben wir im folgenden Beispiel noch einige spezielle Werte für die in (2.7), (2.6) und (2.10) eingeführten Bezeichnungen an.

i_1	i_2	e_I	s_I	t_I
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	2	0	0

i_1	i_2	i_3	e_I	s_I	t_I
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	2	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	2
0	1	1	2	2	0
1	0	1	2	1	1
1	1	0	2	0	2
1	1	1	3	0	0

Tabelle 2.1: Einige spezielle Werte für e_I, t_I und s_I

Beispiel 2.8
Ist $I = \mathrm{Diag}(i_1,\ldots,i_n)$, $i_j \in \{0,1\}$, so ergeben sich für $n = 2$ und $n = 3$ die in Tabelle 2.1 aufgeführten Werte.

□

Für die Mächtigkeit der Mengen $G(I)$, $H(I)$, $U(I)$, $O(I)$ gilt:

$$\begin{aligned} |G(I)| &= p^{\nu\frac{(n-e_I)(n-e_I+1)}{2}}, \\ |H(I)| &= p^{(\nu-1)\frac{e_I(e_I+1)}{2}}, \\ |U(I)| &= p^{\nu t_I}, \\ |O(I)| &= p^{(\nu-1)s_I}. \end{aligned}$$

Deshalb ist:

$$|w(I)N(I)| = p^{(\nu-1)\frac{e_I(e_I+1)}{2}+\nu\frac{(n-e_I)(n-e_I+1)}{2}+\nu t_I+(\nu-1)s_I}.$$

Lemma 2.9 (Pascalsches Dreieck)
Es gilt:

i) $r_{p^\nu}^{(n)}(0) = p^{(\nu-1)\frac{n(n+1)}{2}}$,

ii) $r_{p^\nu}^{(n)}(n) = p^{\nu\frac{n(n+1)}{2}}$.

Und für $0 < i < n$ ist

iii) $r_{p^\nu}^{(n)}(i) = p^{(\nu-1)(n-i)+i\nu} r_{p^\nu}^{(n-1)}(i-1) + p^{(\nu-1)(n-i)+i\nu} r_{p^\nu}^{(n-1)}(i).$

Beweis:
Teil $i)$ und $ii)$ des Lemmas sind klar, da $r_{p^\nu}^{(n)}(0) = |H(E_n)|$ und $r_{p^\nu}^{(n)}(n) = |G(0_n)|$ ist.
Um Teil $iii)$ der Aussage zu zeigen sei

$$I = \mathrm{Diag}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad I' = \mathrm{Diag}(x_2, \dots, x_n) \ \text{ mit } \ x_j \in \{0, 1\}.$$

Wir betrachten zuerst den Fall $x_1 = 0$. Hier ist

$$\begin{aligned} |G(I)| &= p^{(n-e_I)\nu}|G(I')| = p^{i\nu}|G(I')| \ \text{ und} \\ |H(I)| &= |H(I')|. \end{aligned}$$

Da $s_I = s_{I'} + e_{I'} = s_{I'} + (n-i)$ ist, ist

$$|O(I)| = p^{(n-i)(\nu-1)}|O(I')|,$$

und wegen $t_I = t_{I'}$ erhalten wir:

$$|U(I)| = |U(I')|.$$

Im Fall $x_1 = 1$ gilt:

$$|G(I)| = |G(I')|$$

und

$$|H(I)| = p^{e_I(\nu-1)}|H(I')| = p^{(n-i)(\nu-1)}|H(I')|.$$

Da $t_I = t_{I'} + (n - e_{I'}) = t_{I'} + i$ ist, folgt

$$|U(I)| = p^{i\nu}|U(I')|.$$

Wegen $s_I = s_{I'}$ ist

$$|O(I)| = |O(I')|.$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} r_{p^\nu}^{(n)}(i) &= |R_{p^\nu}^{(n)}(i)| = \Big| \bigcup_{\substack{I \in D^{(n)} \\ e_I = n-i}} w(I)N(I) \Big| \\ &= \Big| \bigcup_{\substack{I \in D^{(n)} \\ e_I = n-i \\ I_{11}=0}} w(I)N(I) \Big| + \Big| \bigcup_{\substack{I \in D^{(n)} \\ e_I = n-i \\ I_{11}=1}} w(I)N(I) \Big| \\ &= \sum_{\substack{I \in D^{(n)} \\ e_I = n-i \\ I_{11}=0}} |G(I)||H(I)||U(I)||O(I)| \\ &\quad + \sum_{\substack{I \in D^{(n)} \\ e_I = n-i \\ I_{11}=1}} |G(I)||H(I)||U(I)||O(I)|. \end{aligned}$$

Den ersten Summanden können wir nun mit Hilfe der obigen Betrachtungen als Summe über $I' \in D^{(n-1)}$ mit $e_{I'} = n-i$, und den zweiten Summanden als Summe über $I' \in D^{(n-1)}$ mit $e_{I'} = n-i-1$ ausdrücken. Also ist

$$\begin{aligned}
r_{p^\nu}^{(n)}(i) &= \sum_{\substack{I' \in D^{(n-1)} \\ e_{I'}=n-i}} p^{i\nu}|G(I')||H(I')||U(I')|p^{(\nu-1)(n-i)}|O(I')| \\
&\quad + \sum_{\substack{I' \in D^{(n-1)} \\ e_{I'}=n-i-1}} |G(I')|p^{(\nu-1)(n-i)}|H(I')|p^{i\nu}|U(I')||O(I')| \\
&= p^{i\nu}p^{(\nu-1)(n-i)} \sum_{\substack{I' \in D^{(n-1)} \\ e_{I'}=n-i}} |G(I')||H(I')||U(I')||O(I')| \\
&\quad + p^{i\nu}p^{(\nu-1)(n-i)} \sum_{\substack{I' \in D^{(n-1)} \\ e_{I'}=n-i-1}} |G(I')||H(I')||U(I')||O(I')| \\
&= p^{i\nu+(\nu-1)(n-i)} r_{p^\nu}^{(n-1)}(i-1) + p^{i\nu+(\nu-1)(n-i)} r_{p^\nu}^{(n-1)}(i).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.10

$$\sum_{I \in D^{(n)}} |w(I)N(I)| = \sum_{i=1}^{n} r_{p^\nu}^{(n)}(i) = p^{\nu\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^i}\right).$$

Beweis:
Die erste Gleichung ist offensichtlich. Um die zweite zu zeigen werden wir eine Induktion nach n durchführen. Wir haben in Beispiel 2.6 die Behauptung bereits für $n = 1$ und $n = 2$ nachgerechnet. Setzen wir $q = p^\nu$, so gilt nach Lemma 2.9 die Rekursionsformel

$$r_q^{(n)}(i) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-i} q^i r_q^{(n-1)}(i-1) + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-i} q^i r_q^{(n-1)}(i),$$

und somit erhalten wir unter Ausnutzung von Lemma 2.9 i), ii) und iii) für ein $\alpha \in \mathbb{N}$, $1 \leq \alpha \leq n$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-\alpha} \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha(n-\alpha-i)} q^{\alpha i} r_q^{(n-\alpha)}(i) \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha(n-\alpha)} r_q^{(n-\alpha)}(0) + q^{\alpha(n-\alpha)} r_q^{(n-\alpha)}(n-\alpha)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{n-\alpha-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha(n-\alpha-i)} q^{\alpha i}\Bigg(\left(\frac{q}{p}\right)^{n-\alpha-i} q^i r_q^{(n-\alpha-1)}(i-1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-\alpha-i} q^i r_q^{(n-\alpha-1)}(i)\Bigg)\\
=&\sum_{i=1}^{n-\alpha}\left(\frac{q}{p}\right)^{(\alpha+1)(n-\alpha-i)} q^{(\alpha+1)i} r_q^{(n-\alpha-1)}(i-1)\\
&+\sum_{i=0}^{n-\alpha-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{(\alpha+1)(n-\alpha-i)} q^{(\alpha+1)i} r_q^{(n-\alpha-1)}(i)\\
=&\sum_{i=0}^{n-\alpha-1}\Bigg(\left(\frac{q}{p}\right)^{(\alpha+1)(n-\alpha-(i+1))} q^{(\alpha+1)(i+1)} r_q^{(n-\alpha-1)}(i)\\
&\qquad + \left(\frac{q}{p}\right)^{(\alpha+1)(n-\alpha-i)} q^{(\alpha+1)i} r_q^{(n-\alpha-1)}(i)\Bigg)\\
=&\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha+1}+q^{\alpha+1}\right)\sum_{i=0}^{n-\alpha-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{(\alpha+1)(n-\alpha-1-i)} q^{(\alpha+1)i} r_q^{(n-\alpha-1)}(i).
\end{aligned}
$$

Damit erhält man dann durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} r_q^{(n)}(i) &= \left(p^{\nu-1}+p^{\nu}\right)\sum_{i=0}^{n-1} p^{(\nu-1)(n-1-i)} p^{i\nu} r_q^{(n-1)}(i)\\
&= \left(p^{\nu-1}+p^{\nu}\right)\left(p^{2(\nu-1)}+p^{2\nu}\right)\sum_{i=0}^{n-2} p^{2(\nu-1)(n-2-i)} p^{2i\nu} r_q^{(n-2)}(i)\\
&\vdots\\
&= \prod_{i=1}^{n-1}\left(p^{i(\nu-1)}+p^{i\nu}\right)\underbrace{\sum_{i=0}^{1} p^{(n-1)(\nu-1)(1-i)} p^{(n-1)i\nu} r_q^{(1)}(i)}_{=p^{n-1}r_q^{(1)}(0)+p^{n-1}r_q^{(1)}(1)=p^{(\nu-1)\frac{(n-1)n}{2}}+p^{\nu\frac{(n-1)n}{2}}}\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(p^{i(\nu-1)}+p^{i\nu}\right) = p^{\nu\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p^i}\right).
\end{aligned}
$$

□

Damit ist nun auch Satz 2.7 bewiesen.

Bemerkung 2.11
Um eine zu Bemerkung 2.3 analoge Interpretation von $r_q^{(n)}(i)$ zu erhalten, lässt sich hier leicht mit Hilfe von Lemma 2.9 und Induktion nach n zeigen, dass

$$r_q^{(n)}(i) \;=\; \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} p^{\frac{i(i+1)}{2}} \binom{n}{i}_p$$

ist. Beispiel 2.6 liefert hierbei den Induktionsanfang. Wir können also annehmen, dass $n \geq 3$ ist, und wegen Lemma 2.9 i) auch $i > 0$. Aufgrund von Teil iii) von Lemma 2.9 und der Induktionsannahme folgt nun

$$\begin{aligned} r_q^{(n)}(i) &= \left(\frac{q}{p}\right)^{n-i} q^i\, r_q^{(n-1)}(i-1) + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-i} q^i\, r_q^{(n-1)}(i) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{n-i} q^i \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}} p^{\frac{(i-1)i}{2}} \binom{n-1}{i-1}_p \\ &\quad + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-i} q^i \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}} p^{\frac{i(i+1)}{2}} \binom{n-1}{i}_p . \end{aligned}$$

Benutzen wir nun noch das Analogon des Pascalschen Dreiecks aus Bemerkung 2.3 und fassen die restlichen p-Potenzen in Termen von $\frac{q}{p}$ und p zusammen, dann folgt die Behauptung.

□

Im Folgenden fügen wir der Notation von $N(I)$ noch einen Index zu und schreiben $N_{p^\nu}(I)$ anstatt $N(I)$. Es ist also:

$$\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \;=\; \bigcup_{I \in D^{(n)}} w(I) N_{p^\nu}(I).$$

Des weiteren benutzen wir die Multiindexschreibweise. Dabei bezeichne zum Beispiel $\underline{i}$ das Tupel $(i_1, \ldots, i_t)$. Sei $N = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\nu_i}$ die Primfaktorzerlegung von N. Mit $R_N^{(n)}(\underline{i})$ bezeichnen wir eine Menge von Elementen aus $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$, die wir durch Liftung mittels (1.2) aus den Mengen $R_{(p_j^{\nu_j})}^{(n)}(i_j)$ $(j \in \{0, \ldots, n\})$ erhalten. Wir benutzen hierfür auch die kurze Schreibweise

$$R_N^{(n)}(\underline{i}) \;\equiv\; R_{(p_j^{\nu_j})}^{(n)}(i_j) \,(\mathrm{mod}\, \Gamma_0^{(n)}(p_j^{\nu_j}))\;\; \forall j \in \{1, \ldots, t\}.$$

Das folgende Korollar ist nun offensichtlich.

Korollar 2.12

i) Die Menge

$$\bigcup_{\underline{i}=(0,\ldots,0)}^{\underline{n}} R_N^{(n)}(\underline{i})$$

bildet ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$.

ii) Setzen wir $r_N^{(n)}(\underline{i}) = |R_N^{(n)}(\underline{i})|$, *dann gilt:*

$$r_N^{(n)}(\underline{i}) \;\; = \;\; \prod_{j=1}^{t} r_{p_j^{\nu_j}}^{(n)}(i_j).$$

□

Bemerkung 2.13
Sei K *ein Zahlkörper mit Ganzheitsring* $\mathfrak{O}_K$ *und* $\mathfrak{N}$ *ein Ideal in* $\mathfrak{O}_K$ *mit Primidealzerlegung* $\mathfrak{N} = \prod_{j=1}^{t} \mathfrak{p}_j^{\nu_j}$. *Sei weiter* $(\mathfrak{O}_K)_{\left[\mathfrak{p}_j^{\nu_j}\right]}$ *ein fest vorgegebenes Repräsentantensystem von* $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{p}_j^{\nu_j}\mathfrak{O}_K$. *Wir setzen in die Definitionen von* $G(I)$, $H(I)$, $U(I)$, $O(I)$ *von Seite 39 anstatt* $\mathbb{Z}_{[p^\nu]}$ *die Menge* $(\mathfrak{O}_K)_{\left[\mathfrak{p}_j^{\nu_j}\right]}$ *ein und übernehmen die Definition von* $N(I)$ *(Seite 39), wobei wir auch hier die Mengen* $\mathbb{Z}_{[p^\nu]}$ *durch* $(\mathfrak{O}_K)_{\left[\mathfrak{p}_j^{\nu_j}\right]}$ *ersetzen. Ersetzen wir weiter in den Definitionen von* $R_N^{(n)}(i)$ *und* $r_N^{(n)}(i)$ *(Seite 48) formal* N *durch* $\mathfrak{N}$, *so bleiben die Aussagen von Satz 2.7 und Korollar 2.12 gültig:*

i) Die Menge

$$\dot{\bigcup_{I \in D^{(n)}}} w(I)N(I).$$

ist ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_0^{(n)}(\mathfrak{p}_j^{\nu_j})\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathfrak{O}_K)$

ii) Die Menge

$$\bigcup_{\underline{i}=(0,\ldots,0)}^{\underline{n}} R_{\mathfrak{N}}^{(n)}(\underline{i})$$

bildet ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma_0^{(n)}(\mathfrak{N})\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathfrak{O}_K)$ *und es gilt:*

$$r_{\mathfrak{N}}^{(n)}(\underline{i}) \;\; = \;\; \prod_{j=1}^{t} r_{\mathfrak{p}_j^{\nu_j}}^{(n)}(i_j).$$

Die hier angegebenen Beweise verlieren bei entsprechender Anpassung der Notationen nicht ihre Gültigkeit. Beim Zählen der Elemente müssen hierbei Normen genommen werden. Man beachte hierbei auch Bemerkung 1.1.

$\square$

Zur Erläuterung der Begriffe geben wir noch ein einfaches Beispiel an, auf das wir später wieder eingehen werden.

Beispiel 2.14
Sei $n = 2$. Wir betrachten die Gruppe der Stufe $N = 675 = 3^3 \cdot 5^2$. Ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0^{(2)}(5^2)\backslash\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ ist:

$$
\begin{aligned}
R_{25}^{(2)}(0) &= \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ a & b & 1 & \\ b & c && 1 \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \{0,5,10,15,20\} \right\}, \\
R_{25}^{(2)}(1) &= \begin{pmatrix} &&1& \\ &1&& \\ -1&&& \\ &&&1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & x & \\ & 1 && \\ &&1& \\ & b & -a & 1 \end{pmatrix} \middle| \, \begin{matrix} x \in \{0,1,\ldots,24\}, \\ a,b \in \{0,5,10,15,20\} \end{matrix} \right\} \\
&\cup \begin{pmatrix} 1 &&& \\ &&&1 \\ &&1& \\ &-1&& \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 &&& \\ x & 1 && y \\ a && 1 & -x \\ &&& 1 \end{pmatrix} \middle| \, \begin{matrix} x,y \in \{0,1,\ldots,24\}, \\ a \in \{0,5,10,15,20\} \end{matrix} \right\}, \\
R_{25}^{(2)}(2) &= \begin{pmatrix} &&1& \\ &&&1 \\ -1&&& \\ &-1&& \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 && x & z \\ & 1 & z & y \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in \{0,1,\ldots,24\} \right\}.
\end{aligned}
$$

Für $R_{27}^{(2)}(2)$ erhält man das Repräsentantensystem:

$$
R_{27}^{(2)}(2) = \begin{pmatrix} &&1& \\ &&&1 \\ -1&&& \\ &-1&& \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 && x & z \\ & 1 & z & y \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in \{0,1,\ldots,26\} \right\}.
$$

Nun ist zum Beispiel die Menge $R_{675}^{(2)}(2,0)$ von Repräsentanten durch das System:

$$
\begin{aligned}
R_{675}^{(2)}(2,0) &\equiv R_{25}^{(2)}(0) \pmod{\Gamma_0^{(2)}(25)}, \\
R_{675}^{(2)}(2,0) &\equiv R_{27}^{(2)}(2) \pmod{\Gamma_0^{(2)}(27)}
\end{aligned}
$$

bestimmt. Also:

$$R_{675}^{(2)}(2,0) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 351 & & g & \\ & 351 & & h \\ a & b & d & f \\ b & c & f & e \end{pmatrix} \middle| \left(\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & f \\ f & e \end{pmatrix} \right) \in X \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} X \quad = \quad & \left\{ \left(\begin{pmatrix} -9125 \\ -9125 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 350 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9099 & 0 \\ 0 & -9099 \end{pmatrix} \right), \right. \\ & \left(\begin{pmatrix} -9125 \\ -13218875 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9099 & 0 \\ 0 & -3012849 \end{pmatrix} \right), \\ & \left(\begin{pmatrix} -9125 \\ 4266325 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 215 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9099 & 0 \\ 0 & 2613276 \end{pmatrix} \right), \\ & \left. \left(\begin{pmatrix} -9125 \\ 1893700 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 485 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9099 & 0 \\ 0 & 2616651 \end{pmatrix} \right), \ldots \right\}. \end{aligned}$$

Beachte hierbei auch Bemerkung 2.32. Insbesondere ist

$$|X| \quad = \quad r_{675}^{(2)}(2,0) \quad = \quad 2460375 \quad = \quad 3^9 \cdot 5^3 \quad = \quad r_{27}^{(2)}(2) \cdot r_{25}^{(2)}(0).$$

Genauso sind

$$\begin{array}{rcrcrcr} r_{675}^{(2)}(2,2) & = & 5^3 & \cdot & 3^6 & = & 91125, \\ r_{675}^{(2)}(2,1) & = & 5^3 & \cdot & 4 \cdot 3^7 & = & 1093500, \\ r_{675}^{(2)}(2,0) & = & 5^3 & \cdot & 3^9 & = & 2460375, \\ r_{675}^{(2)}(1,2) & = & 6 \cdot 5^4 & \cdot & 3^6 & = & 2733750, \\ r_{675}^{(2)}(1,1) & = & 6 \cdot 5^4 & \cdot & 4 \cdot 3^7 & = & 32805000, \\ r_{675}^{(2)}(1,0) & = & 6 \cdot 5^4 & \cdot & 3^9 & = & 73811250, \\ r_{675}^{(2)}(0,2) & = & 5^6 & \cdot & 3^6 & = & 11390625, \\ r_{675}^{(2)}(0,1) & = & 5^6 & \cdot & 4 \cdot 3^7 & = & 136687500, \\ r_{675}^{(2)}(0,0) & = & 5^6 & \cdot & 3^9 & = & 307546875, \end{array}$$

und somit

$$\sum_{l_1, l_2 = 0}^{2} r_{675}^{(2)}(l_1, l_2) \quad = \quad 568620000 \quad = \quad [\Gamma_0^{(2)}(675) : \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})].$$

$\square$

2.2 Spitzenklassen von $\mathbf{\Gamma_0^{(n)}(N)}$

In diesem Abschnitt werden wir vollständige Repräsentantensysteme von Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$, also ein Repräsentantensystem von

$$\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$$

angeben. Wir geben also eine Menge ganzer symplektischer Matrizen aus $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ an, die die rationalen, 0-dimensionalen Randkomponenten von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ unter der Operation von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ auf dem Siegelschen Halbraum auf die 0-dimensionale Standardrandkomponente abbilden. Eine Darstellung der Theorie zur Satake-kompaktifizierung findet sich zum Beispiel bei H. Cartan [11] oder E. Freitag [24]. Ist N quadratfrei, so genügt es, wenn wir uns auf Primzahlstufen $N = p$ beschränken und diese Repräsentantensysteme auf Stufen zu quadratfreiem N liften. Siehe hierzu auch Abschnitt 2.2.3. Für Primzahlstufen erhält man mittels einer Bruhat-Zerlegung, [6], Lemma 8.1 Repräsentantensysteme.

Sei im Weiteren $N = p^\nu$ eine Primzahlpotenz und sei $m \in R_{p^\nu}^{(n)}(i)$, genauer $m \in w(I)N_{p^\nu}(I)$ für ein $I \in D^{(n)}$ mit $\mathrm{rg}(I) = n-i$. Der linke untere $n\times n$ Block von m sei $(I-E_n)(u+o)+(I-E_n)+Ih$ mit $u \in U(I)$, $o \in O(I)$ und $h \in H(I)$. Modulo p ist dieser kongruent zu $(I-E_n)u+(I-E_n)$. Der Rang des linken unteren $n\times n$ Blocks von m modulo p ist also $n-\mathrm{rg}(I) = i$.
Sei nun umgekehrt für ein $i \in \{1,\dots,n\}$ ein $m \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ vorgegeben, dessen unterer linker $n\times n$-Block modulo p den Rang i hat. Da für

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(p^\nu) \quad \text{und} \quad m = \begin{pmatrix} Y & \star \\ X & \star \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y & \star \\ X & \star \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \star & \star \\ CY+DX & \star \end{pmatrix},$$

ist auch der Rang von $CY+DX$ modulo p gleich i. Also liegt m für ein geeignetes I mit $\mathrm{rg}(I) = n-i$ in $w(I)N_{p^\nu}(I)$ und somit auch in

$$R_{p^\nu}^{(n)}(i) \;=\; \bigcup_{\substack{I\in D^{(n)}\\ \mathrm{rg}(I)=n-i}} w(I)N(I).$$

Da für alle

$$\begin{pmatrix} \star & \star \\ X & \star \end{pmatrix} \in R_{p^\nu}^{(n)}(i) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} A^{-1} & B \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \in \Delta(n,\mathbb{Z})$$

der Rang von X modulo p gleich dem Rang von XA^{-1} modulo p ist, werden bei der Projektion

$$\mathcal{P} : \Gamma_0^{(n)}(p^\nu)\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \;\to\; \Gamma_0^{(n)}(p^\nu)\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$$

Repräsentanten aus $R_{p^\nu}^{(n)}(i)$ auf Spitzenklassen abgebildet, deren untere $n \times n$ Blöcke Rang i haben. Insbesondere werden zwei Repräsentanten $m_1 \in R_{p^\nu}^{(n)}(i_1)$ und $m_2 \in R_{p^\nu}^{(n)}(i_2)$ mit $i_1 \neq i_2$ auch auf unterschiedliche Spitzenklassen abgebildet. Wir erhalten also folgendes Lemma:

Lemma 2.15
Sei $N = \prod_{j=1}^t p_j^{\nu_j}$ eine natürliche Zahl. Unter der Projektion $\mathcal{P}$ werden Repräsentanten aus $R_N^{(n)}(\underline{i})$ auf Spitzenklassen abgebildet, deren unterer $n \times n$ Block Rang i_j modulo p_j, $j \in \{1, \dots, t\}$ hat. Insbesondere werden zwei Repräsentanten $m_1 \in R_N^{(n)}(i_{11}, \dots, i_{1t})$ und $m_2 \in R_N^{(n)}(i_{21}, \dots, i_{2t})$ auf unterschiedliche Spitzenklassen abgebildet, falls $i_{1j} \neq i_{2j}$ für ein $j \in \{1, \dots, t\}$ ist.

□

2.2.1 Spitzenklassen von $\mathbf{\Gamma_0^{(n)}(N)}$ im eindimensionalen Fall

Bevor wir den allgemeinen Fall behandeln, beschränken wir uns auf den Fall der Dimension 1. Hier sind Vertretersysteme für Spitzenklassen bekannt (siehe zum Beispiel [48], Paragraph 4.2). Um Notationen anzupassen und für spätere Untersuchungen beschreiben wir hier diesen Fall dennoch etwas genauer.
In [48], Theorem 4.2.7, p.108 wird gezeigt, dass

$$\sharp\left(\Gamma_0^{(1)}(N)\backslash \mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z})/\Delta(1,\mathbb{Z})\right) = \prod_{j=1}^{t}\sum_{v=0}^{\nu_j}\varphi\left(p_j^{\min\{v,\nu_j-v\}}\right) \tag{2.11}$$

ist. Hierbei ist φ die Eulersche Phi-Funktion. Wir haben bereits in Beispiel 2.6, i) gesehen, dass sich $\Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\backslash \mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z})$ in die beiden Mengen $R_{p^\nu}^{(1)}(0)$ und $R_{p^\nu}^{(1)}(1)$ zerlegen lässt. Sind

$$m_i = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & d_i \end{pmatrix}, \quad i \in \{0,1\}$$

zwei Elemente aus $R_{p^\nu}^{(1)}(1)$, so liefern diese unter $\mathcal{P}$ wegen der Beziehung

$$E_2 \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 - d_2 \\ & 1 \end{pmatrix} = E_2 \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & d_2 \end{pmatrix} E_2$$

dieselbe Spitzenklasse von $\Gamma_0^{(1)}(p^\nu)$. Zusammen mit Lemma 2.15 folgt, dass $R_{p^\nu}^{(1)}$ genau einen Repräsentanten enthält. Hierfür können wir

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

wählen. Um die Spitzenklassen zu bestimmen, auf die sich die Elemente aus $R^{(1)}_{p^\nu}(0)$ verteilen, folgen wir [48], p. 110, Mitte. Sei M_{p^ν} die Menge der Elemente der Ordnung p^ν in $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$. Die Abbildung von

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\backslash \mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}) &\to M_{p^\nu} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (a,c)(\mathrm{mod}\, p^\nu) \end{aligned}$$

induziert eine Bijektion

$$\Gamma_0^{(1)}(p^\nu)\backslash \mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z}) \quad \to \quad M_{p^\nu}/\sim_1,$$

wobei $\sim_1$ durch

$$(a,c) \sim_1 (a',c') \quad \Leftrightarrow \quad (a',c') = \pm(xa+yc, x^{-1}c) \tag{2.12}$$

mit $x \in (\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^\star$ und $y \in \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ definiert wird. Dabei ist $\sim_1$ eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzklasse enthält hierbei für ein eindeutig bestimmtes $v \in \{0,\ldots,\nu\}$ einen Repräsentanten der Form (a,p^i). Ist $v=0$ dann sind alle Klassen zu $(0,1)$ äquivalent. Ist $v>0$ dann muss a in $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ invertierbar sein und es gilt:

$$(a,p^v) \sim_1 (a',p^v) \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv a' \,\left(\mathrm{mod}\, p^{\min\{v,\nu-v\}}\right).$$

Setzen wir nun in (2.12) $x=a$ und $y=0$, dann folgt:

$$(a,p^v) \quad \sim_1 \quad (1, a^{-1}p^v).$$

Die Repräsentanten der Spitzenklassen, die man aus $R^{(1)}_{p^\nu}(0)$ mittels der Projektion $\mathcal{P}$ erhält, werden durch die Matrizen der Menge

$$\bigcup_{i=0}^{\nu-1} S^{(1)}_{p^\nu}(0;(v))$$

mit

$$S^{(1)}_{p^\nu}(0;(v)) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha p^v & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \{1,\ldots,p^{\min\{v,\nu-v\}}-1\},\, p \nmid \alpha \right\}$$

für $1 \le v \le \nu-1$ und

$$S^{(1)}_{p^\nu}(0;(0)) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

beschrieben. Setzen wir nun noch für den Repräsentanten, den man mittels $\mathcal{P}$ aus $R^{(1)}_{p^\nu}(1)$ erhält,

$$S^{(1)}_{p^\nu}(1;(0)) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right\},$$

so liefert uns

$$S_{p^\nu}^{(1)}(1;(0)) \quad \cup \quad \left(\bigcup_{i=0}^{\nu} S_{p^\nu}^{(1)}(0;(i)) \right)$$

ein Repräsentantensystem der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(1)}(p^\nu)$. Bezeichnen wir für die natürliche Zahl $N = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\nu_i}$ mit

$$\begin{aligned} S_N^{(1)}(\underline{j};(\underline{v})) &= S_N^{(1)}(j_1,\ldots,j_t;(v_1),\ldots,(v_t)), \\ v_i &\in \begin{cases} \{0\} & \text{falls} \quad j_i = 1, \\ \{0,\ldots,\nu_i - 1\} & \text{falls} \quad j_i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

eine Menge von Matrizen aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, die man durch Liftung mit Hilfe des starken Approximationssatzes aus den Mengen

$$S_{p_i^{\nu_i}}^{(1)}(j_i;(v_i)), \quad i \in \{1,\ldots,t\}$$

erhält, in Kurzschreibweise:

$$S_N^{(1)}(\underline{j};(\underline{v})) \equiv S_{p_i^{\nu_i}}^{(1)}(j_i;(v_i)) \,(\mathrm{mod}\, \Gamma_0^{(1)}(p_i^{\nu_i})), \quad i \in \{1,\ldots,t\},$$

so gilt die folgende Proposition:

Proposition 2.16
Mit obigen Bezeichnungen ist die Menge:

$$\bigcup_{\underline{l}\in\{0,1\}^t} \bigcup_{\underline{v}} S_N^{(1)}(\underline{l};(\underline{v})) \tag{2.13}$$

ein Repräsentantensystem von Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(1)}(p^\nu)$.

□

Beispiel 2.17
Für $N = 675 = 3^3 \cdot 5^2$ ist:

$$\begin{aligned} S_{675}^{(1)}(1,1;(0),(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \right\}, \\ S_{675}^{(1)}(0,0;(0),(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ S_{675}^{(1)}(0,0;(0),(1)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ h & 1 \end{pmatrix} \middle| h \in \{135, 270, 405, 540\} \right\}, \\ S_{675}^{(1)}(0,0;(1),(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ h & 1 \end{pmatrix} \middle| h \in \{300, 600\} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{675}^{(1)}(0,0;(2),(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ h & 1 \end{pmatrix} \middle| h \in \{225, 450\} \right\}, \\
S_{675}^{(1)}(0,0;(1),(1)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ h & 1 \end{pmatrix} \middle| h \in \begin{matrix} \{30, 60, 165, 195, \\ \quad 330, 435, 465, 570\} \end{matrix} \right\}, \\
S_{675}^{(1)}(0,0;(2),(1)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ h & 1 \end{pmatrix} \middle| h \in \begin{matrix} \{630, 360, 90, 495, \\ \quad 180, 585, 315, 45\} \end{matrix} \right\}, \\
S_{675}^{(1)}(1,0;(0),(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 351 & -9125 \\ 350 & -9099 \end{pmatrix} \right\}, \\
S_{675}^{(1)}(1,0;(0),(1)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 351 & -13218875 \\ 80 & -3012849 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 351 & 4266325 \\ 215 & 2613276 \end{pmatrix}, \right. \\
& \qquad \left. \begin{pmatrix} 351 & 1893700 \\ 485 & 2616651 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 351 & -8377775 \\ 620 & -14798349 \end{pmatrix} \right\} \\
S_{675}^{(1)}(0,1;(0),(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 325 & 8451 \\ 324 & 8425 \end{pmatrix} \right\}, \\
S_{675}^{(1)}(0,1;(1),(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 325 & 2260251 \\ 249 & 1731700 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 325 & 350676 \\ 624 & 1401625 \end{pmatrix} \right\}, \\
S_{675}^{(1)}(0,1;(2),(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 325 & -6443199 \\ 549 & -10884050 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 325 & -10701774 \\ 99 & -3259925 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

In Abschnitt 2.2.3 auf Seite 74 wird ein Algorithmus zur starken Approximation von Spitzenklassen vorgestellt, mit dessen Hilfe die Elemente aus den Mengen $S_{675}^{(1)}(1,0;(0),(0))$, $S_{675}^{(1)}(1,0;(0),(1))$ $S_{675}^{(1)}(0,1;(0),(0))$, $S_{675}^{(1)}(0,1;(1),(0))$ *und* $S_{675}^{(1)}(0,1;(2),(0))$ *berechnet wurden.*
Die Anzahl der Elemente von

$$\Gamma_0^{(1)}(3^3 \cdot 5^2)\backslash \mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}) = \bigcup_{\underline{j} \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}} R_{675}^{(1)}(\underline{j})$$

ist

$$3^3 \cdot 5^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 1080.$$

In der folgenden Tabelle werden die Anzahl der Urbilder der Spitzenklassen aus $S_{675}^{(1)}(\underline{j};(\underline{v}))$ *in Abhängigkeit von* j *und* $(\underline{v})$ *unter der Projektion*

$$\mathcal{P}: \Gamma_0^{(1)}(675)\backslash \mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}) \mapsto \Gamma_0^{(1)}(675)\backslash \mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z})/\Delta(1,\mathbb{Z})$$

aufgelistet und die Verteilung der 36 *Spitzenklassen von* $\Gamma_0^{(1)}(675)$ *auf die Menge* $S_{675}^{(1)}(\underline{j};(\underline{v}))$ *dargestellt.*

$(j_1, j_2; (v_1), (v_2))$	$\sharp\left(S_{675}^{(1)}(j_1, j_2; (v_1), (v_2))\right)$	$\sharp\left(\mathcal{P}^{-1}\left(S_{675}^{(1)}(j_1, j_2; (v_1), (v_2))\right)\right)$
$(1, 1; (0), (0))$	1	675
$(0, 0; (0), (0))$	1	1
$(0, 0; (0), (1))$	4	1
$(0, 0; (1), (0))$	2	3
$(0, 0; (2), (0))$	2	1
$(0, 0; (1), (1))$	8	3
$(0, 0; (2), (1))$	8	1
$(1, 0; (0), (0))$	1	27
$(1, 0; (0), (1))$	4	27
$(0, 1; (0), (0))$	1	25
$(0, 1; (1), (0))$	2	75
$(0, 1; (2), (0))$	2	25

$\square$

Für $N = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\nu_i}$ bezeichne

$$t_N^{(1)}(\underline{j}; (\underline{v})) \quad = \quad t_N^{(1)}(j_1, \ldots, j_t; (v_1), \ldots, (v_t))$$

die Anzahl der Elemente aus $\Gamma_0^{(1)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(1, \mathbb{Z})$, beziehungsweise aus $R_N^{(1)}(\underline{j})$, die eine fest vorgegebene Spitzenklasse von $S_N^{(1)}(\underline{j}; (\underline{v}))$ repräsentieren. Dieser Wert hängt nur von $\underline{j}$ und $(\underline{v})$ ab.

Definition 2.18
Wir nennen

$$t_N^{(1)}(\underline{j}; (\underline{v})) \quad = \quad \left|\mathcal{P}^{-1}\left(S_N^{(1)}(\underline{j}; (\underline{v}))\right)\right|$$

die Weite einer Spitzenklasse.

$\square$

Eine Verallgemeinerung dieser Definition auf höhere Grade ($n > 1$) findet man auf Seite 78.

Bemerkung 2.19
Für eine Untergruppe Γ von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ findet man den Begriff der Weite einer Spitze zum Beispiel in [54], Abschnitt 2.2 definiert. Im Folgenden bezeichnen wir für eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit

$$\overline{\Gamma} \quad = \quad \{\iota_\sigma : z \mapsto \sigma\langle z\rangle \in \mathrm{AUT}(\mathbb{H}) |\ \sigma \in \Gamma\}$$

die Menge der Automorphismen von $\mathbb{H}$, die durch die Operation eines Elementes $\sigma \in \Gamma$ gegeben sind. Es gilt

$$\mathrm{AUT}(\mathbb{H}) \quad \cong \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm E_2\}.$$

Sind weiter $\overline{\Gamma}_q$ beziehungsweise Γ_q die Stabilisatoren von q in $\overline{\Gamma}$ beziehungsweise Γ und $q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ eine Spitze zur Untergruppe Γ, so ist die Weite von q modulo Γ als $[\overline{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}_q : \overline{\Gamma}_q]$ gegeben. Da die Untergruppen $\Gamma_0^{(1)}(N)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ das Element $-E_2$ enthalten, ist

$$\left[\overline{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})_q} : \overline{\Gamma_0^{(1)}(N)_q}\right] \quad = \quad \left[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})_q : \Gamma_0^{(1)}(N)_q\right].$$

Nutzen wir nun [54], Theorem 1.1.2 mit

$$S \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und Formel (2.2.25) aus [54], so folgt, dass die Weiten einer Spitze $z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ mit der Weite derjenigen Spitzenklasse L von $\Gamma_0^{(1)}(N)$ übereinstimmt, für die

$$L\langle\infty\rangle \quad \simeq \quad z$$

gilt ($\simeq$ bezeichnet die auf Seite 13 in Bemerkung 3.1 definierte Relation). Betrachten wir Untergruppen $\Gamma \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ für die $-E_2 \notin \Gamma$ gilt, dann ist

$$\left[\overline{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})_q} : \overline{\Gamma_q}\right] \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})_q : \Gamma_q\right].$$

In diesem Fall ist die Weite einer Spitzenklasse L also doppelt so groß wie die Weite der Spitze $z = L\langle\infty\rangle$. Siehe hierzu auch Bemerkung 3.1.

□

Zusammen mit der Bezeichnung

$$s_N^{(1)}(\underline{j};(\underline{v})) \quad = \quad \left|S_N^{(1)}(\underline{j};(\underline{v}))\right|.$$

erhalten wir nun die folgenden Lemmata, die explizite Werte für $s_N^{(1)}(\underline{j};(\underline{v}))$ und $t_N^{(1)}(\underline{j};(\underline{v}))$ liefern, also Aussagen über die Anzahlen und die Weiten von Spitzenklassen machen.

Lemma 2.20

$$\begin{aligned} i)\ s_{p^\nu}^{(1)}(1;(0)) &= 1, \\ ii)\ s_{p^\nu}^{(1)}(0;(v)) &= \varphi\left(p^{\min\{v,\nu-v\}}\right), \qquad 0 \le v < \nu, \\ iii)\ s_N^{(1)}(\underline{j};(\underline{v})) &= \prod_{i=1}^{t} s_{p_i^{\nu_i}}^{(1)}(j_i;(v_i)). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.21

$$\begin{aligned} i)\ t_{p^\nu}^{(1)}(1;(0)) &= p^\nu, \\ ii)\ t_{p^\nu}^{(1)}(0;(v)) &= \begin{cases} p^{\nu-2v}, & \textit{falls} \quad 0 < v \le \frac{\nu}{2}, \\ 1, & \textit{sonst}, \end{cases} \\ iii)\ t_N^{(1)}(\underline{j};(\underline{v})) &= \prod_{i=1}^{t} t_{p_i^{\nu_i}}^{(1)}(j_i;(v_i)). \end{aligned}$$

□

2.2.2 Spitzenklassen von $\mathbf{\Gamma_0^{(n)}(N)}$ im höherdimensionalen Fall

Betrachten wir nun den Fall der Dimension $n \ge 2$. Eine analoge Rechnung wie in Dimension 1,

$$\begin{aligned} & E_{2n} \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & g_1 - g_2 \\ & E_n \end{pmatrix} \\ = \ & E_{2n} \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & g_2 \end{pmatrix} E_{2n}, \end{aligned}$$

zeigt uns, dass alle Elemente aus $R_{p^\nu}^{(n)}(n)$ unter $\mathcal{P}$ auf die Spitzenklasse aus

$$S_{p^\nu}^{(n)}(n;(0)) = \left\{ \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \right\} \tag{2.14}$$

abgebildet werden. Ist nun

$$m = \begin{pmatrix} u + o + E_n & g \\ h & -u^t - o^t + E_n \end{pmatrix} \in N(I)$$

so gewählt, dass $w(I)m \in R_{p^\nu}^{(n)}(n-i)$ ist, dann zeigt eine kleine Rechnung unter Ausnutzung von

$$\begin{aligned}
(u+o+E_n)(-u-o+E_n) &= E_n,\\
(u+o)g &= 0_n,\\
g(u^t+o^t) &= 0_n,\\
h(u+o) &= 0_n,\\
hg &= 0_n,
\end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned}
& E_{2n}w(I)\begin{pmatrix} u+o+E_n & g \\ h & -u^t-o^t+E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -u-o+E_n & -g \\ & u^t+o^t+E_n \end{pmatrix}\\
= \;& E_{2n}w(I)\begin{pmatrix} E_n & \\ h & E_n \end{pmatrix}E_{2n}\\
= \;& E_{2n}\begin{pmatrix} I & E_n-I \\ I-E_n+h & I \end{pmatrix}E_{2n} \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

ist. In welcher der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ der angegebene Repräsentant m liegt, hängt also nur vom Eintrag h von m ab. Sei P eine Permutationsmatrix, so dass $PIP = \mathrm{Diag}(E_{n-\mathrm{rg}(I)}, 0_{\mathrm{rg}(I)})$ ist und überdies $P = P^t$ gilt. Dies ist möglich, da I eine Diagonalmatrix ist. Dann ist $P(E-I)P = \mathrm{Diag}(0_{n-\mathrm{rg}(I)}, E_{\mathrm{rg}(I)})$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} P & \\ & P \end{pmatrix} w(I) \begin{pmatrix} E_n & \\ h & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & \\ & P \end{pmatrix}\\
= \;& \begin{pmatrix} PIP & P(E_n-I)P \\ P(I-E_n)P+PhP & PIP \end{pmatrix}\\
= \;& \begin{pmatrix} E_{n-\mathrm{rg}(I)} & & & \\ & & & E_{\mathrm{rg}(I)} \\ h' & & E_{n-\mathrm{rg}(I)} & \\ & -E_{\mathrm{rg}(I)} & & \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dabei ist h' eine geeignete Matrix mit

$$h' \in \begin{cases} \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n-\mathrm{rg}(I), p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]}), & \text{falls } \nu \geq 2,\\ \{0_{n-\mathrm{rg}(I)}\}, & \text{falls } \nu = 1. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit $Q_{\mathrm{rg}(I)}$ die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} E_{n-\mathrm{rg}(I)} & & & \\ & & & E_{\mathrm{rg}(I)} \\ h' & & E_{n-\mathrm{rg}(I)} & \\ & -E_{\mathrm{rg}(I)} & & \end{pmatrix},$$

so erhalten wir folgendes Lemma:

Lemma 2.22
In der Menge

$$\bigcup_{i=0}^{n} Q_i$$

ist ein Repräsentantensystem der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$ *enthalten.*

$\square$

Für eine Matrix $A \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z})$ wollen wir mit $\widehat{A}$ die Matrix aus $\mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ bezeichnen, die aus A durch Reduktion der Einträge modulo p^ν entsteht. Genauso bezeichnet $\widehat{a}$ die Restklasse von a modulo p^ν.
Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) & \to & M_{p^\nu}^{(n)} \subset \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \times \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \mapsto & (\widehat{A}, \widehat{C}) \end{array}$$

wobei $M_{p^\nu}^{(n)}$ das Bild von ρ bezeichne. Da (siehe [51], Theorem 1) die Projektion $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ surjektiv ist, ist

$$M_{p^\nu}^{(n)} \quad = \quad \left\{ (\widehat{A}, \widehat{C}) \in (\mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}))^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} (A, C) \text{ ist ein teilerfremdes,} \\ \text{symmetrisches Paar} \end{array} \right\}.$$

Zum Begriff des teilerfremden symmetrischen Paares siehe [24], p. 287. Aufgrund der Definition der Menge $M_{p^\nu}^{(n)}$ ist die Abbildung ρ surjektiv. Da wir an $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu) \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) / \Delta(n, \mathbb{Z})$ interessiert sind, und

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ V & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & W \\ & (Z^{-1})^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XAZ + YCZ & \star \\ VAZ + TCZ & \star \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

ist, definieren wir auf $M_{p^\nu}^{(n)}$ die folgende Relation:

$$(\widehat{A}, \widehat{C}) \sim_n (\widehat{A'}, \widehat{C'}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Es existieren } X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}), Z \text{ die Reduktion} \\ \text{einer Matrix aus } \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) \text{ modulo } p^\nu, \\ \text{und } Y \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \text{ mit } (X^{-1}Y)^t = X^{-1}Y, \\ \text{so dass } (\widehat{A'}, \widehat{C'}) = (X\widehat{A}Z + Y\widehat{C}Z, (X^{-1})^t\widehat{C}Z) \text{ ist.} \end{array}$$

Es ist leicht nachprüfbar, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Wir erhalten eine Bijektion

$$\Gamma_0^{(n)}(p^\nu) \backslash \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) / \Delta(n, \mathbb{Z}) \quad \longrightarrow \quad M_{p^\nu}^{(n)} / \sim_n .$$

Wir bezeichnen mit $\widetilde{A}$ beziehungsweise $A^{\tilde{}}$ die Matrix aus $\mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}_{[p^\nu]})$, die aus $A \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ entsteht, indem man die Einträge von A als Elemente der Menge $\mathbb{Z}_{[p]} = \{0, \ldots, p^\nu - 1\}$ auffasst. Genauso bezeichnen wir für $a \in \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ mit $\widetilde{a}$ dasjenige Element aus $\mathbb{Z}_{[p^\nu]}$, für das $\widehat{\widetilde{a}} = a$ ist. Wir beschränken uns nun bis einschließlich Satz 2.29 darauf, dass p eine ungerade Primzahl ist.

Bemerkung 2.23
Die Einschränkung auf ungerade Primzahlen liegt darin begründet, dass wir im Folgenden die Klassifikation von quadratischen Formen über dem Körper $\mathbb{Q}_p$ der q-adischen Zahlen unter $\mathbb{Z}_p$-Äquivalenz, also Äquivalenz bezüglich p-adischen ganzen Zahlen, ausnützen werden. Hierbei heißen zwei quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$ zueinander $\mathbb{Z}_p$-äquivalent, falls es ein $U \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ gibt, so dass für die Gram-Matrizen G_1, G_2 der beiden Formen

$$G_1 \quad = \quad U^t G_2 U$$

gilt. Für den Fall $p = 2$ findet man die Klassifikation in [32], Chapter 15, Abschnitt 7 ausgearbeitet. Die Klassifikation ist hierbei im Vergleich zum Fall einer ungeraden Primzahl aber schwieriger und die Angabe eines Repräsentantensystem für Formen aufwendig. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb auf die Herleitung von Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(2^\nu)$, $\nu > 1, n \neq 1$ verzichtet. Da, wie wir noch sehen werden, Repräsentantensysteme für Spitzenklassen zur $\Gamma_0^{(n)}(2)$ bekannt sind, werden wir durch die Einschränkung auf ungerade Primzahlen nur für Level N, die durch 4 teilbar sind keine Repräsentantensysteme für die Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ angeben können. Siehe auch Bemerkung 2.31.

□

Um $M_{p^\nu}^{(n)} / \sim_n$ zu untersuchen, brauchen wir nun noch das folgende Lemma.

Lemma 2.24
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und p eine ungerade Primzahl. Ein Repräsentantensystem für die Operation

$$H \quad \mapsto \quad \widetilde{T\widehat{H}Z}$$

mit $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ und $Z \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ auf der Menge $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]})$ wird durch die Menge

$$\left\{ D \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \,\middle|\, \begin{array}{l} D = \mathrm{Diag}(p^{v_1}, \ldots, p^{v_t}, 0, \ldots, 0), \\ \nu > v_1 \geq \ldots \geq v_t \geq 1 \end{array} \right\} \quad \cup \quad \{0_n\}$$

beschrieben.

Beweis:
Sei $H \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]})$ gegeben. Hat H Rang null, so ist $\widehat{0}_n$ ein Repräsentant und $\widehat{0}_n$ ist das einzige Element diese Bahn. Habe H also einen Eintrag ungleich null. Jeder Eintrag von H wird von einer p-Potenz geteilt, also auch jeder Eintrag von $\widetilde{T\widehat{H}Z}$ und damit wird auch jeder Eintrag eines Repräsentanten von einer p-Potenz geteilt. Da H eine symmetrische Matrix mit ganzen Einträgen ist, können

wir $\widehat{H}$, wie Minkowski in [47], Band I, Kapitel I gezeigt hat, mittels einer Matrix $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ durch die Transformation $\widehat{U}^t \widehat{H} \widehat{U} = D$ auf Diagonalgestalt modulo p^ν bringen, also $D = \mathrm{Diag}(\epsilon_1 p^{v_1}, \ldots, \epsilon_t p^{v_t}, 0, \ldots, 0)$ für geeignete Einheiten $\epsilon_i \in (\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^*$ $i \in \{1, \ldots, t\}$. Dabei können wir annehmen, dass die Einträge von D nach p-Potenzen geordnet sind ($p^{v_i} \geq p^{v_{i+1}}$). Setzen wir nun

$$Z = \widehat{U} \quad \text{falls} \quad \det(U) = 1$$

ist beziehungsweise

$$Z = \mathrm{Diag}(-1, E_{n-1})\widehat{U} \quad \text{falls} \quad \det(U) = -1$$

ist und

$$T \;=\; \mathrm{Diag}(\epsilon_1^{-1}, \ldots, \epsilon_t^{-1}, E_{n-t})Z^t, \tag{2.17}$$

so ist $Z \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$, $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ und

$$\widetilde{T\widehat{H}Z} \;=\; \mathrm{Diag}(p^{v_1}, \ldots, p^{v_t}, 0_{n-t})$$

von der geforderten Form. Dass die angegebenen Repäsentanten nicht zur selben Bahn gehören, folgt aus dem Elementarteilersatz.

□

Wir wollen nun Lemma 2.22 und Lemma 2.24 dazu benutzen, um in jeder Bahn von $M_{p^\nu}^{(n)}/\sim_n$ einen einfachen Repräsentanten anzugeben. Aufgrund von Lemma 2.22 können wir annehmen, dass jede Bahn einen Repäsentanten hat, dessen Urbild unter ρ die Form $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ H & E_n \end{pmatrix}$ hat. Wir wollen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Repräsentant, den wir im Folgenden betrachten wollen aus Q_0 ist. Wir erhalten mit Hilfe von Lemma 2.24 indem wir $X = (T^{-1})^t$ setzen:

$$\begin{aligned} (E_n, \widetilde{\widehat{H}}) \;&\sim_n\; ((XZ + Y\widehat{H}Z)\tilde{\ }),\ (\widetilde{X^{-1})^t\widehat{H}Z}) \\ &\sim_n\; (A,\ \mathrm{Diag}(p^{v_1}, \ldots, p^{v_t}, 0_{n-t})), \end{aligned}$$

wobei

$$A \;=\; ((T^{-1})^t Z + Y\widehat{H}Z)\tilde{\ } \;=\; \mathrm{Diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, E_{n-t}) + \widetilde{Y\widehat{H}Z}$$

ist. Die zweite Gleichheit ergibt sich aus (2.17). Sei nun $Y = Y'T$, dann gilt

$$(T^tY)^t = T^tY \;\Leftrightarrow\; (T^tY'T)^t = T^tY'T \;\Leftrightarrow\; Y'^t = Y'.$$

Also ist die Forderung

$$Y \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \quad \text{mit} \quad (T^tY)^t = T^tY$$

äquivalent zu der Forderung

$$Y' \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}).$$

Folglich hat jede Bahn von $M_{p^\nu}^{(n)}/\sim_n$ einen Repräsentanten der Form

$$\begin{aligned}\Big((\mathrm{Diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, E_{n-t}) + Y'\mathrm{Diag}(p^{v_1}, \ldots, p^{v_t}, 0_{n-t}))^{\tilde{}}\ ,& \\ \mathrm{Diag}(p^{v_1}, \ldots, p^{v_t}, 0_{n-t})\,\Big).&\end{aligned} \tag{2.18}$$

Den rechten Eintrag, also $\mathrm{Diag}(p^{v_1}, \ldots, p^{v_t}, 0_{n-t})$, von 2.18 wollen wir nicht weiter vereinfachen. Es stellt sich nun noch das Problem für den linken Eintrag die richtigen Repräsentanten auszuwählen. Dabei bleibt uns nicht nur die Wahl eines $Y' \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$, sondern auch die geschickte Wahl der Matrix T beziehungsweise Z, also die geschickte Wahl der Einheiten $\epsilon_i,\ i \in \{1, \ldots, t\}$, insoweit dies von Lemma 2.24 zugelassen wird. Beachte hierbei, dass die Wahl von T beziehungsweise Z in Lemma 2.24 nicht eindeutig war. Wir werden dazu das folgende Lemma benutzen.

Lemma 2.25
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, p eine ungerade Primzahl und $\mu \in \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z},\ p \nmid \mu$ ein Nichtquadrat modulo p^ν. Ein Repräsentantensystem für die Operation

$$\widehat{H} \quad \mapsto \quad U^t\widehat{H}U$$

von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ auf

$$\left\{ \widehat{H} \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \,\middle|\, H \in \mathrm{MAT}^{\,\mathrm{sym}}(n, p\mathbb{Z}_{[p^\nu-1]}) \right\}$$

wird durch die Menge

$$\{0_n\} \quad \cup \quad \left\{ D \in \mathrm{MAT}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \,\middle|\, \begin{array}{l} D \textit{ ist Diagonalmatrix der Form} \\ \mathrm{Diag}(\epsilon_1 p^{v_1}, \epsilon_2 p^{v_2}, \ldots, \epsilon_t p^{v_t}, 0_{n-t}), \\ 1 \leq v_t \leq \ldots \leq v_1 \leq \nu, \\ \epsilon_1 \in \left\{ \begin{array}{cl} (\mathbb{Z}/p^{\nu-v_1}\mathbb{Z})^*, & \textit{falls} \quad t = n, \\ \{1, \mu\}, & \textit{falls} \quad t < n, \end{array} \right. \\ \epsilon_i \in \left\{ \begin{array}{ll} \{1, \mu\}, & \textit{falls} \quad i > 1,\ v_{i-1} < v_i, \\ \{1\}, & \textit{falls} \quad i > 1,\ v_{i-1} = v_i. \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

beschrieben.

Beweis:
In Lemma 2.24 wurde bereits gezeigt, dass wir uns im Fall $\mathrm{rg}(\widehat{H}) > 0$ anstelle von $\widehat{H}$ eine Diagonalmatrix der Form $D = \mathrm{Diag}(\epsilon_1 p^{v_1}, \ldots, \epsilon_t p^{v_t}, 0, \ldots, 0)$ vorgeben können. Da $n > 1$ ist, können wir Quadrate von Einheiten aus $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ auf den Einträgen von D verschieben. Hierzu wählen wir als Transformationsmatrix

$$U = \mathrm{Diag}(\prod_{i=2}^{n} \alpha_i^{-1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

falls $\mathrm{rg}(\widehat{H}) = n$ ist, und im Fall $\mathrm{rg}(\widehat{H}) \neq n$ wählen wir

$$U = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{-1}).$$

Dabei sind α_i, $i \in \{2, \ldots, n\}$ Einheiten von $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$. Transformieren wir nun D mit U, so erhalten wir bei richtiger Wahl der α_i als Repräsentanten nur noch Diagonalmatrizen, die, bis auf den Fall in dem $rg(\widehat{H}) = n$ ist, nur noch p-Potenzen oder ein Produkt aus einem fest vorgegebenen Nichtquadrat μ modulo p^ν und p-Potenzen als Einträge haben. Im Fall $rg(\widehat{H}) = n$ steht im oberen linken Eintrag von D ein Produkt aus einem invertierbaren Elementen aus $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ und p^{ν_1}. Somit können wir für ϵ_1 die invertierbaren Elemente aus $\mathbb{Z}/p^{\nu-\nu_1}\mathbb{Z}$ nehmen. Haben wir in D zwei Einträge μp^{v_i} und μp^{v_j}, beziehungsweise $\alpha_1 p^{v_1}$ und μp^{v_2}, wobei $\widetilde{\alpha}_1$ ein Nichtquadrat modulo p^ν ist, so können wir diese genau dann auf p^{v_i} und p^{v_j} beziehungsweise $\alpha'_1 p^{v_1}$ und p^{v_2} für ein geeinetes Quadrat α'_1 aus $\mathbb{Z}/p^{\nu-v_1}\mathbb{Z}$ transformieren, falls $v_i = v_j$, beziehungsweise $v_1 = v_2$ ist. Hieraus erhält man die im Lemma angegebene Menge von Repräsentanten. Die Eindeutigkeit der Repäsentanten ergibt sich aus [12], Chapter 8, Theorem 3.1.

□

Um nun in (2.18) die Wahlmöglichkeiten für die Einheiten $\epsilon_i, i \in \{1, \ldots, t\}$ weiter einzuschränken setzen wir wie in (2.17)

$$T = T'Z^t \text{ mit } T' = \mathrm{Diag}(\epsilon_1^{-1}, \ldots, \epsilon_t^{-1}, E_{n-t}) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}).$$

Wir haben bereits gesehen, dass bei geeigneter Wahl von T beziehungsweise Z

$$(E, \widehat{H}) \sim_n (T'^{-1} + Y'T'Z^t\widehat{H}Z,\ T'Z^t\widehat{H}Z) \tag{2.19}$$

mit $Y' \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ ist. Die Wahlfreiheit von Z, die uns hierbei Lemma 2.24 lässt, können wir nun ausnutzen und Z nach Lemma 2.25 so wählen, dass $T'Z\widehat{H}Z$ einer der Repräsentanten aus Lemma 2.25 ist. Damit werden die Wahlmöglichkeiten der Einheiten, die auf der Diagonalen von T' stehen eingeschränkt. Im Folgenden wollen wir nun noch den linken Eintrag im rechten Repräsentanten von (2.19)

$$T'^{-1} + Y'T'Z^t\widehat{H}Z = \mathrm{Diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, E_{n-t}) + Y'\mathrm{Diag}(p^{\nu_1}, \ldots, p^{\nu_t}, 0_{n-t})$$

vereinfachen. Wir betrachten hierfür die durch $\sim_n$ implizierte Relation

$$A \approx_n A' \quad \Leftrightarrow \quad A = A' + Y'P$$

mit

$$\begin{aligned} A' &= \mathrm{Diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\mathrm{rg}(H)}, 0_{n-\mathrm{rg}(H)}) \\ P &= \mathrm{Diag}(p^{v_1}, \dots, p^{v_{\mathrm{rg}(H)}}, 0_{n-\mathrm{rg}(H)}), \end{aligned}$$

und $A'P$ ist einer der Repräsentanten aus Lemma 2.25 . Da A' und P Diagonalmatrizen sind, und wir auch annehmen können, dass A Diagonalgestalt hat, genügt es für Y' Diagonalform anzunehmen und die einzelnen Einträge von $A' + Y'P$ zu betrachten. Sie haben die Gestalt $\epsilon_i + y_i p^{v_i}, i \in \{1, \dots, t\}$ mit $y_i \in \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$. Nun ist ϵ_i genau dann ein Quadrat beziehungsweise ein Nichtquadrat einer Einheit modulo p^{v_i}, falls $\epsilon_i + y_i p^{v_i}$ ein Quadrat beziehungsweise ein Nichtquadrat einer Einheit modulo p^{v_i} ist. Siehe hierzu zum Beispiel [57], Satz IV. C 2. Es gelten dann für zwei Elemente

$$\mathrm{Diag}(\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{i\mathrm{rg}(H)}, 0_{n-\mathrm{rg}(H)}), \quad i \in \{1, 2\}$$

die Aussagen:

i) Falls $\mathrm{rg}(H) < n$ ist, ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{Diag}(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1\mathrm{rg}(H)}, 0_{n-\mathrm{rg}(H)}) \approx_n \mathrm{Diag}(\epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2\mathrm{rg}(H)}, 0_{n-\mathrm{rg}(H)}) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \epsilon_{1j} \text{ und } \epsilon_{2j} \text{ liegen für } j \in \{1, \dots, n\} \\ \text{in derselben Quadratklasse modulo } p. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.20}$$

ii) Falls $\mathrm{rg}(H) = n$ ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Diag}(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1\mathrm{rg}(H)}, 0_{n-\mathrm{rg}(H)}) \approx_n \mathrm{Diag}(\epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2\mathrm{rg}(H)}, 0_{n-\mathrm{rg}(H)}) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \epsilon_{1j} \equiv \epsilon_{2j} \bmod p^{\min\{\nu - v_1, v_n\}}, \\ \epsilon_{1j} \text{ und } \epsilon_{2j} \text{ liegen für } j \in \{2, \dots, n\} \\ \text{in derselben Quadratklasse modulo } p. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Damit erhalten wir eine Menge $MR_{p^\nu}^{(n)}$ von Repräsentanten, die ein Repräsentantensystem von $M_{p^\nu}^{(n)}/\sim_n$ enthält. Dass diese Menge bereits ein Repräsemtamtensystem ist, werden wir später in Satz 2.29 zeigen. Genauer werden wir dort eine Menge von Matrizen angeben, die paarweise unterschiedliche Spitzenklassen repräsentieren. Die Anzahl dieser Matrizen bildet eine untere Abschätzung für die Anzahl der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ beziehungsweise für die Klassen von $M_{p^\nu}^{(n)}/\sim_n$. Die obere Abschätzung für die Anzahl von Spitzenklassen liefert die gerade hergeleitete Menge $MR_{p^\nu}^{(n)}$, die ein Repräsentantensystem von $M_{p^\nu}^{(n)}/\sim_n$

enthält. Beide Abschätzungen stimmen überein. Bevor wir Satz 2.29 formulieren und beweisen werden wir zunächst noch einige Notationen bereitstellen und explizite Formeln für Anzahlen von Spitzenklassen angeben. Genauer gesagt werden wir die Elemente von $MR_{p^\nu}^{(n)}$ zählen. Nun bezeichne

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n^{(n)}(\nu) &= \{(0)\}, \\
\mathcal{E}_l^{(n)}(\nu) &= \left\{(v_1, \dots, v_{n-l}) \in \mathbb{N}^{n-l} |\ \nu > v_1 \geq \dots \geq v_{n-l} \geq 0\right\}, \\
&\quad \text{für } l \in \{0, \dots, n-1\},
\end{aligned}$$

und für

$$(v_1, \dots, v_{n-l}) \in \mathcal{E}_l^{(n)}, \quad l \neq n$$

sei

$$q(v_1, \dots, v_{n-l}) = \begin{cases} 0, \text{ falls } v_1 = 0, \\ 1, \text{ falls } v_2 = 0,\ v_1 \neq 0, \\ 1, \text{ falls } n - l = 1,\ v_1 \neq 0 \\ 1 + \sharp\left(\{v_i |\ v_i \neq v_{i+1},\ i \in \{1, \dots, n-l-1\}\}\right), \text{ sonst.} \end{cases}$$

Im Falle $v_{n-l} = 0$ sei

$$s_{p^\nu}^{(n)}\left(l; (v_1, \dots, v_{n-l})\right) = 2^{q(v_1, \dots, v_{n-l})}, \tag{2.22}$$

und falls $v_{n-l} \neq 0$ ist, sei

$$s_{p^\nu}^{(n)}\left(0; (v_1, \dots, v_{n-l})\right) = 2^{q(v_1, \dots, v_{n-l})-1} \varphi\left(p^{\min\{\nu - v_1, v_{n-l}\}}\right). \tag{2.23}$$

Des weiteren sei

$$s_{p^\nu}^{(n)}\left(n; (0)\right) = 1. \tag{2.24}$$

Wir erhalten damit die folgende Proposition, die eine explizite Formel für die Anzahl von Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$ angibt:

Proposition 2.26
Ist p eine ungerade Primzahl, so ist die Anzahl der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$ durch die Formel

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{(v_1, \dots, v_{n-l}) \in \mathcal{E}_l^{(n)}(\nu)} s_{p^\nu}^{(n)}\left(l; (v_1, \dots, v_{n-l})\right)$$

gegeben.

Beweis:
Die Zahl $s_{p^\nu}^{(n)}(l;(v_1,\ldots,v_{n-l}))$ *gibt die Anzahl der Repräsentanten aus Lemma 2.25 an, die Rang* l *haben und dessen* i*-ter Diagonaleintrag den Exponenten* v_i *hat, falls* $v_i \neq 0$ *ist und sonst* 0*. Die Menge aller möglichen Exponenten ist gerade*

$$\bigcup_{l=0}^{n} \mathcal{E}_l^{(n)}(\nu).$$

□

Im Fall $n = 1$ stimmt die Aussage der Proposition mit der von Lemma 2.20 überein.

Beispiel 2.27
Für $n = 3$ *und* $N = 5^6$ *sind die Anzahlen der Elemente von* $S_{5^6}^{(3)}(l;(\underline{v}))$ *in Tabelle 2.2 aufgelistet. Für* $n = 2$ *und* $N = 5^6$ *können die Anzahlen der Elemente von* $S_{5^6}^{(2)}(l-1;(\underline{v}))$ *in den Zeilen für* $l \in \{3,2,1\}$ *abgelesen werden und für* $n = 1$ *und* $N = 5^6$ *findet man die Anzahlen der Elemente von* $S_{5^6}^{(2)}(l-2;(\underline{v}))$ *in den Zeilen für* $l \in \{3,2\}$*.*

□

Indem wir die Summe $\sum\limits_{k=a}^{b} = 0$ setzen, falls $b < a$ ist, erhalten wir aus Proposition 2.26 speziell für $n = 2$ und $n = 3$:

Korollar 2.28
Ist p *eine ungerade Primzahl, so ist die Anzahl der Spitzenklassen von* $\Gamma_0^{(2)}(p^\nu)$ *gleich*

$$2\nu + 1 + 2\left(\sum_{j=1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{\nu-j,j\}}) + \sum_{j=1}^{\nu-2}\sum_{i=j+1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{\nu-i,j\}})\right).$$

Also

$$\begin{aligned} 3, &\quad \textit{falls} \quad \nu = 1,\\ 2p+3, &\quad \textit{falls} \quad \nu = 2,\\ -2\nu - 1 + 2p^{\frac{\nu}{2}} + 8\frac{p^{\frac{\nu}{2}}-1}{p-1}, &\quad \textit{falls} \quad 2|\nu,\ \nu \geq 4,\\ -2\nu - 1 + 6p^{\frac{\nu-1}{2}} + 8\frac{p^{\frac{\nu-1}{2}}-1}{p-1}, &\quad \textit{falls} \quad 2\nmid\nu,\ \nu \geq 3. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(3)}(p^\nu)$ *für ungerade Primzahlen* p *beträgt*

$$\begin{aligned} 2\nu^2 + 2 + 3\sum_{i=1}^{\nu-1}\varphi\left(p^{\min\{i,\nu-i\}}\right) + 6\sum_{j=1}^{\nu-2}\sum_{i=j+1}^{\nu-1}\varphi\left(p^{\min\{i,\nu-j\}}\right)&\\ +4\sum_{k=1}^{\nu-3}\sum_{j=k+1}^{\nu-2}\sum_{i=j+1}^{\nu-1}\varphi\left(p^{\min\{i,\nu-k\}}\right).& \end{aligned}$$

l	$\underline{v}$					$s_{5^6}^{(3)}(l;(\underline{v}))$					Summe
3	(0)					1					1
2	(0)					1					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	4	20	100	20	4	149
1	(00)					1					
	(11)	(22)	(33)	(44)	(55)	4	20	100	20	4	149
	(10)					2					
	(20)	(21)				2	8				
	(30)	(31)	(32)			2	8	40			
	(40)	(41)	(42)	(43)		2	8	40	40		
	(50)	(51)	(52)	(53)	(54)	2	8	8	8	8	186
0	(000)					1					
	(111)	(222)	(333)	(444)	(555)	4	20	100	20	4	149
	(100)					2					
	(200)	(211)				2	8				
	(300)	(311)	(322)			2	8	40			
	(400)	(411)	(422)	(433)		2	8	40	40		
	(500)	(511)	(522)	(533)	(544)	2	8	8	8	8	186
	(110)					2					
	(220)	(221)				2	8				
	(330)	(331)	(332)			2	8	40			
	(440)	(441)	(442)	(443)		2	8	40	40		
	(550)	(551)	(552)	(553)	(554)	2	8	8	8	8	186
	(210)					4					
	(310)	(320)				4	4				
	(410)	(420)	(430)			4	4	4			
	(510)	(520)	(530)	(540)		4	4	4	4		40
	(321)					16					
	(421)	(431)				16	16				
	(521)	(531)	(541)			16	16	16			96
	(432)					80					
	(532)	(542)				16	16				112
	(543)					16					16
											$\sum = 1270$

Tabelle 2.2: Verteilung der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(3)}(5^6)$

Beweis:
Wir betrachten zunächst den Fall $n = 3$. Die folgende Tabelle listet für $l \in \{0, \dots, \nu\}$ und eine bestimmte Auswahl für $\underline{i}$ die Anzahlen der Spitzenklassen von $\bigcup_{\underline{i}} S_{p^\nu}^{(3)}(l; (\underline{i}))$ auf. Die Summe der Einträge der rechten Spalte ergibt demnach die Anzahl der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(3)}(p^\nu)$, was mit dem in der Aussage angegebenen Wert übereinstimmt. Im Fall $n = 2$, genügt es die Einträge der rechten Spalte für $l \in \{1, 2, 3\}$ aufzusummieren.

l	$\underline{i}$	$\sum_{\underline{i}} s_{p^\nu}^{(3)}(l, (\underline{i}))$
3	(0)	1
2	(0)	1
	$\{(i_1) \mid i_1 \in \{1, \dots, \nu-1\}\}$	$\sum_{i=1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{i,\nu-i\}})$
1	$(0, 0)$	1
	$\{(i_1, 0) \mid i_1 \in \{1, \dots, \nu-1\}\}$	$2(\nu-1)$
	$\{(i_1, i_1) \mid i_1 \in \{1, \dots, \nu-1\}\}$	$\sum_{i=1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{i,\nu-i\}})$
	$\{(i_1, i_2) \mid i_1, i_2 \in \{1, \dots, \nu-1\}, i_1 > i_2\}$	$2\sum_{j=1}^{\nu-2} \sum_{i=j+1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{j,\nu-i\}})$
0	$(0, 0, 0)$	1
	$\{(i_1, 0, 0) \mid i_1 \in \{1, \dots, \nu-1\}\}$	$2(\nu-1)$
	$\{(i_1, i_1, 0) \mid i_1 \in \{1, \dots, \nu-1\}\}$	$2(\nu-1)$
	$\{(i_1, i_2, 0) \mid i_1, i_2 \in \{1, \dots, \nu-1\}, i_1 > i_2\}$	$2(\nu-2)(\nu-1)$
	$\{(i_1, i_1, i_1) \mid i_1 \in \{1, \dots, \nu-1\}\}$	$\sum_{i=1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{i,\nu-i\}})$
	$\{(i_1, i_2, i_2) \mid i_1, i_2 \in \{1, \dots, \nu-1\}, i_1 > i_2\}$	$2\sum_{j=1}^{\nu-2} \sum_{i=j+1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{j,\nu-i\}})$
	$\{(i_1, i_1, i_2) \mid i_1, i_2 \in \{1, \dots, \nu-1\}, i_1 > i_2\}$	$2\sum_{j=1}^{\nu-2} \sum_{i=j+1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{j,\nu-i\}})$
	$\{(i_1, i_2, i_3) \mid i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, \nu-1\},$ $i_1 > i_2 > i_3\}$	$4\sum_{k=1}^{\nu-3} \sum_{j=k+1}^{\nu-2} \sum_{i=j+1}^{\nu-1} \varphi(p^{\min\{k,\nu-i\}})$

□

Im folgenden Satz wollen wir nun Repräsentantensysteme der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$ angeben.

Satz 2.29
Sei p eine ungerade Primzahl, und $\mu \in \mathbb{Z}$, $p \nmid \mu$ ein Nichtquadrat modulo p^ν sowie

$$\begin{aligned}&\mathbb{Z}^*_{[p^{\min\{v_n,\nu-v_1\}}]}\\ = \ &\left\{ a \in \mathbb{Z}_{[p^{\min\{v_n,\nu-v_1\}}]} \,\middle|\, a \,(\mathrm{mod}\, p^{\min\{v_n,\nu-v_1\}}) \in \left(\mathbb{Z}/p^{\min\{v_n,\nu-v_1\}}\mathbb{Z}\right)^* \right\}.\end{aligned}$$

Dann beschreibt die Menge

$$S^{(n)}_{p^\nu}(n;(0)) \cup \bigcup_{l=0}^{n-1} \bigcup_{(v_1,\ldots,v_{n-l})\in\mathcal{E}^{(n)}_l(\nu)} S^{(n)}_{p^\nu}(l;(v_1,\ldots,v_{n-l})) \tag{2.25}$$

ein vollständiges Repräsentantensystem der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$. Dabei ist

$$\begin{aligned}&S^{(n)}_{p^\nu}(l;(v_1,\ldots,v_{n-l}))\\ = \ &\left\{ \begin{pmatrix} E_{n-l} & & & \\ & & & E_l \\ D & & E_{n-l} & \\ & -E_l & & \end{pmatrix} \,\middle|\, D = \mathrm{Diag}(\epsilon_1 p^{v_1},\ldots,\epsilon_{n-l}p^{v_{n-l}}) \right\},\end{aligned}$$

mit

$$\epsilon_1 \in \begin{cases} \left\{\mathbb{Z}^*_{[p^{\min\{v_{n-l},\nu-v_1\}}]}\right\}, & \textit{falls } v_{n-l} \neq 0, \\ \{1,\mu\}, & \textit{falls } v_{n-l} = 0, v_1 \neq 0, \\ \{0\}, & \textit{falls } v_1 = 0, \end{cases}$$

und für $i \in \{2,\ldots,n-l\}$

$$\epsilon_i \in \begin{cases} \{0\}, & \textit{falls } v_i = 0, \\ \{1,\mu\}, & \textit{falls } v_{i-1} > v_i \neq 0, \\ \{1\}, & \textit{falls } v_{i-1} = v_i \neq 0. \end{cases}$$

Beweis:
Seien zwei Elemente aus der in (2.25) definierten Menge vorgegeben. Sie können aufgrund von Lemma 2.15, nur dann dieselbe Spitzenklasse repräsentieren, wenn für beide der untere linke $n \times n$-Block den gleichen Rang modulo p hat. Des weiteren lässt sich in (2.16) erreichen, dass durch geeignete Wahl von unimodularen Matrizen T und Z die Matrix TCZ Elementarteilerform hat. Da nun aber in (2.16) V der untere linke Block einer Matrix aus $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$ ist, also nur Einträge hat, die durch p^ν teilbar sind, und die Einträge der Repräsentanten von Spitzenklassen nur durch positive p-Potenzen kleiner als p^ν) teilbar sind, sehen wir, dass zwei Repräsentanten nur dann dieselbe Spitzenklasse repräsentieren können, wenn der ij-te Eintrag einer Spitzenklasse von derselben p-Potenz geteilt wird.

In anderen Worten: Zwei Elemente aus (2.25) können nur dann dieselbe Spitzenklasse repräsentieren, wenn sie für vorgegebenes l und v_i, $i \in \{1, \ldots, n-l\}$ aus $S_{p^\nu}^{(n)}(l; (v_1, \ldots, v_{n-l}))$ sind. Nehmen wir nun an, es gäbe zwei Repräsentanten

$$M_i = \begin{pmatrix} E_{n-l} & & & \\ & & & E_l \\ D_i & & E_{n-l} & \\ & -E_l & & \end{pmatrix}$$

mit $D_i = \mathrm{Diag}(\epsilon_{i1} p^{v_1}, \ldots, \epsilon_{i\, n-l} p^{v_{n-l}})$, $i \in \{1, 2\}$ aus $S_{p^\nu}^{(n)}(l; (v_1, \ldots, v_{n-l}))$, die dieselbe Spitzenklasse repräsentieren, sich aber in mindestens einem Eintrag durch ein ϵ_{ij} unterscheiden. Seien

$$X_i = (\epsilon_{i\,1}, \ldots, \epsilon_{i\,n-l}, E_l), \quad i \in \{1, 2\}$$

und $V_i \in \mathrm{MAT}(n, p^\nu \mathbb{Z})$, $i \in \{1, 2\}$, so dass $(X_i, p^\nu V_i)$ jeweils ein teilerfremdes symmetrisches Paar bildet. Es existieren dann (siehe [24], Hilfssatz 7.1) symplektische Matrizen G_i', $i \in \{1, 2\}$ der Form

$$G_i' = \begin{pmatrix} X_i & Y_i \\ p^\nu V_i & T_i \end{pmatrix}.$$

Auch die Matrizen

$$G_i = \begin{pmatrix} X_i & p^\nu Y_i \\ V_i & T_i \end{pmatrix}$$

sind dann symplektisch. Es gilt

$$\widehat{T_i} = \widehat{X_i^{-1}}, \ i \in \{1, 2\}$$

und da V_i für $i \in \{1, 2\}$ aus $\mathrm{MAT}(n, p^\nu \mathbb{Z})$ sind, folgt dass $G_i \in \Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$, $i \in \{1, 2\}$ gilt. Die Matrizen

$$G_i M_i E_{2n} = \begin{pmatrix} X_i + p^\nu Y_i D_i & p^\nu Y \\ V_i + T_i D_i & T \end{pmatrix}$$

repräsentiert dieselbe Spitzenklasse wie M_i, so dass

$$(X_i + p^\nu Y_i D_i, V_i + T_i D_i) \sim_n (X_i, P)$$

mit

$$P = \mathrm{Diag}(p^{v_1}, \ldots, p^{v_{n-l}}, 0_{n-\mathrm{rg}(H)})$$

ist. Weil M_1 und M_2 dieselbe Spitzenklassen repräsentieren, ist

$$(X_1, P) \sim_n (X_2, P),$$

beziehungsweise

$$X_1 \quad \approx_n \quad X_2.$$

Da nun aber für $i \in \{1,2\}$ die Zahlen ϵ_{i1} im Intervall $[0, p^{\min\{\nu_{n-l}, \nu-\nu_1\}})$ und die Zahlen ϵ_{ij}, $j \geq 2$ im Intervall $[0, p^\nu)$ liegen und wegen den Gleichungen (2.20) und (2.21) folgt, dass

$$\epsilon_{1j} \quad = \quad \epsilon_{2j} \quad j \in \{1, \ldots, l\}$$

gelten muss: ein Widerspruch zur Wahl der beide Repräsentanten. Da die Anzahl der Elemente aus (2.25) mit der in Proposition 2.26 angegebenen Anzahl der Elemente von $M_{p^\nu}^{(n)}/\sim_n$ übereinstimmt, ist der Satz bewiesen.

□

Da Spitzenklassen für die Untergruppen $\Gamma_0^{(n)}(2)$ bekannt sind, und wir den Fall $2|N$ bisher ausgeschlossen haben, übernehmen wir die Spizenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(2)$ aus [6]. Sei

$$\begin{aligned} S_2^{(n)}(n,(0)) &= \left\{ J_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix} \right\}, \\ S_2^{(n)}(l,(0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} E_{n-l} & & & \\ & & & E_l \\ & & E_{n-l} & \\ & -E_l & & \end{pmatrix} \right\} \quad \text{für} \;\; 0 \leq l < n, \end{aligned}$$

sowie

$$s_N^{(n)}(n,(0)) \;=\; s_N^{(n)}(l,(0)) \;=\; 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq l < n.$$

Nun können wir mit Hilfe der starken Approximation, siehe Abschnitt 2.2.3 auch die Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$, $4 \nmid N$ berechnen. Bezeichnen wir für eine natürliche Zahl $N = \prod\limits_{i=1}^{t} p_i^{\nu_i}$, $4 \nmid N$, mit $S_N^{(n)}(\underline{j}; \underline{v})$ die aus den Mengen $S_{p_i^{\nu_i}}^{(n)}(j_i; (\underline{v_i}))$ durch Liftung erhaltene Menge, also

$$S_N^{(n)}(\underline{j}; \underline{v}) \quad \equiv \quad S_{p_i^{\nu_i}}^{(n)}(j_i; (\underline{v_i})) \; (\operatorname{mod} \Gamma_0^{(n)}(p_i^{\nu_i})), \;\; i \in \{1, \ldots, t\}.$$

Dann ist die Anzahl der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ durch

$$|S_N^{(n)}(\underline{j}; \underline{v})| \quad = \quad s_N^{(n)}(\underline{j}; \underline{v}) \quad = \quad \prod_{i=1}^{t} s_{p_i^{\nu_i}}^{(n)}(j_i; (\underline{v_i})) \qquad (2.26)$$

gegeben. Dies verallgemeinert zusammen mit den Formeln (2.22), (2.23) und (2.24) die Aussage von Lemma 2.20.

Beispiel 2.30
Wir wollen nun untersuchen, wie sich die in Beispiel 2.14 angegebenen 2460375 *Repräsentanten von* $R^{(2)}_{3^3 5^2}(2,0)$ *unter* $\mathcal{P}$ *auf Spitzenklassen von* $\Gamma_0^{(2)}(3^3 5^2)$ *verteilen. Es ist*

$$\begin{aligned} \mid \Gamma_0^{(2)}(3^3)\backslash \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})/\Delta(2,\mathbb{Z}) \mid &= 19, \\ \mid \Gamma_0^{(2)}(5^2)\backslash \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})/\Delta(2,\mathbb{Z}) \mid &= 13, \end{aligned}$$

also,

$$\mid \Gamma_0^{(2)}(3^3 5^2)\backslash \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})/\Delta(2,\mathbb{Z}) \mid \ = \ 19 \cdot 13 \ = \ 247.$$

Betrachten wir $R^{(2)}_{3^3}(2)$ *und* $R^{(2)}_{5^2}(0)$. *Aus Aussage (2.14) folgt, dass es zu* $R^{(2)}_{3^3}(2)$ *genau eine Spitzenklasse in* $S^{(2)}_{3^3}(2;(0))$ *gibt:*

$$S^{(2)}_{3^3}(2;(0)) \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix} \right\}.$$

$R^{(2)}_{5^2}(0)$ *liefert die* 7 *Spitzenklassen*

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{5^2}(0;(0,0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ S^{(2)}_{5^2}(0;(1,0)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 5a & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \middle|\ a \in \{1,2\} \right\} \ \textit{und} \\ S^{(2)}_{5^2}(0;(1,1)) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 5a & & 1 & \\ & 5b & & 1 \end{pmatrix} \middle|\ (a,b) \in \left\{ \begin{matrix} (1,1),(2,1), \\ (3,1),(4,1) \end{matrix} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Die Elemente aus $R^{(2)}_{675}(2,0)$ *werden von* $\mathcal{P}$ *auf* 7 *Spitzenklassen abgebildet. Diese Spitzenklassen können mit dem in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen Algorithmus berechnt werden. Es sind die Elemente der drei folgenden Mengen:*

$$S^{(2)}_{3^3 5^2}(2,0;(0),(0,0)) \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} 351 & & 8451 & \\ & 351 & & 8451 \\ 350 & & 8425 & \\ & 350 & & 8425 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S^{(2)}_{3^3 5^2}(2,0;(0),(1,0)) = \left\{ \begin{pmatrix} 351 & & b & \\ & 351 & & 8451 \\ c & & d & \\ & 350 & & 8425 \end{pmatrix} \middle| (b,c,d) \in X \right\}$$

$$\textit{mit } X = \left\{ \begin{matrix} (-13218875, 80, -3012849), \\ (1893700, 485, 2616651) \end{matrix} \right\}$$

$$S^{(2)}_{3^3 5^2}(2,0;(0),(1,1)) = \left\{ \begin{pmatrix} 351 & & b & \\ & 351 & & -13218875 \\ c & & d & \\ & 80 & & -3012849 \end{pmatrix} \middle| (b,c,d) \in Y \right\}$$

$$\textit{mit } Y = \left\{ \begin{matrix} (-13218875, 80, -3012849), \\ (1893700, 485, 2616651), \\ (4266325, 215, 2613276), \\ (-8377775, 620, -14798349) \end{matrix} \right\}.$$

□

Bemerkung 2.31

i) *Zum Beweis von Satz 2.29 und Lemma 2.24 wurde der Elementarteilersatz verwendet. Wollen wir also die angegebenen Repräsentantensysteme für Spitzenklassen auch auf den Zahlkörperfall übertragen, so kann dies mit den hier formulierten Beweisen nur im Fall der Klassenzahl* 1 *gelingen. Betrachten wir spezieller imaginärquadratische Erweiterungen, so sind dies gerade die Zahlkörper*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \ \textit{mit } d \in \{1,2,3,7,11,13,43,67,163\}.$$

Ob eine Verallgemeinerung auf Zahlkörper mit Klassenzahl größer als 1 *möglich ist, ist hierbei noch offen.*

ii) *Für die Primzahlpotenzen* $2^\nu, \nu > 1$ *wurden keine Repräsentantensysteme für Spitzenklassen angegeben. Die Stellen, an denen hier bei den Ausführungen Diagonalmatrizen auftreten, müssen diese durch verallgemeinerte Diagonalmatrizen mit* 2×2 *Blockmatrizen auf der Diagonale ersetzt werden. Dies zu tun wird Aufgabe für die Zukunft bleiben.*

□

2.2.3 Starke Approximation von Spitzenklassen

In Satz 2.29 werden die Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$ für eine ungerade Primzahl p angegeben. Zusammen mit den $n+1$ Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(2)$, die zum Beispiel im Anschluss an Satz 2.29 beschrieben werden, kann man hieraus mit Hilfe der

starken Approximation (1.2) auch Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$, $4 \nmid N$ berechnen. In diesem Abschnitt wollen wir einen Algorithmus zur expliziten Berechnung dieser Spitzenklassen beschreiben. Da weder die formalen Mittel zum Beschreiben eines Algorithmus bereitgestellt wurden, noch an dieser Stelle auf technische Details eingegangen werden soll, beschränken wir uns dabei auf eine nicht formale Beschreibung.
Seien

$$M_i \;=\; \begin{pmatrix} A^{(i)} & B^{(i)} \\ C^{(i)} & D^{(i)} \end{pmatrix}$$

Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p_i^{\nu_i})$, $i \in \{1,\dots,m\}$. Gesucht ist eine Spitzenklasse M von $\Gamma_0^{(n)}(N)$,

$$N \;=\; \prod_{i=1}^{m} p_i^{\nu_i},$$

so dass

$$M \;\equiv\; M_i \,(\operatorname{mod} \Gamma_0^{(n)}(p_i^{\nu_i})) \quad i \in \{1,\dots,m\}$$

ist. Zunächst liften wir mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes die Spitzenklassen M_i, $i \in \{1,\dots,m\}$ zu einer Matrix

$$M' \;=\; \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}.$$

Dabei soll die Matrix M' an der jk-ten Stelle einen Eintrag Null haben, wenn die Einträge der jk-ten Stellen von allen Spitzenklassen von M_i Null sind. Da alle Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)$ für eine geeignetes i die Form

$$\begin{pmatrix} E_i & & & \\ & & & E_{n-i} \\ H & & E_i & \\ & -E_{n-i} & & \end{pmatrix}, \qquad H \text{ ist Diagonalmatrix}$$

haben, sind die vier Blöcke A', B', C' und D' von M' jeweils Diagonalmatrizen. Des weiteren wollen wir an die Matrix M' die Forderung stellen, dass für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ jeweils $\operatorname{ggt}(a'_{ii}, c'_{ii}) = 1$ gilt. Da für alle Primteiler p von N jeweils

$$\begin{aligned} (a'_{ii}, c'_{ii}) &\equiv (0,-1) \,(\operatorname{mod} p) \text{ oder} \\ (a'_{ii}, c'_{ii}) &\equiv (1,0) \,(\operatorname{mod} p) \end{aligned}$$

gilt, kann dies immer erreicht werden indem man ein geeignetes Vielfaches von N zu einem der Einträge a'_{ii} oder c'_{ii} addiert. Als nächstes berechnen wir für jedes

$i \in \{1, \ldots, m\}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus ganze Zahlen β_i, und δ_i, so dass

$$\delta_i a'_{ii} - \beta_i c'_{ii} \;=\; 1$$

ist. Setzen wir nun

$$\begin{aligned} a_{ii} &= a'_{ii}, \\ b_{ii} &= b'_{ii} + \beta_i(1 + a'_{ii}d'_{ii} - b'_{ii}c'_{ii}), \\ c_{ii} &= c'_{ii}, \\ d_{ii} &= d'_{ii} + \delta_i(1 + a'_{ii}d'_{ii} - b'_{ii}c'_{ii}), \end{aligned}$$

dann ist

$$M \;=\; \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{Diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) & \mathrm{Diag}(b_{11}, \ldots, b_{nn}) \\ \mathrm{Diag}(c_{11}, \ldots, c_{nn}) & \mathrm{Diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) \end{pmatrix}$$

die gesuchte starke Approximation. Es bleibt zu zeigen, dass M symplektisch ist. Die Relationen

$$\begin{aligned} A^tC &= C^tA \\ B^tD &= D^tB \end{aligned} \tag{2.27}$$

sind erfüllt da A, B, C und D Diagonalmatrizen sind. Um zu zeigen, dass M symplektisch ist genügt es somit nachzuprüfen, dass auch

$$A^tD - C^tB = E_n \tag{2.28}$$

gilt. Wiederum folgt aus der Diagonalgestalt von A, B, C und D, dass es genügt für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Gleichung

$$a_{ii}d_{ii} - c_{ii}b_{ii} = 1$$

nachzuprüfen. Diese ist aber erfüllt da

$$\begin{aligned} & a_{ii}d_{ii} - c_{ii}b_{ii} \\ = \; & a'_{ii}(d'_{ii} + \delta_i(1 + a'_{ii}d'_{ii} - b'_{ii}c'_{ii})) - c'_{ii}(b'_{ii} + \beta_i(1 + a'_{ii}d'_{ii} - b'_{ii}c'_{ii})) \\ = \; & a'_{ii}d'_{ii} + \delta_i a'_{ii} + \delta_i a'_{ii}(a'_{ii}d'_{ii} - b'_{ii}c'_{ii}) - c'_{ii}b'_{ii} - \beta_i c'_{ii} - \beta_i c'_{ii}(a'_{ii}d'_{ii} - b'_{ii}c'_{ii}) \\ = \; & \delta_i a'_{ii} - \beta_i c'_{ii} + a'_{ii}d'_{ii} - c'_{ii}b'_{ii} + (\delta_i a'_{ii} - \beta_i c'_{ii})(a'_{ii}d'_{ii} - b'_{ii}c'_{ii}) \\ = \; & 1 \end{aligned}$$

ist.

Bemerkung 2.32

i) *Es wäre wünschenswert auch einen Algorithmus für die starke Approximation von Elementen von $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ anzugeben. Nehmen wir an, dass*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

eine Liftung von Elementen M_i aus $\Gamma_0^{(n)}(p_i^{\nu_i})\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$, $N = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\nu_i}$ nach dem Chinesischen Restsatz ist, bei der wie im obigen Algorithmus möglichst viele Nullen erzeugt wurden. Die beiden Blockmatrizen A und B vom M sind dann Diagonalmatrizen. C und D müssen aber keine Diagonalmatrizen mehr sein und die beiden Relationen aus (2.27) sind somit nicht automatisch erfüllt. Auch in (2.28) müssen für eine starke Approximation im Allgemeinen mehr Bedingungen erfüllt werden als im Fall von Spitzenklassen. Es bleibt zu vermuten, dass man hier aber auch mit Hilfe des euklidischen Algorithmus und des chinesischen Restsatzes jeweils eine starke Approximation konstruieren kann. In diesem Zusammenhang sei auch noch auf [24], Hilfssatz 7.1 verwiesen, der eine Konstruktion liefert um ein teilerfremdes symmetrisches Paar zu einer symplektischen Matrix zu ergänzen. Nutzen wir zum Beispiel das Paar (C, D) um diese Konstruktion durchzuführen, ist aber a priori nicht klar, ob die so erhaltene symplektische Matrix auch die gesuchte starke Approximation ist.

ii) *Wir wollen hier noch eine etwas formalere Beschreibung als in den obigen Ausführungen angeben:*
Sei für $i \in \{1,\dots,m\}$ mit M_i jeweils eine Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(p_i^{\nu_i})$ bezeichnet. Gesucht ist eine Matrix M, so dass

$$M \equiv M_i \,(\mathrm{mod}\, \Gamma_0^{(n)}(p_i^{\nu_i})) \quad i \in \{1,\dots,m\}$$

gilt.

1) *Berechne mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes eine Matrix M mit*

$$M \equiv M_i \,(\mathrm{mod}\, p_i^{\nu_i}) \quad i \in \{1,\dots,m\}$$

so, dass möglichst viele Einträge von M gleich null sind.

2) *Führe für alle $i \in \{1,\dots,m\}$ das folgende aus:*
Falls $a_{ii} \equiv 0$ ist, dann setze $a_{ii} = a_{ii} + N$ bis $\mathrm{ggt}(a_{ii}, c_{ii}) = 1$ ist. Falls $a_{ii} \not\equiv 0$ ist, dann setze $c_{ii} = c_{ii} + N$ bis $\mathrm{ggt}(a_{ii}, c_{ii}) = 1$ ist. ($\mathrm{ggt}(a, c)$ bezeichne hierbei den größten gemeinsamen Teiler von a und c.)

3) *Berechne für alle $i \in \{1,\dots,m\}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus Zahlen δ_i, β_i mit $\delta_i a_{ii} - \beta_i c_{ii} = 1$.*

4) Setze $b'_{ii} = b_{ii} + \beta_i(1 + a_{ii}d_{ii} - b'_{ii}c'_{ii})$, $d'_{ii} = d_{ii} + \delta_i(1 + a_{ii}d_{ii} - b'_{ii}c'_{ii})$ *sowie,*

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{Diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) & \mathrm{Diag}(b'_{11}, \ldots, b'_{nn}) \\ \mathrm{Diag}(c_{11}, \ldots, c_{nn}) & \mathrm{Diag}(d'_{11}, \ldots, d'_{nn}) \end{pmatrix}.$$

□

2.2.4 Die Weiten von Spitzenklassen von $\mathbf{\Gamma_0^{(n)}(N)}$

Formeln für Werte $s_N^{(n)}(\underline{j}; (\underline{v}))$ haben wir bereits in (2.22), (2.23), (2.24) und (2.26) gesehen. Als nächstes wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wieviele Elemente aus $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$, $(4 \nmid N)$ unter der Projektion $\mathcal{P}$ auf die einzelnen Spitzenklassen abgebildet werden. Wir interessieren uns also für eine Verallgemeinerung von Lemma 2.21, in dem wir bereits die Weiten von Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(1)}(N)$ angegeben haben. Dabei werden wir uns später für explizite Formeln auf den Fall $n = 2$ beschränken.

Definition 2.33
Wir bezeichnen mit

$$t_N^{(n)}(l; (a_1 p^{j_1}, \ldots, a_{n-l} p^{j_{n-l}}))$$

die Anzahl der Elemente aus $\Gamma_0^{(n)}(p^\nu)\backslash\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$, *die die Spitzenklasse*

$$M = \begin{pmatrix} E_{n-l} & & & \\ & & & E_l \\ \mathrm{Diag}(a_1 p^{j_1}, \ldots, a_{n-l} p^{j_{n-l}}) & & E_{n-l} & \\ & -E_l & & \end{pmatrix} \in S_{p^\nu}^{(n)}(l; (j_1 \ldots, j_{n-l}))$$

repräsentieren. Diese Anzahl nennen wir die Weite der Spitzenklasse M.

□

Sei $R_{p^\nu}^{(n)}(l)$ gegeben. Wir betrachten die Einschränkung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}$ auf $R_{p^\nu}^{(n)}(l)$

$$\mathcal{F} : R_{p^\nu}^{(n)}(l) \;\to \bigcup_{(j_1, \ldots, j_{n-l}) \in \mathcal{P}_l^{(n)}(p^\nu)} S_{p^\nu}^{(n)}(l; (j_1, \ldots, j_{n-l})),$$

die als die Hintereinanderausführung der folgenden beiden Abbildungen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ aufgefasst werden kann:

i)

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_1 : R_{p^\nu}^{(n)}(l) & \to & \bigcup_{i=0}^{n} Q_i \\ \omega(I)\begin{pmatrix} u+o+E_n & g \\ h & -u^t-o^t+E_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} E_{n-l} & & & \\ & & & E_l \\ \tilde{h} & & E_{n-l} & \\ & -E_l & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Dabei erhält man $\tilde{h}$ aus h durch Streichung jeder i-ten Zeile und Spalte für die $h_{ii} = 1$ ist.

ii)

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_2 : \bigcup_{i=0}^{n} Q_i & \to & \bigcup_{(j_1,\dots,j_{n-l})\in\mathcal{P}_l^{(n)}(p^\nu)} S_{p^\nu}^{(n)}(l;(j_1,\dots,j_{n-l})) \\ \begin{pmatrix} E_{n-l} & & & \\ & & & E_l \\ h & & E_{n-l} & \\ & -E_l & & \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} E_{n-l} & & & \\ & & & E_l \\ D & & E_{n-l} & \\ & -E_l & & \end{pmatrix}, \end{array}$$

wobei D so gewählt wird, dass Bild und Urbild von $\mathcal{F}_2$ dieselbe Spitzenklasse repräsentieren.

Man sieht sofort, dass jedes Bild unter der Abbildung $\mathcal{F}_1$

$$p^{\nu\frac{l(l+1)}{2}} \sum_{\substack{I\in D^{(n)} \\ r_I = l}} \left(p^{\nu t_I + (\nu-1)s_I}\right) \tag{2.29}$$

Urbilder hat. Um uns die Situation für $\mathcal{F}_2$ zu verdeutlichen, betrachten wir noch ein einfaches Beispiel.

Beispiel 2.34
Sei $n = 2$ und $N = 3^3$. Betrachten wir zunächst Q_0. Es ist $\sharp(Q_0) = 3^6 = 729$. Für die Operation $h \mapsto U^t h U$ von $SL(2, \mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z})$ auf $\mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(2, 3\mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z})$ erhalten wir als Repräsentanten der 17 Bahnen.

$$\mathrm{Diag}(d_1, d_2) \quad \textit{mit} \quad (d_1, d_2) \in \left\{ \begin{array}{l} (0,0),(3,0),(6,0),(9,0),(18,0), \\ (3,3),(6,3),(12,3),(15,3),(21,3), \\ (24,3),(9,3),(9,6),(18,3),(18,6), \\ (9,9),(18,9) \end{array} \right\}.$$

Als nächstes berechnen wir den Index der Stabilisatoren dieser Repräsentanten. Dies ergibt:

(d_1, d_2)	*Index*	(d_1, d_2)	*Index*	(d_1, d_2)	*Index*	(d_1, d_2)	*Index*
$(0,0)$	1						
$(3,0)$	36	$(6,0)$	36	$(9,0)$	4	$(18,0)$	4
$(3,3)$	54	$(6,3)$	108	$(12,3)$	54	$(15,3)$	108
$(21,3)$	54	$(24,3)$	108				
$(9,3)$	36	$(9,6)$	36	$(18,3)$	36	$(18,6)$	36
$(9,9)$	6	$(18,9)$	12				

Die Menge

$$\bigcup_{v_1,v_2\in\{0,1,2\}} S_{3^3}^{(2)}(0;(v_1,v_2))$$

hat 13 *Elemente der Form*

$$\begin{pmatrix} E_2 & \\ D & E_2 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{Diag}(a,b),$$

die mittels Angabe der Diagonaleinträge von D durch die Paare

$$(a,b) \quad \in \quad R_0 = \left\{ \begin{matrix} (0,0),(3,0),(6,0),(9,0),(18,0), \\ (3,3) = (12,3) = (21,3), (6,3) = (15,3) = (24,3), \\ (9,9),(18,9),(9,3),(9,6),(18,3),(18,6) \end{matrix} \right\}$$

repräsentiert werden können. Die Abbildung $\mathcal{F}_1$ eingeschränkt auf $R_{p^\nu}^{(n)}(0)$ hat Grad 3^3. Damit ergeben sich die Werte $t_{3^3}^{(2)}(0;(a,b))$, wie sie in der folgenden Tabelle angegeben sind:

(a,b)	$t_{3^3}^{(2)}(0;(a,b))$	(a,b)	$t_{3^3}^{(2)}(0;(a,b))$	(a,b)	$t_{3^3}^{(2)}(0;(a,b))$
$(0,0)$	27	$(3,0)$	972	$(6,0)$	972
$(9,0)$	108	$(18,0)$	108	$(3,3)$	4374
$(6,3)$	8748	$(9,9)$	162	$(18,9)$	324
$(18,6)$	972	$(9,3)$	972	$(9,6)$	972
$(18,3)$	972				

Wir sehen sofort:

$$\sum_{(a,b)\in R_0} t_{3^3}^{(2)}(0;(a,b)) \quad = \quad 3^9 \quad = \quad r_{3^3}^{(2)}(0).$$

Wir gehen nun genauso für Q_1 vor. Die Einschränkung der Abbildung $\mathcal{F}_1$ auf $\omega(I)N_{3^3}(I)$ hat in diesem Fall für $I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ den Grad 3^6 und für $I =$

$\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ *Grad* 3^5. *Für die Bahnen der Operation* $h \mapsto U^t h U$ *von* $SL(2, \mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z})$ *auf* Q_1 *erhalten wir die* 9 *Repräsentanten*

$$\left\{ \begin{matrix} (0,\text{-}1),(3,\text{-}1),(6,\text{-}1),(9,\text{-}1),(12,\text{-}1), \\ (15,\text{-}1),(18,\text{-}1),(21,\text{-}1),(24,\text{-}1) \end{matrix} \right\},$$

deren Stabilisatoren alle Index 1 *haben. Der Eintrag* (a, b) *steht hier und im Folgenden für den Repräsentanten* $\mathrm{Diag}(a, b)$. *Als Repräsentanten für die Spitzenklassen erhalten wir nach Satz 2.29 nun*

$$\bigcup_{v_1 \in \{0,1,2\}} S_{3^3}^{(2)}(1; (v_1)) = \{(0, -1), (3, -1), (6, -1), (9, -1), (18, -1)\},$$

da hier $(3, -1), (12, -1), (21, -1)$ *und* $(6, -1), (15, -1), (14, -1)$ *jeweils dieselbe Spitzenklasse repräsentieren. Weiter ergibt sich*

$$t_{3^3}^{(1)}(1; (0,)) \;=\; t_{3^3}^{(1)}(1; (9,)) \;=\; t_{3^3}^{(1)}(1; (18,)) \;=\; 1 \cdot (3^6 + 3^5)$$

und

$$t_{3^3}^{(1)}(1; (3,)) \;=\; t_{3^3}^{(1)}(1; (6,)) \;=\; 3 \cdot (3^6 + 3^5).$$

Hier gilt auch

$$\sum_{[a] \in \bigcup\limits_{v_1 \in \{0,1,2\}} S_{3^3}^{(2)}(1;(v_1))} t_{3^3}^{(1)}(1; (a)) \;=\; 9 \cdot (3^6 + 3^5) \;=\; r_{3^3}^{(2)}(1).$$

Mit $[a]$ *bezeichnen wir hier die Spitzenklasse*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ a & & 1 & \\ & -1 & & \end{pmatrix}.$$

Da im Fall $i = 2$ *sowohl* $S_{3^3}^{(2)}(2; (0))$ *als auch* Q_2 *nur ein Element haben, ist*

$$t_{3^3}^{(2)}(2, (0)) \;=\; 3^9 \;=\; r_{3^3}^{(2)}(2).$$

□

Die Weiten von Spitzenklassen wollen wir nun explizit für die Dimension $n = 2$ berechnen.

Lemma 2.35
Sei $n = 2$, $N = p^\nu$ eine Potenz einer ungeraden Primzahl und ϵ, ϵ' jeweils ein Quadrat beziehungsweise Nichtquadrat modulo N, $p \nmid \epsilon$, $p \nmid \epsilon'$. Ist $\nu > v_1 > v_2 > 0$ und $\nu > v > 0$, so ist der Index $\overline{t}_{p^\nu}^{(2)}(0;(a,b))$ des Stabilisators von

$$h \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

in

$$H^{(\nu)} \quad = \quad \{\hat{H} | H \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(2, p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]})\}$$

unter der Operation

$$h \quad \mapsto \quad U^t h U, \;\; U \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$$

gegeben durch:

$$\overline{t}_{p^\nu}^{(2)}(0,(a,b)) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \textit{falls} \quad (a,b) = (0,0), \\ p^{2(\nu-v_1-1)} \frac{(p-1)(p+1)}{2}, & \textit{falls} \quad (a,b) = (\epsilon p^{v_1}, 0), \\ p^{2(\nu-v_2-1)} \frac{(p-1)(p+1)}{2}, & \textit{falls} \quad (a,b) = (\epsilon p^{v_1}, \epsilon' p^{v_2}), \\ p^{2(\nu-v)-1}\left(p + \left(\frac{-\epsilon}{p}\right)\right), & \textit{falls} \quad (a,b) = (\epsilon p^{v}, p^{v}). \end{cases}$$

Hierin bezeichne $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ das Legendre-Symbol.

Beweis:
Im Fall $\nu = 1$ hat $H^{(\nu)}$ nur ein Element 0_n, also ist $\overline{t}_{p^\nu}^{(2)}(0;(0,0)) = 1$. Ist -1 ein Quadrat modulo p, so hat die quadratische Form ax^2+y^2 eine nichttriviale Lösung modulo p, wenn a ein Quadrat modulo p ist. Der quadratische Raum $(\mathbb{F}_p, \hat{a}x^2+y^2)$ ist also genau dann hyperbolisch, wenn $\left(\frac{-a}{p}\right) = 1$ ist. Ist ein Element der Form $\mathrm{Diag}(a,b) = \mathrm{Diag}(\epsilon p^v, p^v)$ aus $H^{(\nu)}$ gegeben, so können wir statt dieses modulo p^ν zu betrachten auch $\mathrm{Diag}(\epsilon, 1)$ modulo $p^{\nu-v}$ betrachten. Die Formeln (12.4) und (14.3) aus [40] liefert uns nun:

$$\overline{t}_{p^\nu}^{(2)}(0;(\epsilon p^v, p^v)) \quad = \quad p^{2(\nu-v)-1}\left(p + \left(\frac{-\epsilon}{p}\right)\right).$$

Sei nun $\mathrm{Diag}(a,b) = \mathrm{Diag}(\hat{\epsilon} p^{v_1}, 0)$ aus $H^{(\nu)}$. Die Matrix $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ist genau dann eine Lösung der Gleichung

$$M^t \mathrm{Diag}(\epsilon p^{v_1}, 0) M \quad = \quad \mathrm{Diag}(\epsilon p^{v_1}, 0)$$

modulo p^ν, wenn

$$\begin{aligned}\alpha^2 &\equiv 1 \,(\operatorname{mod} p^{\nu-v_1}),\\ \beta &\equiv 0 \,(\operatorname{mod} p^{n-v_1})\end{aligned}$$

und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

gilt. Die erste Kongruenz hat für $\hat{\alpha} \in \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ genau $2p^{v_1}$ und die zweite für $\hat{\beta} \in \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$ genau p^{v_1} Lösungen. Wählen wir nun $\hat{\gamma}$ beliebig aus $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$, so ist δ durch die $\mathbb{Z}$-Repräsentanten α, β, γ von $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ mittels $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ eindeutig bestimmt. Damit ist

$$\bar{t}^{(2)}_{p^\nu}(0; (\epsilon p^{v_1}, 0)) = \frac{|\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})|}{2p^{\nu+2v_1}} = p^{2(\nu-v_1-1)}\frac{(p+1)(p-1)}{2}.$$

Es bleibt der Fall $\mathrm{Diag}(a, b) = \mathrm{Diag}(\epsilon p^{v_1}, \epsilon' p^{v_2}) \in H^{(\nu)}$. Wir werden die Anzahl der Matrizen $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ bestimmen, die eine Lösung der Gleichung $M^t\mathrm{Diag}(\epsilon p^{v_1}, \epsilon' p^{v_2})M = \mathrm{Diag}(\epsilon p^{v_1}, \epsilon' p^{v_2})$ sind. Indem wir diese Gleichung komponentenweise betrachten folgt, dass eine Matrix $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ genau dann Lösung dieser Gleichung ist, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ das folgende System von Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\alpha\delta - \beta\gamma &= 1, && (2.30)\\ \epsilon p^{v_1}\alpha^2 + \epsilon' p^{v_2}\gamma^2 &= \epsilon p^{v_1}, && (2.31)\\ \epsilon p^{v_1}\beta^2 + \epsilon' p^{v_2}\delta^2 &= \epsilon' p^{v_2}, && (2.32)\\ \epsilon p^{v_1}\alpha\beta + \epsilon' p^{v_2}\gamma\delta &= 0. && (2.33)\end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass das System:

$$\begin{aligned}\alpha\delta - \beta\gamma &= 1, && (2.34)\\ -\epsilon p^{v_1}\beta &= \epsilon' p^{v_2}\gamma, && (2.35)\\ p^{v_2}\alpha^2 &= p^{v_2} - \frac{\epsilon}{\epsilon'}p^{v_1}\beta^2, && (2.36)\\ p^{v_2}\alpha &= p^{v_2}\delta. && (2.37)\end{aligned}$$

dazu äquivalent ist.
Gleichung (2.30) und (2.34) sind identisch. Indem wir Gleichung (2.32) mit α multiplizieren und vom β–fachen der Gleichung (2.33) subtrahieren, erhalten wir

$$\epsilon' p^{v_2}\alpha\delta^2 - \epsilon' p^{v_2}\beta\gamma\delta = \epsilon' p^{v_2}\alpha.$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.30) folgt hieraus nun Gleichung (2.37). Subtrahieren wir das δ–fache der Gleichung (2.33) vom γ–fachen der Gleichung (2.32) und nutzen wieder Gleichung (2.30) so folgt (2.35). Aus Gleichung (2.30) multipliziert mit p^{v_2} folgt mit Hilfe von (2.35) und (2.37) nun (2.36). Wir können also aus dem ersten System alle Gleichungen des zweiten Systems ableiten. Nun zur umgekehrten Richtung. Gleichung (2.36) ist äquivalent zu:

$$\epsilon' p^{v_2}\alpha^2 + \epsilon p^{v_1}\beta^2 \;=\; \epsilon' p^{v_2}.$$

Mit Hilfe von (2.35) erhalten wir (2.32). Multiplizieren wir Gleichung (2.35) mit γ und nutzen anschließend (2.34) folgt:

$$\begin{aligned} -\epsilon p^{v_1}\beta\gamma &= \epsilon' p^{v_2}\gamma^2 \\ \Leftrightarrow\quad \epsilon p^{v_1}(1-\alpha\delta) &= \epsilon' p^{v_2}\gamma^2 \\ \Leftrightarrow\quad \epsilon p^{v_1} &= \epsilon' p^{v_2}\gamma^2 + \epsilon p^{v_1}\alpha\delta \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2.37) folgt hieraus (2.31). Um die noch fehlende Gleichung (2.33) herzuleiten genügt es Gleichung (2.34) mit α zu multiplizieren. Damit haben wir alle Gleichungen des ersten Systems aus denen des zweiten Systems abgeleitet und die beiden Gleichungsysteme haben die selben Lösungen. Wir betrachten nun das System aus den Gleichungen (2.34), (2.35), (2.36) und (2.37). Keine der Gleichungen liefert eine Einschränkung für die Wahl von β. Sei also β ein beliebiges der p^ν Elemente aus $\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}$. Gleichung (2.35) erlaubt nun nur noch noch p^{v_2} Möglichkeiten für γ und für α gibt es wegen (2.36) noch $2p^{v_2}$ Wahlmöglichkeiten. δ ist nun auf Grund von (2.34) eindeutig bestimmt und für den Index $t_{p^\nu}^{(2)}(0,(\epsilon p^{v_1},\epsilon' p^{v_2}))$ folgt:

$$t_{p^\nu}^{(2)}(0,(\epsilon p^{v_1},\epsilon' p^{v_2})) \;=\; \frac{|\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})|}{2p^{\nu+2v_2}} \;=\; p^{2(\nu-v_2-1)}\frac{(p+1)(p-1)}{2}.$$

□

Aus diesem Lemma ergeben sich nun auch direkt die Werte für $t_{p^\nu}^{(2)}(0;(\star))$:

Lemma 2.36
Sei $n=2$, $N=p^\nu$ eine Potenz einer ungeraden Primzahl, ϵ ein Quadrat oder Nichtquadrat modulo N, $p\nmid\epsilon$, $v_2<v_1<\nu$, $v<\nu$, sowie

$$\begin{aligned} a_1 &\in \left(\mathbb{Z}/p^{\min\{\nu-v_1,v_2\}}\mathbb{Z}\right)^* \quad \textit{und} \\ a_2 &\in \left(\mathbb{Z}/p^{\min\{\nu-v,v\}}\mathbb{Z}\right)^*. \end{aligned}$$

Dann ist:

$$t_{p^\nu}^{(2)}(2;(0)) \;=\; p^{3\nu},$$

$$t_{p^\nu}^{(2)}(1;(a_2p^v)) \;=\; (p^{2\nu}+p^{2\nu-1})p^{\max\{\nu-2v,0\}},$$

$$t_{p^\nu}^{(2)}(1;(0)) \;=\; (p^{2\nu}+p^{2\nu-1}),$$

$$t_{p^\nu}^{(2)}(0;(a,b)) \;=\;
\begin{cases}
1, & \textit{falls} \quad (a,b)=(0,0),\\
p^{2(\nu-v-1)}\frac{(p-1)(p+1)}{2}, & \textit{falls} \quad (a,b)=(\epsilon p^v,0),\\
p^{\max\{\nu-v_1-v_2,0\}}p^{2(\nu-v_2-1)}\frac{(p-1)(p+1)}{2}, & \textit{falls} \quad (a,b)=(a_1p^{v_1},\epsilon p^{v_2}),\\
p^{\max\{\nu-2v,0\}}p^{2(\nu-v)-1}\left(p+\left(\frac{-a_2}{p}\right)\right), & \textit{falls} \quad (a,b)=(a_2p^v,p^v).
\end{cases}$$

Beweis:
Der Beweis ergibt sich aus (2.21), (2.29) und Lemma 2.35.

□

Bemerkung 2.37
Beachte, dass die Weiten $t_{p^\nu}^{(2)}(0;(ap^v,p^v))$ *einer Spitzenklasse aus* $S_{p^\nu}^{(2)}(0;(ap^v,p^v))$ *nicht mehr alleine vom Exponenten* v *der* p*-Potenz abhängt, sondern auch von der Quadratklasse von* $-a$ *modulo* p*.*

□

Beispiel 2.38
Betrachten wir hier noch eimal genauer den Fall $\nu=6$*. Es gilt hier:*

$$\begin{aligned}
t_{p^\nu}^{(2)}(2;(0)) &= p^{18} = r_{p^\nu}^{(2)}(0),\\
t_{p^\nu}^{(2)}(1;(0))+\sum_{j=1}^{5}\sum_{a_2\in\left(\mathbb{Z}/p^{\min\{\nu-j,j\}}\mathbb{Z}\right)^*} t_{p^\nu}^{(2)}(2;(a_2p^j)) &= p^{17}+p^{16} = r_{p^\nu}^{(2)}(1).
\end{aligned}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
t_{p^\nu}^{(2)}(0;(0,0)) &= 1,\\
\sum_{j=1}^{5} t_{p^\nu}^{(2)}(0;(\epsilon p^j,0)) &= (p^2-1)(1+p^2+p^4+p^6+p^8),\\
\sum_{j=1}^{5}\sum_{a_1\in\left(\mathbb{Z}/p^{\min\{\nu-j_1,j_2\}}\mathbb{Z}\right)^*} t_{p^\nu}^{(2)}(0;(a_1p^{j_1},\epsilon p^{j_2})) &= (p^2-1)(p-1)(p^2+p^4+p^5\\
&\quad +p^6+p^7+2p^8+p^9+p^{10}+p^{11}),\\
\sum_{j=1}^{5}\sum_{a_2\in\left(\mathbb{Z}/p^{\min\{\nu-j,j\}}\mathbb{Z}\right)^*} t_{p^\nu}^{(2)}(0;(a_2p^j,p^j)) &= (p-1)(p^2+p^5+p^8+p^{11}+p^{14}).
\end{aligned}$$

Also:

$$\sum_{(\star,\star)} t_{p^\nu}^{(2)}(0;(\star,\star)) = p^{15} = r_{p^\nu}^{(2)}(1).$$

Summieren wir schließlich über alle Spitzen, so ist:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2}\sum_{(\star)} t_{p^\nu}^{(2)}(i;(\star)) &= p^{15}+p^{16}+p^{17}+p^{18}\\ &= p^{3\nu}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\\ &= \mid \Gamma_0^{(2)}(p^\nu)\backslash \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) \mid .\end{aligned}$$

□

Um allgemeiner als in Lemma 2.36 auf die Weite einer Spitzenklasse einzugehen, also auch für Dimensionen größer als zwei, sei

$$H^{(\nu,i)} = \{\hat{H} | H \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(i, p\mathbb{Z}_{[p^{\nu-1}]})\}$$

(siehe Lemma 2.25), gegeben und $R^{(i)}$ die ebenfalls in Lemma 2.25 angegebene Menge von Repräsentanten für die Operation $U \mapsto U^tHU$ von $\mathrm{SL}(i,\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})$ auf $H^{(\nu,i)}$. Für ein $R \in R^{(i)}$ bezeichnen wir mit $\bar{t}(R)$ den Index des Stabilisators von R in $H^{(\nu,i)}$ unter dieser Operation. Sei weiter $S^{(i)} = R^{(i)}/\approx_n$. Dann ist, wie aus der Definition von $\approx_n$ auf Seite 65 und Satz 2.29 folgt,

$$S^{(i)} \to \bigcup_{(v_1,\ldots,v_{n-i})\in\mathcal{E}_i^{(n)}(\nu)} S_{p^\nu}^{(n)}(i;(v_1,\ldots,v_{n-i})) \tag{2.38}$$

$$S \mapsto \begin{pmatrix} E_{n-i} & & & \\ & & & E_i \\ S & & E_{n-i} & \\ & -E_i & & \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

eine Bijektion. Die Weite der Spitzenklasse, auf die S abgebildet wird, ist also mit (2.29) durch

$$p^{\nu\frac{i(i+1)}{2}} \sum_{\substack{I\in D^{(n)}\\ r_I=i}} \left(p^{\nu t_I+(\nu-1)s_I}\right) \sum_{\substack{R\in R^{(i)}\\ R\approx_n S}} \bar{t}(R) \tag{2.40}$$

gegeben.

Lemma 2.39

i) Ist p^ν eine Potenz einer ungeraden Primzahl, so ist

$$t_{p^\nu}^{(n)}(i;(\underline{0})) = p^{\nu\frac{i(i+1)}{2}} \sum_{\substack{I\in D^{(n)}\\ r_I=i}} p^{\nu t_I+(\nu-1)s_I}.$$

ii) Ist p eine nicht notwendig ungerade Primzahl, dann ist

$$t_p^{(n)}(i;(\underline{0})) = p^{\frac{i(i+1)}{2}} \sum_{\substack{I\in D^{(n)}\\ r_I=i}} p^{t_I} = p^{\frac{i(i+1)}{2}} \binom{n}{\min\{i,n-i\}}_p .$$

Beweis:
Die Mengen $S^n_{p^\nu}(l;(\underline{0}))$, $0 \leq l \leq n$ enthalten genau eine Spitzenklasse. Unter $\mathcal{F}_1$ hat diese genau ein Urbild. Dieses hat nach Gleichung 2.29 unter $\mathcal{F}_1$ die geforderte Anzahl von Urbildern.

□

Die Weiten von Spitzenklassen für die Dimension $n \geq 3$ werden bis auf Lemma 2.42 im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr explizit berechnet werden. Die folgenden Lemmata, die alle offensichtlich sind, notieren wir hier noch für den späteren Gebrauch.

Lemma 2.40
Für eine natürliche Zahl N mit $4 \nmid N$ sind

$$i)\ S_N^{(n)}(n;(\underline{0})) = \left\{ J_{2n} = \begin{pmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{pmatrix} \right\},$$

$$ii)\ S_N^{(n)}(0;(\underline{0})) = \{E_{2n}\},$$

$$iii)\ S_N^{(n)}(i;(\underline{0})) = \left\{ \begin{pmatrix} E_{n-i} & & & \\ & & & E_i \\ & & E_{n-i} & \\ & -E_i & & \end{pmatrix} \right\} \textit{ für } 0 < i < n,$$

und damit ist

$$s_N^{(n)}(n;(\underline{0})) = s_N^{(n)}(0;(\underline{0})) = 1,$$

sowie

$$s_N^{(n)}(0;(\underline{0})) = 1 \quad \textit{für} \quad 0 < i < n.$$

□

Lemma 2.41
Für eine natürliche Zahl N mit $4 \nmid N$ sind

$$i)\ s_N^{(n)}(\underline{j};(\underline{d})) = \prod_{i=1}^{t} s_{p_i^{\nu_i}}^{(n)}(j_i;(d_i)) \textit{ und}$$

ii) $t_N^{(n)}(\underline{j};(\underline{d})) \;=\; \prod_{i=1}^{t} t_{p_i^{\nu_i}}^{(n)}(j_i;(d_i)).$

□

Lemma 2.42
Für eine natürliche Zahl N mit $4 \nmid N$ sind

i) $t_N^{(n)}(n;(\underline{0})) \;=\; N^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *und*

ii) $t_N^{(n)}(0;(\underline{0})) \;=\; 1.$

□

2.3 Schranken im Fall der Modulgruppen $\boldsymbol{\Gamma_0^{(n)}(N)}$

Wir wollen nun mit den Ergebnissen aus den vorigen Abschnitten die in [52], Theorem 2.9 angegebenen Schranken auf den Fall von Siegelschen Modulformen zur Untergruppe $\Gamma_0^{(n)}(N)$ verallgemeinern. Zunächst wollen wir noch einige Begriffe erklären, die wir in diesem Abschnitt benutzen. Diese Begriffe und weitere Eigenschaften dieser findet man auch in [52].
Sei L eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge der reellen symmetrischen positiv semidefiniten Matrizen. L heißt Kern, falls

(1) $\mathbb{R}_{\geq 1}L = L$,

(2) $0 \notin L$ und

(3) $\mathbb{R}_{>0}L$ ist eine Teilmenge der reellen symmetrischen positiv semidefiniten Matrizen.

Des weiteren wollen wir mit $\nu(f|_kM)$ den Abschluss der konvexen Hülle von $\mathbb{R}_{\geq 1}\mathrm{Supp}(f|_kM)$ bezeichnen. Für alle M in $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ ist $\nu(f|_kM)$ ein Kern. Sei $N = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\nu_i}$ eine natürliche Zahl und $f \in S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)$ eine Spitzenform. Sei weiter ω_n die dyadische Spur und $M_1,\ldots,M_r$ ein Repräsentantensystem von $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$. Theorem 2.5 aus [52] liefert uns:

Gilt für alle M_j, $j \in \{1,\ldots,r\}$:

$$\min \omega_n\left(\mathrm{Supp}(f|_kM_j)\right) \;>\; \frac{k}{4\pi}\mathfrak{w}_n, \tag{2.41}$$

dann ist $f \equiv 0$. Dabei ist

$$\mathfrak{w}_n \;=\; \sup_{\Omega\in\mathcal{H}_n}\inf_{\sigma\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})} \omega_n(\mathrm{Im}(\sigma\Omega)^{-1}).$$

Die Menge von Kernen $\{\nu(f|_k M) \mid M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})\}$ ist $\Gamma_0^{(n)}(N)$-zulässig, das heißt

$$\forall V \in \Gamma_0^{(n)}(N), \qquad U = \begin{pmatrix} A^t & S \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in \Delta(n,\mathbb{Z})$$

ist

$$\nu(f|_k VMU) \;=\; A\nu(f|_k M)A^t$$

(siehe hierzu [52], Lemma 1.5). Damit ist dann nach (1.8)

$$\min \omega_n \left(\mathrm{Supp}(f|_k VMU)\right) \;=\; \min \omega_n \left(\mathrm{Supp}(f|_k M)\right).$$

Der Wert von $\min \omega_n \left(\mathrm{Supp}(f|_k M)\right)$ hängt für eine Spitzenform f zur Untergruppe $\Gamma_0^{(n)}(N)$ vom Gewicht k nur an der Spitzenklasse, die von M repräsentiert wird und nicht am Repräsentanten selbst. Anstelle von Ungleichung (2.41) genügt es somit auch die Ungleichung

$$\min \omega_n \left(\mathrm{Supp}(f|_k M_j)\right) \;>\; \frac{k}{4\pi}\mathfrak{w}_n \tag{2.42}$$

für alle Repräsentanten M_j von $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$ zu fordern. Dabei sei $t_N^{(n)}(j)$ die Weite der Spitzenklasse M_j. Im Fall $n=1$ und $n=2$ finden sich hierfür explizite Werte in Lemma 2.21 und Lemma 2.36.

Bemerkung 2.43

i) Hier stellt sich nun die Frage, ob sich die Werte $\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|M_j))$ *für zwei Spitzenklassen* M_1 *und* M_2 *immer unterscheiden. Können hier Teilmengen von Spitzenklassen identifiziert werden, für die dieser Wert übereinstimmt, so können wir anstatt (2.42) eine Ungleichung der Form*

$$\sum_{M_j \in X} t_N^{(n)}(j) \min \omega_n \left(\mathrm{Supp}(f|_k M_j)\right) \;>\; \frac{k}{4\pi}\mathfrak{w}_n \tag{2.43}$$

mit

$$X \;=\; \left\{ M \in \Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|M)) \\ = \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|M_j)) \end{array} \right\}$$

nur für eine Menge von Repräsentanten aus $\Gamma_0^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$ *fordern, für die* $\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|M_j))$ *paarweise verschieden ist. Die im Folgenden abgeleiteten Schranken könnten hierdurch verbessert werden. (Es werden im Allgemeinen für mindestens eine Fourierentwicklung aus (2.43) weniger Fourierkoeffizienten einer Spitzenform* f *als in (2.42) benötigt bis eine Ungleichung aus (2.43) verletzt wird und folglich* $f \equiv 0$ *ist.) Wie später* *in Abschnitt 4 deutlich wird, ist dies aber zumindest für den Fall* $n = 1$ *nicht zu erwarten, falls wir annehmen, dass wir in jeder Entwicklung eine Schranke haben, die die gleiche Anzahl von Fourierkoeffizienten braucht, um das Verschwinden einer Spitzenform* f *nachzuweisen. Beachte hierbei auch Bemerkung 2.62.*

ii) Sind für eine Spitzenform $f \in S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N), \chi)$ *die beiden Fourierentwicklungen in den beiden Spitzenklassen* M_1 *und* M_2 *mittels*

$$(f|_k M_j)(Z) \quad = \sum_{T \in \mathrm{Supp}(f|_k M_j)} a_T^j e^{2\pi i tr(TZ)}$$

gegeben, so würde mit der selben Begründung wie in i) auch eine Aussage (über die potenziellen Träger) der Form:

$$\begin{aligned} & \forall T \in \mathrm{Supp}(f|M_1) \ \mathit{mit}\ \omega_1(T) < c_1 \ \mathit{gilt}\ a_T^1 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \forall T \in \mathrm{Supp}(f|M_2) \ \mathit{mit}\ \omega_1(T) < c_2 \ \mathit{gilt}\ a_T^2 = 0 \end{aligned}$$

für geeignete Konstanten c_1 *und* c_2 *zu einer Verbesserung der Abschätzung führen. Ob eine solche Aussage gültig ist, ist hierbei vollkommen offen. Es scheint, dass Spitzenklassen, die nicht in der Menge*

$$\bigcup_{i=0}^{n} S_N^{(2)}(\underline{i}; (\underline{0})) \tag{2.44}$$

liegen, schlechtere Abschätzungen liefern. Die Gültigkeit einer Aussage der obigen Form scheint in den Spitzenklassen, die nicht in (2.44) liegen daher eher möglich. In den Spitzenklassen aus (2.44) würde, ähnlich wie im Fall der Dimension 1*, eine Verbesserung der im Folgenden abgeleiteten Schranken vor allem bei kleinen Stufen zu einer Abschätzungen für die Dimension von Räumen von Spitzenformen führen, die kleiner als die wahre Dimension der Räume ist. Man hätte also einen Widerspruch hergeleitet. Die Gültigkeit einer Aussage der obigen Form ist also auch für kleine Stufen nicht zu erwarten.*

□

Aus der gemittelten Abschätzung [52], Theorem 2.6 erhalten wir:

Ist

$$\sum_{j=1}^{s} t_N^{(n)}(j) \min \omega_n \left(\mathrm{Supp}(f|M_j)\right) \quad > \quad [\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(n)}(N)] \frac{k}{4\pi} \mathfrak{w}_n, \tag{2.45}$$

so ist $f \equiv 0$.

Für alle M_j gilt die Ungleichung

$$\min \omega_n \left(\operatorname{Supp}(f|_k M_j)\right) \quad \geq \quad \mathfrak{d}_n \tilde{N}_j. \tag{2.46}$$

Dabei ist

$$\tilde{N}_i \quad = \quad \prod_{\substack{m=1 \\ (l_m, v_m) \neq (0,0)}}^{t} \frac{1}{p_m^{\nu_m}}, \quad \text{falls } M_i \in S_N^{(n)}(\underline{l}, (\underline{v}))$$

und

$$\mathfrak{d}_n \quad = \quad \min_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Z}), \\ T>0, t_{jj} \in 2\mathbb{Z}}} \omega_n(T).$$

Einige Werte von $\mathfrak{d}_n$ für kleines n sind:

n	1	2	3	4
$\mathfrak{d}_n$	1	$\frac{3}{2}$	2	2

Für eine fest gewählte Spitzenklasse M_j, $j \in \{1, \ldots, s\}$ genügt demnach die Forderung

$$\begin{aligned} \min \omega_n \left(\operatorname{Supp}(f|_k M_j)\right) \quad > \quad & \frac{[\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(n)}(N)]}{t_N^{(n)}(j)} \frac{k}{4\pi} \mathfrak{w}_n \\ & - \mathfrak{d}_n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} \tilde{N}_i \frac{t_N^{(n)}(i)}{t_N^{(n)}(j)}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

um zu folgern, dass $f \equiv 0$ ist. Sei nun für eine positiv definite Matrix Z

$$m(Z) \quad = \quad \min_{x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}} x^t Z x$$

die Hermitesche Funktion, und μ_n die Hermitesche Konstante, (siehe [32], [66]), also die kleinste Konstante, so dass für alle positiv definiten Z gilt:

$$m(Z) \quad \leq \quad \mu_n \sqrt[n]{\det(Z)}.$$

Nutzen wir nun noch die Abschätzungen

$$\mathfrak{w}_n \quad \leq \quad \frac{2}{\sqrt{3}} n$$

(siehe (1.6)) und

$$\omega_n(Z) \geq \frac{n}{\mu_n} \sqrt[n]{\det(Z)}$$

(siehe (1.7)), so erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 2.44
Sei $\{M_1,\ldots,M_s\}$ *eine Menge von Spitzenklassen für* $\Gamma_0^{(n)}(N)$, $f \in S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N),\chi)$ *eine Spitzenform und*

$$(f|_k M_j)(Z) \;=\; \sum_{T\in \mathrm{Supp}(f|_k M_j)} a_{j,T}\, e^{2\pi i tr(TZ)}$$

die Fourierentwicklung von $(f|_k M_j)$*. Dann sind für jedes fest gewählte* j *die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $f \equiv 0$,

ii) für alle $T \in \mathrm{Supp}(f|_k M_j)$ *mit*

$$\omega_n(T) \;\leq\; \frac{[\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}):\Gamma_0^{(n)}(N)]}{t_N^{(n)}(j)}\mathfrak{w}_n\frac{k}{4\pi} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s} \frac{t_N^{(n)}(i)\min\omega_n\left(\mathrm{Supp}(f|_k M_i)\right)}{t_N^{(n)}(j)}$$

gilt $a_{j,T}=0$,

iii) für alle $T \in \mathrm{Supp}(f|_k M_j)$ *mit*

$$\omega_n(T) \;\leq\; \frac{N^{\frac{n(n+1)}{2}}}{t_N^{(n)}(j)}\prod_{p|N}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p^i}\right)\frac{nk}{2\sqrt{3}\pi} - \mathfrak{d}_n\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}\tilde{N}_i\frac{t_N^{(n)}(i)}{t_N^{(n)}(j)}$$

gilt $a_{j,T}=0$,

iv) für alle $T \in \mathrm{Supp}(f|_k M_j)$ *mit*

$$\sqrt[n]{\det(T)} \;\leq\; \frac{N^{\frac{n(n+1)}{2}}}{t_N^{(n)}(j)}\prod_{p|N}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p^i}\right)\mu_n\frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{\mathfrak{d}_n\mu_n}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}\tilde{N}_i\frac{t_N^{(n)}(i)}{t_N^{(n)}(j)}$$

gilt $a_{j,T}=0$.

□

2.4 Vergleich der Schranken

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, für welche Spitzenklasse Satz 2.44 die beste Schranke liefert. Anders ausgedrückt, beschäftigen wir uns mit dem Problem, in welcher Spitzenklasse bei einem Test mit nur einer Spitzenklasse die wenigsten Fourierkoeffizienten berechnet werden müssen, um zu entscheiden, ob eine vorgelegte Spitzenform identisch null ist. Für eine vorgelegte Modulform f wollen wir dabei sagen zwei Rechnungen in zwei Spitzenklassen sind gleichwertig,

beziehungsweise zwei Schranke für zwei Spitzenklassen sind gleichwertig, falls in beiden Spitzenklassen die gleiche Anzahl an Fourierkoeffizienten berechnet werden muss, um zu entscheiden ob $f \equiv 0$ ist. Diese Ausdrucksweise soll lediglich eine quantitative Aussage über die jeweils benutzten Schranken erlauben. Sie ist nicht als exakte mathematische Definition zu verstehen, da sie nicht auf der wahren Anzahl der notwendigen Fourierkoeffizienten basiert, sondern vielmehr auf der Güte der gemachten Abschätzungen und der benutzten Techniken beruht. Insbesondere ist diese Ausdrucksweise auch davon abhängig, was man unter dem potenziellen Träger einer Spitzenform versteht. Es wird sich später herausstellen, dass sich die angegebenen Schranken noch für einige besondere Spitzenklassen verbessern lassen.
Wir untersuchen zunächst den Fall der Dimension $n = 1$. Hier hat bereits E. Hecke eine Abschätzung geliefert [28], Satz 2, p. 811 und die Anmerkung dazu. Die Aussage von E. Hecke lässt sich folgendermaßen interpretieren:

> Ist $f \in S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N))$ eine Spitzenform mit Fourierentwicklung
>
> $$f \;=\; \sum_{T=0}^{\infty} a_T e^{2\pi i T},$$
>
> dann ist $f \equiv 0$, falls $a_T = 0$ für alle T mit
>
> $$T \leq \frac{k}{12} N \prod_{\substack{p \mid N \\ p,\mathrm{Prim}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$
>
> gilt.

In den an Korollar 2.46 anschließenden Ausführungen werden wir sehen, dass wir durch die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Mittel eine Schranke erhalten, die im Wesentlichen bis auf einen Faktor $\frac{k}{2\sqrt{3}\pi}$ anstatt dem Faktor $\frac{k}{12}$ der Schranke von E. Hecke entspricht. Die hier erhaltene Schranke ist im quadratfreien Fall unabhängig von der Wahl der Spitzenklasse, die bei der Fourierentwicklung von f benutzt wird.

Beispiel 2.45
Ist $N = 5$, so ist $[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(1)}(5)] = 6$ und $\Gamma_0^{(1)}(5)$ hat 2 Spitzenklassen: Eine Spitzenklasse M_1 aus $S_5^{(1)}(1;(0))$ der Weite $t_5^{(1)}(0;(0)) = 5$ und eine Spitzenklasse M_2 aus $S_5^{(1)}(0;(0))$ der Weite $t_5^{(1)}(0;(0)) = 1$.
Betrachten wir die Entwicklung von f in der Spitzenklasse M_2, so ist $f \equiv 0$, falls $a_{2,T} = 0$ für alle $T \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} T = \omega_1(T) \;&\leq\; \frac{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(1)}(5)]}{t_5^{(1)}(0;(0))} \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{t_5^{(1)}(0;(0)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|M_1))}{t_5^{(1)}(0;(0))} \\ &\leq\; 6 \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{\pi} k - 1. \end{aligned}$$

Mittels der Entwicklung von f in der Spitzenklasse M_1 gilt: $f \equiv 0$, falls $a_{1,T} = 0$ für alle $T \in \frac{1}{5}\mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} T = \omega_1(T) &\leq \frac{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(1)}(5)]}{t_5^{(1)}(1;(0))} \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{t_5^{(1)}(0;(0)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|M_2))}{t_5^{(1)}(1;(0))} \\ &\leq \frac{6}{5}\frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}k - 1\right). \end{aligned}$$

Da der Träger von $f|M_1$ aus Matrizen mit Einträgen aus $\frac{1}{5}\mathbb{N}$ und der Träger von $f|M_2$ aus Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{N}$ besteht, sind die beiden Schranken gleichwertig.

□

Mit Hilfe der expliziten Ausdrücke für die Anzahlen und Weiten von Spitzenklassen erhalten wir aus Satz 2.44 mit Hilfe der Lemmata 2.20 und 2.21 folgendes Korollar:

Korollar 2.46
Sei $N = p^\nu$ eine Primzahlpotenz, M eine Spitzenklasse von $\Gamma_0^{(1)}(N)$ und $f \in S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N), \chi)$ eine Spitzenform mit Fourierentwicklung

$$(f|_k M)(\tau) = \sum_{T \in \mathrm{Supp}(f|_k M)} a_{M,T} e^{2\pi \mathrm{i} T\tau}.$$

Dann ist $f \equiv 0$, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

i) Ist $M \in S_N^{(1)}(1;(0))$, so ist für alle $T \in \frac{1}{N}\mathbb{N}$ mit

$$T < \left(\frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{1}{p^\nu}\right)\left(1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p^\nu}$$

$a_{M,T} = 0$.

ii) Ist $M \in S_N^{(1)}(0;(0))$, so ist für alle $T \in \mathbb{N}$ mit

$$T < \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} p^\nu \left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}$$

$a_{M,T} = 0$.

iii) Ist $M \in S_N^{(1)}(0;(v))$ mit $0 < v \leq \frac{\nu}{2}$, so ist für alle $T \in \frac{1}{N}\mathbb{N}$ mit

$$T < \left(\frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{1}{p^\nu}\right)\frac{p^v}{p^{\nu-2v}}\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{p^\nu - p^{\nu-2v} - 1}{p^{2\nu-2v}}$$

$a_{M,T} = 0$.

iv) Ist $M \in S_N^{(1)}(0;(v))$ *mit* $\frac{\nu}{2} < v < \nu$, *so ist für alle* $T \in \frac{1}{N}\mathbb{N}$ *mit*

$$T \;<\; \left(\frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{1}{p^\nu}\right) p^\nu \left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{p^\nu + 2}{p^\nu}$$

$a_{M,T} = 0$.

□

Da bei einer Enwicklung in der Spitzenklasse J_2 aus $S_N^{(1)}(1;(0))$ für alle $T \in \frac{1}{N}\mathbb{N}$ ein Fourierkoeffizient berechnet werden muss, und

$$\omega_1\left(\frac{1}{p^\nu}T\right) \;=\; \frac{1}{p^\nu}\omega_1(T)$$

gilt, sind die beiden Schranken i) und ii) aus Korollar 2.46 gleichwertig, das heißt in beiden Spitzenklassen muss die gleiche Anzahl

$$\frac{k}{2\sqrt{3}\pi} p^\nu \left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}$$

von Fourierkoeffizienten berechnet werden, um zu entscheiden, ob f identisch null ist oder nicht. Wir wollen nun noch zeigen, wie auch bereits das Beispiel 2.45 suggeriert, dass eine Rechnung für quadratfreies N und für eine Spitzenform $f \in S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N), \chi)$ in jeder Spitzenklasse gleichwertig ist.

Proposition 2.47
Seien $N = \prod_{i=1}^{t} p_i$ *quadratfrei,* $M_j \in S_N^{(1)}(\underline{l}^j; (\underline{v}^j)))$, $j \in \{1,2\}$ *zwei Spitzenklassen von* $\Gamma_0^{(1)}(N)$ *und* $f \in S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N), \chi)$ *eine Spitzenform mit Fourierentwicklung.*

$$(f|_k M_j)(Z) = \sum_{T \in \mathrm{Supp}(f|_k M_j)} a_{j,T} e^{2\pi i tr(TZ)}.$$

Die Anzahl der Fourierkoeffizienten, die nach Satz 2.44 und den Abschätzungen

$$\min \omega_1(\mathrm{Supp}(f|_k M_j)) \;\geq\; \prod_{\substack{i=1 \\ l_i^1 = 0}}^{t} \frac{1}{p_i}$$

bei einer Rechnung in nur einer Spitzenklasse berechnet werden muss, um zu entscheiden, ob $f \equiv 0$ *ist oder nicht, ist in jeder Spitzenklasse gleich.*

Beweis
Da N quadratfrei ist, haben die Weiten der Spitzenklassen M_j den Wert

$$t_N^{(1)}(M_j) \;=\; \prod_{\substack{i=1 \\ l_i^j = 0}}^{t} p_i$$

und jede Menge $S_N^{(1)}(\underline{l}^j;(\underline{v}^j))$ besteht aus genau einem Element. Setzen wir

$$c = [\mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}):\Gamma_0^{(1)}(N)]\mathfrak{w}_1\frac{k}{4\pi},$$

so liefert Satz 2.44 die Abschätzungen:

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{1}{t_N^{(1)}(\underline{l}^j;(\underline{v}^j))}\left(c-\sum_{\substack{M\in\Gamma_0^{(1)}\backslash\mathrm{Sp}/\Delta\\ M\neq M_j}} t_N^{(1)}(M)\min\omega_1(\mathrm{Supp}(f|_kM))\right)\\ &= \frac{1}{t_N^{(1)}(\underline{l}^j;(\underline{v}^j))}\left(c-\sum_{\substack{M\in\Gamma_0^{(1)}\backslash\mathrm{Sp}/\Delta\\ M\neq M_1,M_2}} t_N^{(1)}(M)\min\omega_1(\mathrm{Supp}(f|_kM))\right)\\ &\quad -\frac{t_N^{(1)}(M_m)\min\omega_1(\mathrm{Supp}(f|_kM_m))}{t_N^{(1)}(\underline{l}^j;(\underline{v}^j))}\ \text{mit } m\in\{1,2\}, m\neq j. \end{aligned}$$

Da der Träger von $f|_kM_j$ aus Matrizen mit Einträgen aus $\frac{1}{t_N^{(1)}(\underline{l}^j;(\underline{v}^j))}\mathbb{N}$ besteht, sehen wir mit der Abschätzung

$$t_N^{(1)}(M_m)\min\omega_1(\mathrm{Supp}(f|_kM_m)) \geq \prod_{\substack{i=1\\ l_i^1=0}}^{t}\frac{1}{p_i}\prod_{\substack{i=1\\ l_i^1=0}}^{t}p_i = 1,$$

dass in jeder Spitzenklasse

$$c-\sum_{\substack{M\in\Gamma_0^{(1)}\backslash\mathrm{Sp}/\Delta\\ M\neq M_1,M_2}} t_N^{(1)}(M)\min\omega_1(\mathrm{Supp}(f|_kM))-1 \tag{2.48}$$

Fourierkoeffizienten berechnet werden müssen. Diese Anzahl ist also unabhängig von der gewählten Spitzenklasse.

□

Wie sich die Schranken für einzelne Spitzenklassen im nichtquadratfreien Fall verhalten, untersuchen wir nun noch exemplarisch an einem Beispiel.

Beispiel 2.48
Für $N=27$ berechnen wir folgende Daten:

$[\mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}):\Gamma_0^{(1)}(27)]=36,$

$$\begin{array}{rclcrcl} S_{27}^{(1)}(1;(0)) & = & \{M_1\} & \textit{mit} & t_{27}^{(1)}(1;(0)) & = & 27, \\ S_{27}^{(1)}(0;(0)) & = & \{M_2\} & \textit{mit} & t_{27}^{(1)}(0;(0)) & = & 1, \\ S_{27}^{(1)}(0;(1)) & = & \{M_3, M_4\} & \textit{mit} & t_{27}^{(1)}(0;(1)) & = & 3, \\ S_{27}^{(1)}(0;(2)) & = & \{M_5, M_6\} & \textit{mit} & t_{27}^{(1)}(0;(2)) & = & 1. \end{array}$$

Daraus ergibt sich, indem wir

$$\begin{array}{rcll} \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_2)) & > & 1, & \textit{und} \\ \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_i)) & > & \frac{1}{27}, & i \in \{1,3,4,5,6\}, \end{array}$$

benutzen, die folgende Aussage:
$f \equiv 0$, falls für alle $T \in N$ mit

$$\begin{aligned} T = \omega_1(T) \quad \leq \quad & \frac{[\mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(1)}(27)]}{t_{27}^{(1)}(1;(0))} \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{t_{27}^{(1)}(0;(0)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_2))}{t_{27}^{(1)}(1;(0))} \\ & - \frac{t_{27}^{(1)}(0;(1))(\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_3)) + \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_4)))}{t_{27}^{(1)}(1;(0))} \\ & - \frac{t_{27}^{(1)}(0;(2))(\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_5)) + \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_5)))}{t_{27}^{(1)}(1;(0))} \\ \leq \quad & \frac{1}{27}\left(\frac{18k}{\sqrt{3}\pi} - \frac{35}{27}\right) \end{aligned}$$

die Koeffizienten $a_{1,T} = 0$ sind, oder falls für alle $T \in \frac{1}{27}\mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} T = \omega_1(T) \quad \leq \quad & \frac{[\mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(1)}(27)]}{t_{27}^{(1)}(0;(0))} \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{t_{27}^{(1)}(1;(0)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_1))}{t_{27}^{(1)}(0;(0))} \\ & - \frac{t_{27}^{(1)}(0;(1))(\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_3)) + \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_4)))}{t_{27}^{(1)}(0;(0))} \\ & - \frac{t_{27}^{(1)}(0;(2))(\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_5)) + \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_6)))}{t_{27}^{(1)}(0;(0))} \\ \leq \quad & \frac{18k}{\sqrt{3}\pi} - \frac{35}{27} \end{aligned}$$

die Koeffizienten $a_{2,T} = 0$ sind, oder falls für alle $T \in \frac{1}{27}\mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} T = \omega_1(T) \quad \leq \quad & \frac{[\mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(1)}(27)]}{t_{27}^{(1)}(0;(1))} \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} \\ & - \frac{t_{27}^{(1)}(1;(0)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_1))}{t_{27}^{(1)}(0;(1))} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{t_{27}^{(1)}(0;(0)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_2))}{t_{27}^{(1)}(0;(1))} \\
& -\frac{t_{27}^{(1)}(0;(1)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_k))}{t_{27}^{(1)}(0;(1))} \\
& -\frac{t_{27}^{(1)}(0;(2))(\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_5)) + \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_6)))}{t_{27}^{(1)}(0;(1))} \\
\leq \; & \frac{1}{3}\left(\frac{18k}{\sqrt{3}\pi} - \frac{59}{27}\right)
\end{aligned}
$$

für $k \in \{3,4\}$, $k \neq i$ die Koeffizienten $a_{i,T} = 0$, $i \in \{3,4\}$ sind, oder falls für alle $T \in \frac{1}{27}\mathbb{N}$ mit

$$
\begin{aligned}
T = \omega_1(T) \leq \; & \frac{[\mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(1)}(27)]}{t_{27}^{(1)}(0;(2))} \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} \\
& -\frac{t_{27}^{(1)}(1;(0)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_1))}{t_{27}^{(1)}(0;(2))} \\
& -\frac{t_{27}^{(1)}(0;(0)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_2))}{t_{27}^{(1)}(0;(2))} \\
& -\frac{t_{27}^{(1)}(0;(1))(\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_3)) + \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_4)))}{t_{27}^{(1)}(0;(2))} \\
& -\frac{t_{27}^{(1)}(0;(2)) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k M_k))}{t_{27}^{(1)}(0;(2))} \\
\leq \; & \frac{18k}{\sqrt{3}\pi} - \frac{61}{27}
\end{aligned}
$$

für $k \in \{5,6\}$, $k \neq i$ die Koeffizienten $a_{i,T} = 0$, $i \in \{5,6\}$ sind. Auch in diesem Beispiel sind die Schranken gleichwertig, die man aus den Entwicklungen für die Spitzenklassen M_1, M_2 aus $S_{27}^{(1)}(1;(0))$ und $S_{27}^{(1)}(0;(0))$ erhält, wie wir bereits in Korolar 2.46 gesehen haben. Für die Spitzenklassen $M_3, \ldots, M_6$ beachte auch Beispiel 2.49.

□

Um Aussagen über die Spitzenklassen $M_3, \ldots, M_6$ aus Beispiel 2.48 zu erhalten, beschränken wir uns nun auf eine mittels einer Thetareihe konstruierte Modulform f. Die Träger von $f|_k M_i$, $i \in \{3, \ldots, 6\}$ sind in diesen Fällen aus $\frac{1}{27}\mathbb{N}$. In den Arbeiten von Y. Kitaoka [34] und H. G. Quebbemann [53] wird das Transformationsverhalten von Thetareihen zu beliebiger Stufe unter der Operation einer Matrix M aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ beschrieben.

Sei θ_Λ eine Thetareihe zu einem geraden Gitter Λ der Stufe p^ν und

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \text{ mit } p^v|c, \; (2 \not| p).$$

Sei weiter

$$\begin{aligned} \phi : \Lambda^\#/\Lambda &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ v+\Lambda &\mapsto \frac{1}{2}\mathrm{Norm}(v)+\mathbb{Z} \end{aligned}$$

und

$$E = \left\{ w+\Lambda \in \Lambda^\#/\Lambda \,\middle|\, (v+\Lambda)\cdot(w+\Lambda) = c\phi(v) \;\; \forall v \in \left(\Lambda^\# \cap \frac{1}{c}\Lambda\right)\Big/ \Lambda \right\}.$$

Hierbei bezeichnet $\Lambda^\#$ das Dualgitter von Λ und $\mathrm{Norm}(v)$ die Norm des Gitterpunktes v. Nach [53], Proposition 2 ist dann

$$\sqrt{\det(\Lambda)}\sqrt{\mathrm{i}c}^{\,n}\theta_\Lambda|_k T = \sharp\left(\Lambda/\Lambda^\#\right) \sum_{w\in E} \gamma_T(w)\theta_w \tag{2.49}$$

mit

$$\gamma_T(w) = e^{\pi \mathrm{i}\frac{\mathrm{Norm}(w)}{c}} \sum_{y\in\Lambda/(\Lambda\cap c\Lambda^\#)} e^{\pi \mathrm{i}\frac{1}{c}(\mathrm{Norm}(y)+2y\cdot w)}$$

und

$$\theta_w(Z) = \sum_{v\in w\subset\Lambda/\Lambda^\#} e^{\pi \mathrm{i}\mathrm{Norm}(v)Z}.$$

Beispiel 2.49
Wir betrachten das 27-modulare Gitter

$$\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}-3\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

mit Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Dabei sagen wir ein Gitter Ω ist N-modular, falls die Gram-Matrizen von Ω und $\sqrt{N}\Omega$ isometrisch (also $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$*-äquivalent sind. Das Dualgitter von Λ hat Gram-Matrix*

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und wird von

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

erzeugt. Wir wollen die Entwicklung von $\Theta_\Lambda(Z)$ *in der Spitzenklasse*

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

betrachten. Für $c = 3$ *ist dann*

$$\Lambda^\# \cap \frac{1}{3}\Lambda \quad = \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

und für $c = 9$ *ist*

$$\Lambda^\# \cap \frac{1}{9}\Lambda \quad = \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{-\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Demnach besteht im Fall $c = 3$ *die Menge*

$$\left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

aus Repräsentanten für E*. Im Fall* $c = 9$ *ist dies nur*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir sind nun am Träger von $\Theta_\Lambda|T_i$*,* $i \in \{1, 2\}$ *interessiert. Gleichung (2.49) liefert uns, dass mit geeigneten Konstanten* const_1 *und* const_2

$$\begin{aligned} \Theta_\Lambda|T_2 \quad &= \quad \mathrm{const}_1 \sum_{w \in E} \gamma_{T_2}(w)\Theta_w \\ &= \quad \mathrm{const}_1 \gamma_{T_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Theta_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \\ &= \quad \mathrm{const}_2 \sum_{x \in \Lambda} e^{\pi \mathrm{i} \mathrm{Norm}(x) Z} \end{aligned}$$

ist. Da $T_2 \in S_{27}^{(1)}(0; (2))$ *ist, würde es nach Beispiel 2.48 genügen alle Fourierkoeffizienten* a_T *mit*

$$t \quad \leq \quad \frac{18}{\sqrt{3}\pi} - \frac{61}{27}$$

zu betrachten, um eine Linearkombination von Thetareihen der Stufe 27 *und Gewicht* 1 *als* 0 *nachzuweisen. Dies sind für Gewicht* 1 *etwa genau so viel wie in den Spitzenklassen aus* $S_{27}^{(1)}(1;(0))$ *und* $S_{27}^{(1)}(0;(0))$*. Betrachten wir nun den Träger von* $\Theta_\Lambda|T_1$*. Gleichung (2.49) liefert:*

$$\Theta_\Lambda|T_1 \quad = \quad \mathrm{const}_1 \sum_{w \in M \subset \Lambda^\#/\Lambda} \gamma_{T_1}(w)\Theta_w.$$

Dabei besteht M *aus den drei Nebenklassen*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Lambda, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \Lambda, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \Lambda.$$

Für eine Rechnung sind, da $T_1 \in S_{27}^{(1)}(0;(1))$ *ist, alle Fourierkoeffizienten* a_T *von Interesse, für die* T *kleiner ist als etwa das dreifache der in Beispiel 2.48 für den Fall* $k = 1$ *angegebenen Schranke, insgesamt also kleiner als*

$$\frac{18}{\sqrt{3}\pi} - \frac{59}{27}.$$

In diesem Fall sind also auch etwa dieselbe Anzahl von Fourierkoeffizienten von Interesse wie in allen anderen Spitzenklassen auch.

$\square$

Bemerkung 2.50

i) Das letzte Beispiel suggeriert uns, dass im Fall $n = 1$ *die angegebenen Schranken in je zwei Spitzenklassen jeweils gleichwertig sind. Eine genaue Untersuchung hierzu wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgenommen. Eine Möglichkeit dies anzugehen besteht wohl darin die in [34] angegebenen expliziten Transformationsformeln auf die in (2.13) angegebene Menge von Spitzenklassen anzuwenden und die dazugehörigen Schranken zu vergleichen.*

ii) Die von E. Hecke in [28], Satz 2, p. 811 und der Anmerkung dazu angegebenen Schranke für den Fal $n = 1$ *ist besser als die hier behandelte Schranke.*

iii) Der Rechenaufwand, um zu entscheiden ob eine Spitzenform identisch null ist, kann durch eine Rechnung in mehreren Spitzenklassen verringert werden, wenn man annimmt, dass der Rechenaufwand zur Bestimmung eines Fourierkoeffizienten mit steigender dyadischer Spur auch steigt. Siehe hierzu auch Bemerkung 2.51.

$\square$

Betrachten wir nun Formen von beliebigem Grad n. Wir wollen zunächst Abschätzungen angeben, die sich aus der Betrachtung der Spitzenklassen aus

$$S_N^{(n)}(\underline{n};(\underline{0})) = \left\{ J_n = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad S_N^{(n)}(\underline{0};(\underline{0})) = \{E_{2n}\}$$

ergeben. Nach Lemma 2.42 ist

$$\begin{aligned} t_N^{(n)}(n;(0)) &= N^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ t_N^{(n)}(0;(\underline{0})) &= 1. \end{aligned}$$

Seien

$$\begin{aligned} \left(f|_k E_{2n}\right)(Z) &= \sum_{T \in \mathrm{Supp}(f|_k E_{2n})} a_T e^{2\pi \mathrm{itr}(TZ)}, \\ \left(f|_k J_n\right)(Z) &= \sum_{T \in \mathrm{Supp}(f|_k J_{2n})} b_T e^{2\pi \mathrm{itr}(TZ)} \end{aligned}$$

Fourierentwicklungen von f in E_{2n} beziehungsweise in J_n. Die potenziellen Träger dieser Modulformen wurden in Lemma 1.20 angegeben. Nach Satz 2.44 ist dann $f \equiv 0$, falls eine der folgenden beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.

i) $a_T = 0$ für alle

$$T \in \mathrm{Supp}(f|_k E_{2n}) = \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2}\mathbb{Z}\right) \middle| T > 0, t_{jj} \in \mathbb{Z} \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_n(T) &< N^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{nk}{2\sqrt{3}\pi} \prod_{p|N} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^i}\right) \\ &\quad - \frac{3}{2N} \left(N^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{p|N} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^i}\right) - 1 \right) \\ &= \frac{3}{2N} + N^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\frac{nk}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{3}{2N} \right) \prod_{p|N} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^i}\right), \end{aligned}$$

ii) $b_T = 0$ für alle

$$T \in \mathrm{Supp}(f|_k J_n) = \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right) \middle| T > 0, N t_{jj} \in \mathbb{Z} \right\}$$

mit

$$
\begin{aligned}
\omega_n(T) &< \frac{N^{\frac{n(n+1)}{2}}}{N^{\frac{n(n+1)}{2}}} \frac{nk}{2\sqrt{3}\pi} \prod_{p|N} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^i}\right) \\
&\quad - \frac{3}{2N} \frac{1}{N^{\frac{n(n+1)}{2}}} \left(N^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{p|N} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^i}\right) - N^{\frac{n(n+1)}{2}} \right) \\
&= \frac{3}{2N} + \left(\frac{nk}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{3}{2N} \right) \prod_{p|N} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^i}\right).
\end{aligned}
$$

Benutzen wir die Abschätzung aus ii), so sind, um zu entscheiden ob eine Spitzenform identisch Null ist, alle halbganzen ($\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-inäquivalenten) Formen zu betrachten, deren dyadische Spur kleiner als

$$
\frac{3}{2} + N \left(\frac{nk}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{3}{2N} \right) \prod_{p|N} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^i}\right). \tag{2.50}
$$

ist. Diese Schranke ist für großes N im Vergleich zum Fall i) etwa um das $N^{\frac{n(n+1)}{2}}$-fache kleiner. Ein Test auf Verschwinden einer Modulform benötigt also im Fall *i)* nur etwa den $N^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$-ten Teil der Fourierkoeffizienten wie ein Test im Fall *ii)*.

Bemerkung 2.51

i) *Dies ist ein Unterschied zum Fall $n = 1$, in dem die Spitzenklasse J_2 im Vergleich zur Spitzenklasse E_2 für eine Rechnung nicht bevorzugt wird.*

ii) *Es stellt sich allgemein das Problem zu entscheiden, welche Spitzenklasse die beste Schranke liefert. Es ist zu vermuten, dass die Spitzenklassen von $S^{(n)}_{p^\nu}(l;(\underline{v}))$ mit kleinem l eine bessere Schranke liefern, als diejenigen mit großem l, da in (2.29) p-Potenzen auftreten, die bei großem l auch groß werden.*

iii) *Im Hinblick auf Bemerkung 2.37 können sich bereits die Schranken unterscheiden, die man für zwei Spitzenklassen aus $S^{(2)}_{p^\nu}(l;(\underline{v}))$ erhält. Es kann vermutet werden, dass der Unterschied der sich hierbei für Spitzenklassen aus der Menge $S^{(n)}_{p^\nu}(l;(\underline{v}))$ ergibt, nur gering ist. Im Grad $n = 2$ ist dies für zwei Schranken zu geeigneten Spitzenklassen lediglich ein Faktor $\left(\frac{p^2+1}{p^2-1}\right)$ beziehungsweise $\left(\frac{p^2-1}{p^2+1}\right)$.*

iv) *Selbst unter der Annahme, dass man mit kleinem l eine bessere Schranke erhält, können wir hier nicht davon ausgehen, dass bei einem Test auf*

Gleichheit von zwei Modulformen die Spitzenklasse J_{2n} (hier ist $l = 0$) die schnellste Rechnung liefert. Rechnen wir zum Beispiel zusätzlich zu J_{2n} für einige Spitzenklassen mit $l = 1$ einige Fourierkoeffizienten aus, was wahrscheinlich einen relativ kleinen Rechenaufwand bedeutet, da $\mathrm{tr}(T)$ *klein ist, so lässt sich damit die Anzahl der zu berechnenden Fourierkoeffizienten in J_{2n} verringern. Einerseits sind dies wohl gerade diejenigen Fourierkoeffizienten, für die man einen hohen Rechenaufwand benötigt, um sie zu bestimmen. Andererseits ist zu erwarten, dass die Anzahl der Matrizen T aus dem Träger einer Modulform, für die $\omega_n(T) = \mathrm{const}$ gilt, mit wachsender Konstante* const *stark ansteigt (Siehe auch Teil vi) dieser Bemerkung), so dass eine geringe Verkleinerung der Schranken die Berechnung vieler Fourierkoeffizienten überflüssig machen kann. Nimmt man dabei noch an, dass für eine große Kostante auch noch die Spur von T groß ist (siehe vi)), so erspart man sich hier gerade die Berechnungen für diejenigen T, die aufwendig sind. Diese beiden Effekte können dann zu einer signifikanten Rechenzeitverkürzung führen.*

v) *Über den Zusammenhang von Spur und dyadischer Spur weiß man für kleines n, dass für alle Minkowski-reduzierten Formen T:*

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T) &= \omega_1(T), \quad \textit{falls} \quad n = 1, \\ \frac{3}{4}\mathrm{tr}(T) &\le \omega_2(T), \quad \textit{falls} \quad n = 2, \\ \frac{2}{3}\mathrm{tr}(T) &\le \omega_3(T), \quad \textit{falls} \quad n = 3, \end{aligned}$$

ist (siehe hierzu [52], Abschnitt 4). Für größeres n ist hier keine lineare Abschätzung mehr bekannt. Selbst falls es eine solche Abschätzung nicht gibt, sollte man erwarten, dass man für eine große Spur auch meistens eine große dyadische Spur hat. Man beachte hierbei auch noch Lemma 2.52. Eine nicht lineare Abschätzung von Spur und dyadischer Spur findet man in Lemma 2.54

vi) *Um die Mächtigkeit der Menge*

$$\mathrm{RG}^{(n)}_{\omega_n}(\mathrm{const}) \quad = \quad \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \omega_n(T) \le \mathrm{const} \\ t_{ii} \in 2\mathbb{Z},\ i \in \{1,\dots,n\}, \\ T \textit{ ist Minkowski-reduziert} \end{array} \right\}$$

abzuschätzen, kann man ausnutzen, dass für alle Minkowski-reduzierten Matrizen T gilt: $\omega_n(T) \le \mathrm{tr}(T)$. Es folgt, dass $|\mathrm{RG}^{(n)}_{\mathrm{GL}}(\mathrm{const})|$ kleiner als die Mächtigkeit der Menge

$$\mathrm{RG}^{(n)}_{\mathrm{tr}}(\mathrm{const}) \quad = \quad \left\{ T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{tr}(T) \le \mathrm{const} \\ t_{ii} \in 2\mathbb{Z},\ i \in \{1,\dots,n\}, \\ T \textit{ ist Minkowski-reduziert} \end{array} \right\}$$

ist. Sei G die Gram-Matrix einer halbganzen, positiv definiten, Minkowski-reduzierten quadratischen Form gegeben. Aus den Reduktionsbedingungen folgt $0 \leq g_{11} \leq \ldots \leq g_{nn}$ und $2|g_{ij}| \leq g_{ii}$. Die Diagonaleinträge von G können also jeweils $\frac{\mathrm{const}}{2}$ und die Einträge, die nicht auf der Diagonalen stehen, jeweils const Werte annehmen. Also ist

$$\mathrm{RG}^{(n)}_{\omega_n}(\mathrm{const}) \in O\left(\frac{1}{2^n}\mathrm{const}^{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

Im Fall $n = 2$ findet man in Gleichung (2.57) eine bessere Abschätzung.

vii) Eine explizite Beschreibung der Fourierkoeffizienten einer Modulform bei Entwicklung in einer beliebigen Spitzenklasse durch die Fourierkoeffizienten einer fest vorgegebenen Entwicklung wäre hier wünschenswert. Selbst für Thetareihen kennt man eine explizite Beschreibung nur im Fall der Dimension 1 aus [53] und [34].

viii) Für einige besondere Spitzenklassen wurde in Lemma 1.20 ein expliziter Zusammenhang von Fourierkoeffizienten von Modulformen berechnet. Hierfür werden wir später Verbesserungen der Schranken angeben.

□

Lemma 2.52
Sei c_n die größte Konstante, die so gewählt ist, dass für alle Minkowski-reduzierten Form $T \in \mathrm{P}_n(\mathbb{R}) \cap C_n^*$ gilt:

$$c_n \mathrm{tr}(T) \quad \leq \quad \omega_n(T).$$

Dann ist

$$c_{n+1} \quad \leq \quad c_n.$$

Beweis:
Zunächst wollen wir anmerken, dass die Konstanten c_n existieren, da für alle $T \in \mathrm{P}_n(\mathbb{R}) \cap C_n^*$ gilt:

$$\omega_n(T) \leq \mathrm{tr}(T).$$

Ist also c_T die größte Konstante, so dass

$$c_T \mathrm{tr}(T) \quad \leq \quad \omega_n(T)$$

gilt, dann ist c_T aus $[0, 1]$. Da $\mathrm{P}_n(\mathbb{Q})$ dicht in $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ ist, und da für die Spur und die dyadische Spur gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\lambda T) &= \lambda \mathrm{tr}(T), \\ \omega_n(\lambda T) &= \lambda \omega_n(T), \end{aligned}$$

genügt es nach der Definition von c_n anstelle der Minkowski-reduzierten Formen aus $\mathrm{P}_n(\mathbb{R}) \cup C_n^*$ nur Minkowski-reduzierte Formen aus $\mathrm{P}_n(\mathbb{Z})$ zu betrachten. Sei $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Formen und $\{c_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen, so dass $c_{n,i}\mathrm{tr}(T_i) = \omega_n(T_i)$ und

$$\lim_{i\to\infty} c_{n,i} \quad = \quad c_n$$

gilt. Wir betrachten die Folge

$$\left\{ S_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_i \end{pmatrix} \right\}_{i\in\mathbb{N}} .$$

Da alle T_i Minkowski-reduziert sind, sind dies auch alle S_i und es ist

$$\omega_{n+1}(S_i) \quad = \quad \omega_n(T_i) + 1 \quad = \quad c_{n,i}\mathrm{tr}(T_i) + 1.$$

Da

$$\lim_{i\to\infty} c_{3,i} \quad \leq \quad \frac{2}{3}$$

ist, folgt mit Induktion nach n nun: Es existiert ein i_0, so dass für alle $i > i_0$ die Ungleichung $1 \geq c_{n,i}$ gilt und somit

$$c_{n,i}\mathrm{tr}(T_i) + 1 \quad \geq \quad c_{n,i}\mathrm{tr}(T_i) + c_{n,i} \quad = \quad c_{n,i}\mathrm{tr}(S_i), \quad \forall i > i_0,$$

also $\omega_{n+1}(S_i) \geq c_{n,i}\mathrm{tr}(S_i)$, $\forall i > i_0$, was wiederum $c_{n+1} \leq c_n$ impliziert, da $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilmenge von $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ ist.

□

Bemerkung 2.53

i) Die Werte c_n für $n \geq 4$ können durchaus gleich null sein. Sowohl die Spur als auch die dyadische Spur liefern uns eine positive Schranke für die Entscheidung, ob eine vorgegebene Spitzenform identisch Null ist oder nicht. Das Verhältnis dieser Schranken ist eine gewisse positive Zahl. Dieses Verhältnis könnte für große Werte von Spur und dyadischer Spur aber beliebig nahe an 0 liegen. Falls für ein n der Wert von c_n gleich Null wäre, also $\mathrm{tr} \notin O(\omega_n)$, dann könnte die dyadische Spur dementsprechend im Vergleich zur Spur eine beliebig gute Verbesserung der Schranken liefern. (Dies wäre dann vor allem für große Schranken, also Spitzenformen mit hohem Gewicht oder großer Stufe zu erwarten.) Könnte man umgekehrt zeigen, dass c_n einen positiven Wert hätte, also $\mathrm{tr} \in O(\omega_n)$, dann würde dies die dyadische Spur davon abhalten, im Vergleich zur Spur eine beliebig gute Verbesserung der Schranken zu liefern.

ii) Anstrengungen einen positiven Wert für die Konstanten c_n im Rahmen dieser Arbeit zu konstruieren waren leider fruchtlos. Mit Hilfe der Reduktionstheorie lässt sich aber noch folgender Zusammenhang von Spur und dyadischer Spur zeigen.

$\square$

Lemma 2.54
Für die ganzen Minkowski-reduzierten Formen T gibt es eine Konstante const_n, so dass gilt:

$$\omega_n(T) \quad \geq \quad \mathrm{const}_n \sqrt[n]{\mathrm{tr}(T)}.$$

Beweis:
Zunächst können wir die dyadische Spur einer Form durch deren Determinante abschätzen (siehe [52] Proposition 3.12),

$$\omega_n(T) \quad \geq \quad \frac{n}{\mu_n} \sqrt[n]{\det(T)}.$$

Seien $M_1, \ldots, M_n$ die sukzessiven Minima von T. Nach [12], Theorem 2.2, Theorem 3.1 oder [65] ist

$$\mu_n^n \det(T) \quad \geq \quad \prod_{j=1}^{n} M_j$$

und

$$M_j \quad \geq \quad C_j t_{jj}$$

für geeignete Konstanten C_j. Also ist:

$$\omega_n(T) \quad \geq \quad \frac{n}{\mu_n} \sqrt[n]{\det(T)} \quad \geq \quad \frac{n}{\mu_n^2} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} M_j} \quad \geq \quad \frac{n}{\mu_n^2} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} C_j} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} t_{jj}}.$$

Da T ganz ist, können wir schließlich das Produkt über die Diagonaleinträge t_{jj} durch die Spur abschätzen:

$$\prod_{j=1}^{n} t_{jj} \quad \geq \quad \mathrm{c} \sum_{j=1}^{n} t_{jj} \quad = \quad \mathrm{c}\ \mathrm{tr}(T).$$

Hierbei ist $\mathrm{c} = 1$, falls T eine gerade Form ist und 2^{1-n} falls T halbganz ist. In beiden Fällen gibt es eine Konstante

$$\mathrm{const}_n \quad = \quad \frac{n}{\mu_n^2} \sqrt[n]{\mathrm{c} \prod_{j=1}^{n} C_j},$$

die die behauptete Ungleichung aus dem Lemma erfüllt.

$\square$

2.5 Verbesserungen von Schranken für einige Spitzenklassen

Wir wollen nun noch Verbesserungen der in Satz 2.44 angegebenen Schranken für einige Spitzenklassen herleiten. Betrachten wir dazu den in (1.11) beschriebenen Vektorraumautomorphismus von $S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$. Sei S_i die Spitzenklasse aus $S_N^{(n)}(\underline{i}, (\underline{0}))$, $0 \leq i \leq n$. In Lemma 1.20 wird für eine Form $f \in S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ die Fourierentwicklung von $(f|S_{n-i})(Z)$ explizit durch die Entwicklung von $(f|w_{n,N}^{\text{fr}}|S_i)(Z)$ ausgedrückt.

Bemerkung 2.55

i) Betrachten wir eine Form f aus dem von Thetareihen erzeugten Unterraum eines Raums von Modulformen zur $\Gamma_0^{(n)}(N)$, dann lässt sich diese durch Fourierentwicklungen von $(f|_k S_i)(Z)$ für alle i explizit berechnen. Formeln hierfür findet man in [6], Lemma 8.2 und [5], Lemma 4.8.

ii) Der von den Thetareihen erzeugte Raum der Modulformen ist invariant unter der Frickeinvolution. Betrachten wir also eine Siegelsche Thetareihe Θ vom Geschlecht n zum Gitter Λ mit Stufe N, dann ist $\Theta|_k w_{n,N}^{\text{fr}}$ die Siegelsche Thetareihe vom Geschlecht n zum mit N skalierten Dualgitter von Λ. Siehe hierzu zum Beispiel [24], Satz 0.3 (Thetatransformationsformel) zusammen mit Gleichung (1.12).

$\square$

Sei g das Bild einer Spitzenform $f \in S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ unter der Frickeinvolution, $g = f|_k w_{n,N}^{\text{fr}}$ mit Fourierentwicklungen

$$\begin{aligned}(g|_k S_i)(Z) &= \sum_{\tilde{T} \in \text{Supp}(g|_k S_i)} a_{\tilde{T}} e^{2\pi i \text{tr}(\tilde{T}Z)} \quad \text{und} \\ (f|_k S_{n-i})(Z) &= \sum_{T \in \text{Supp}(f|_k S_{n-i})} b_T e^{2\pi i \text{tr}(TZ)},\end{aligned}$$

für $i \neq 0$, und seien zwei Konstanten c_1 und c_2 so vorgegeben, dass die beiden Aussagen

$$(g|_k S_i)(Z) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l}\forall \tilde{T} \in \text{Supp}(g|_k S_i) \text{ mit } \omega_n(\tilde{T}) \leq c_1 \\ \text{gilt } a_{\tilde{T}} = 0,\end{array} \tag{2.51}$$

$$(f|_k S_{n-i})(Z) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l}\forall T \in \text{Supp}(f|_k S_{n-i}) \text{ mit } \omega_n(T) \leq c_2 \\ \text{gilt } b_T = 0\end{array} \tag{2.52}$$

wahr sind. Wir wollen nun die folgende Aussage zeigen:

$$\begin{array}{l}\text{Falls } \forall T \in \text{Supp}(f|_k S_{n-i}) \text{ mit } \omega_n(T) \leq N c_1 \text{ gilt } b_T = 0, \\ \text{dann ist } \; f \equiv 0.\end{array} \tag{2.53}$$

Aufgrund von Lemma 1.20 besteht für die Fourierkoeffizienten $a_{\tilde{T}}$ von $(g|_k S_i)(Z)$ und b_T von $(f|_k S_{n-i})(Z)$ der Zusammenhang

$$b_T \;=\; \left((-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{\frac{n}{2}-i}\right)^{-k} a_{\tilde{T}}$$

mit

$$\tilde{T} \;=\; \begin{pmatrix} & \sqrt{N}K_{n-i} \\ \frac{1}{\sqrt{N}}K_i & \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{N}}K_i \\ \sqrt{N}K_{n-i} & \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$b_T \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; a_{\tilde{T}} \;=\; 0.$$

Im an diese Ausführungen anschließenden Lemma 2.59 werden wir zeigen, dass

$$\omega_n(T) \;\leq\; N\omega_n(\tilde{T})$$

gilt. Damit erhalten wir aus (2.53) die Implikation von rechts nach links in (2.51). Ist also die Voraussetzung in (2.53) wahr, so folgt daraus $g|_k S_i \equiv 0$ und somit $g \equiv 0$ und, da die Frickeinvolution ein Automorphismus ist, auch $f \equiv 0$. Ist $Nc_1 < c_2$ haben wir eine Verbesserung der Abschätzung aus Satz 2.44 angegeben.
Im Fall $i = 0$ seien die beiden Fourierentwicklungen

$$\begin{aligned}(g|_k S_0)(Z) \;&=\; \sum_{\tilde{T}\in \mathrm{Supp}(g|_k S_0)} a_{\tilde{T}} e^{2\pi i \mathrm{tr}(\tilde{T}Z)} \qquad \text{und}\\ (f|_k S_n)(Z) \;&=\; \sum_{T\in \mathrm{Supp}(f|_k S_n)} b_T e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)},\end{aligned}$$

sowie Konstanten c_1 und c_2 wie in (2.51) und (2.52) gegeben. Wir wollen annehmen dass c_1 so gewählt ist dass gilt:

> Falls $\forall \tilde{T} \in \mathrm{Supp}(g|_k S_0)$ mit $\omega_n(\tilde{T}) < c_1$ gilt $a_{\tilde{T}} = 0$,
> dann ist $g \equiv 0$.

Mit Lemma 1.20 folgern wir

$$b_T \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; a_{\tilde{T}} \;=\; 0$$

mit $\tilde{T} = NK_nTK_n$, denn

$$b_T \;=\; (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}k} N^{-\frac{nk}{2}} a_{\tilde{T}}.$$

Da $K_N \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ ist, gilt $\omega_n(\tilde{T}) = N\omega_n(T)$ und es folgt:

> Falls $\forall T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_n)$ mit $\omega_n(T) < Nc_1$ gilt $b_T = 0$,
> dann ist $f \equiv 0$.

Die sich aus den obigen Ausführungen ergebenden Verbesserungen fassen wir in folgendem Satz zusammen. Beachte dabei, dass für die dort definierten Schranken $\min\{c_0, Nc_n\} = Nc_n$ gilt, was in Teil ii) der Aussge benutzt wird.

Satz 2.56
Seien S_i für $0 \leq i \leq n$ die Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$ aus $S_N^{(n)}(\underline{i}, (\underline{0}))$, und seien S_i, $n < i \leq s$ die restlichen Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$. Sei weiter $f \in S_n^k\left(\Gamma_0^{(n)}(N)\right)$ eine Spitzenform mit Fourierentwicklungen

$$(f|_k S_i) = \sum_{T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_i)} a_{i,T} e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}.$$

Setzen wir für $0 \leq i \leq n$ jeweils

$$c_i = \frac{[\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(n)}(N)]}{t_N^{(n)}(i)} \mathfrak{w}_n \frac{k}{4\pi} - \mathfrak{d}_n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} \frac{t_N^{(n)}(j) \min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k S_i))}{t_N^{(n)}(i)},$$

wobei $t_N^n(i)$ die Weite der Spitzenklasse S_i bezeichnet, dann sind äquivalent:

i) $f \equiv 0$,

ii) $\forall T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_0)$ *mit* $\omega_n(T) < N c_n$ *gilt* $a_{0,T} = 0$,

iii) $\forall T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_n)$ *mit* $\omega_n(T) < c_n$ *gilt* $a_{n,T} = 0$,

iv) $\forall T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_i)$ *mit* $\omega_n(T) < \min\{c_i, N c_{n-i}\}$ *gilt* $a_{i,T} = 0$, $(0 < i \leq n)$.

□

Wir erhalten hieraus folgende explizite Schranken:

Korollar 2.57
Sei $N = \prod_{j=1}^{t} p_j^{\nu_j}$ eine natürliche Zahl. Mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 2.56 sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $f \equiv 0$,

ii) $\forall T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_n)$ *mit*

$$\omega_n(T) < \frac{\mathfrak{d}_n}{N} + \left(\frac{nk}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{\mathfrak{d}_n}{N}\right) \prod_{p|N} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^j}\right)$$

gilt $a_{n,T} = 0$,

iii) $\forall T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_0)$ *mit*

$$\omega_n(T) < \mathfrak{d}_n + \left(\frac{nkN}{2\sqrt{3}\pi} - \mathfrak{d}_n\right) \prod_{p|N} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p^j}\right)$$

gilt $a_{0,T} = 0$,

iv) $\forall T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_i)$ *mit*

$$\omega_n(T) \;<\; \min\{c(i), Nc(n-i)\},$$

wobei

$$c(i) \;=\; \frac{\mathfrak{d}_n}{N} + \left(\frac{nk}{2\sqrt{3}\pi} - \frac{\mathfrak{d}_n}{N}\right) N^{\frac{2in-i^2+i}{2}} \prod_{j=1}^{t} \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p^k}\right)}{\sum_{\substack{I\in D^{(n)}\\ r_I=i}} \left(p_j^{\nu_j t_I + (\nu_j-1)s_I}\right)}$$

ist, gilt $a_{i,T} = 0$, *falls* $0 < i < n$.

□

Bemerkung 2.58
Satz 2.44 liefert uns für die beiden Spitzenklassen S_0 und S_n Schranken, die wie im Anschluss an Bemerkung 2.502.50 gezeigt wird, nicht gleichwertig sind. Satz 2.56 sowie Korollar 2.57 liefern nun Schranken, die gleichwertig sind.

□

Nun zeigen wir die in Satz 2.56 benutzte Ungleichung.

Lemma 2.59
Ist $M = \begin{pmatrix} NA & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n,\mathbb{Z})$ *mit* $A \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(i,\mathbb{Z})$, $N \in \mathbb{N}$ *und*

$$\tilde{M} \;=\; \begin{pmatrix} & \sqrt{N}K_{n-i} \\ \frac{1}{\sqrt{N}}K_i & \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{N}}K_i \\ \sqrt{N}K_{n-i} & \end{pmatrix},$$

dann gilt:

$$\omega_n(M) \;\le\; N\omega_n(\tilde{M}), \quad \textit{falls} \quad 0 < i < n.$$

Beweis:
Sei

$$T_i \;=\; \begin{pmatrix} & \sqrt{N}K_{n-i} \\ \frac{1}{\sqrt{N}}K_i & \end{pmatrix}$$

und eine dyadische Darstellung von M, durch

$$M \;=\; \sum_j \alpha_j v_j v_j^t \quad \text{mit} \quad \omega\,(M) \;=\; \sum_j \alpha_j$$

gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{M} \;=\; T_i M T_i \;&=\; \sum_j \alpha_j \left(T_i v_j\right) \left(T_i v_j\right)^t \\ &=\; \sum_j \frac{\alpha_j}{N} \left(\sqrt{N} T_i v_j\right) \left(\sqrt{N} T_i v_j\right)^t\end{aligned}$$

und folglich:

$$\omega_n(\tilde{M}) \;\geq\; \sum_j \frac{\alpha_j}{N} \;=\; \frac{1}{N} \omega_n\left(M\right).$$

□

Bemerkung 2.60

i) Betrachtet man die Elemente $T \in \mathrm{Supp}(f_k|S_{n-i})$ *des potenziellen Trägers einer Modulform* f *zur* $\Gamma_0^{(n)}(N)$*, so kann der Faktor* N *in dieser Abschätzung nicht verbessert werden, wie man am folgenden Beispiel* $(0 < j < n)$ *erkennt, wenn man* N *groß wählt:*

$$M = \begin{pmatrix} N E_j & \\ & N^2 E_{n-j} \end{pmatrix} \quad \textit{hat dyadische Spur} \quad \omega_n(M) = N^{2(n-j)} + N^j,$$
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} N^3 E_{n-j} & \\ & E_j \end{pmatrix} \quad \textit{hat dyadische Spur} \quad \omega_n(\tilde{M}) = N^{3(n-j)} + j.$$

ii) Ist M *aus einer Teilmenge von* $\mathrm{Supp}(f_k|S_{n-i})$*, zum Beispiel aus der für uns interessanten Menge* $\{M \in \mathrm{Supp}(f_k|S_{n-i})|\ \omega_n(M) < \mathrm{const}\}$*, so kann und wird für explizite Rechnungen meistens auch eine bessere Abschätzung existieren.*

□

Im Anschluss geben wir noch eine Verbesserung der Schranken für die Grade $n = 2$ und $n = 3$ an. Wir bezeichnen wieder mit S_i die Spitzenklasse aus $S_N^{(n)}(\underline{i}; (\underline{0}))$. Bei der Herleitung von Satz 2.44 haben wir die Abschätzung

$$\min\left(\omega_n(\mathrm{Supp}(f|_k S_i))\right) \;\geq\; \tilde{\mathfrak{d}}_n N_i$$

(siehe 2.46) benutzt. Für die Spitzenklasse S_0 ist

$$\tilde{N}_i = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}_2 \;=\; \frac{3}{2}, \;\; \mathfrak{d}_3 \;=\; 2.$$

Betrachten wir aber eine der Spitzenklassen S_i, $1 \leq i \leq n$, dann wissen wir aus Lemma 1.20, dass das obere linke Element eines Elementes des Trägers durch N teilbar ist. Für eine Minkowski-reduzierte Form

$$T \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(2,\mathbb{Z})$$

ist dann:

$$\omega_2(T) \;=\; a+c-|b| \;\geq\; \frac{3}{2}N$$

und somit

$$\min \omega_2\left(\mathrm{Supp}(f|_k S_i)\right) \;\geq\; \frac{3}{2}.$$

Für $n=3$ folgt mit Hilfe von Proposition 4.2. aus [52], dass

$$\min \omega_3\left(\mathrm{Supp}(f|_k S_i)\right) \;\geq\; 2.$$

Eine weitere Verbesserung im Fall $n=2$ kann dadurch erreicht werden, dass man die in der Aussage von Satz 2.44, iii) benutzte Konstante

$$\frac{k}{\sqrt{3}\pi} \quad \text{auf} \quad \frac{k}{6} \tag{2.54}$$

reduziert. Dieses ist ein bisher noch unveröffentlichtes Ergebnis von C. Poor und D. S. Yuen.
Damit erhalten wir aus Satz 2.56 das folgende Korollar für Grad 2 Formen:

Proposition 2.61
Sei N eine natürliche Zahl mit Primfaktorzerlegung $N = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\nu_i}$ und $4 \nmid N$. Seien weiter S_i, $0 \leq i \leq 2$ die Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(2)}(N)$ aus $S_N^{(2)}(i;(\underline{0}))$ und sei $f \in S_n^k(\Gamma_0^{(2)}(N))$ eine Spitzenform mit Fourierentwicklung

$$\left(f|_k S_i\right)(Z) \;=\; \sum_{T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_i)} a_{i,T} e^{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}.$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) $f \equiv 0$,

ii) für alle $T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_2)$ *mit* $\omega_2(T) \leq c_1$ *gilt* $a_{2,T} = 0$,

iii) für alle $T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_0)$ *mit* $\omega_2(T) \leq N c_1$ *gilt* $a_{0,T} = 0$,

iv) für alle $T \in \mathrm{Supp}(f|_k S_1)$ *mit* $\omega_2(T) \leq c_2$ *gilt* $a_{1,T} = 0$.

Dabei ist

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{k}{6}\prod_{i=1}^{t}\prod_{j=1}^{2}\left(1+\frac{1}{p_i^j}\right) - \frac{3}{2N^3}\prod_{i=1}^{t}\Bigg(\left(1+p_i^{2\nu_i-1}+p_i^{2\nu_i}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{p_i^{\nu_i}}\left(p_i^{3\nu_i}\prod_{j=1}^{2}\left(1+\frac{1}{p_i^j}\right) - \left(1+p_i^{2\nu_i-1}+p_i^{2\nu_i}+p_i^{3\nu_i}\right)\right)\Bigg) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{k}{6}N^3\prod_{i=1}^{t}\frac{\prod_{j=1}^{2}\left(1+\frac{1}{p_i^j}\right)}{p_i^{2\nu_i}+p_i^{2\nu_i-1}} - \frac{3}{2}\prod_{i=1}^{t}\frac{1}{\left(p_i^{2\nu_i}+p_i^{2\nu_i-1}\right)} \\ &\qquad \left(1+p_i^{2\nu_i}\prod_{j=1}^{2}\left(1+\frac{1}{p_i^j}\right) - \frac{1+p_i^{2\nu_i-1}+p_i^{2\nu_i-2}}{p_i^{\nu_i}}\right). \end{aligned}$$

□

Für die Gewichte $k \in \{1,2,3\}$ und $N \leq 50$ fassen wir einige gerundete Werte für die Schranken Nc_1 und c_2 in der folgenden Tabelle zusammen. Hierbei werden Werte größer als 100 nicht mehr aufgeführt.

$k = 1:$

N	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15
c_1	-1.0	-0.5	-0.2	-0.2	-0.1	-0.0	0.1	0.0	0.1	0.1	0.1
Nc_1	-2.0	-1.4	-0.8	-1.0	-0.4	-0.3	0.6	0.4	0.7	2.0	1.9
c_2	-0.8	-0.7	-0.4	0.3	-0.1	0.2	1.1	0.5	0.8	1.9	1.8
Nc_2	-1.7	-2.1	-2.2	2.1	-1.0	1.4	10.8	5.1	10.1	26.0	27.1

N	17	18	19	21	22	23	25	26	27	29	30
c_1	0.1	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.4
Nc_1	1.4	3.9	1.8	3.5	4.7	2.4	3.1	6.0	4.0	3.5	12.6
c_2	1.4	2.9	1.7	2.9	3.5	2.4	2.8	4.3	3.4	3.4	6.3
Nc_2	24.2	52.3	33.2	59.9	76.3	55.2	70.8		91.5	98.2	

N	31	33	34	35	37	38	39	41	42	43	45
c_1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.3	0.2	0.1	0.4	0.1	0.2
Nc_1	3.8	6.6	8.5	6.3	4.8	9.8	8.1	5.5	18.3	5.8	10.7
c_2	3.7	5.0	5.9	5.0	4.7	6.7	6.1	5.4	9.0	5.7	7.4

N	46	47	49	50
c_1	0.3	0.1	0.2	0.3
Nc_1	12.3	6.5	7.6	50.7
c_2	8.4	6.4	6.8	9.6

$k = 2:$

N	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15
c_1	-0.7	-0.2	0.0	0.3	0.1	0.2	0.5	0.2	0.2	0.5	0.4
Nc_1	-1.4	-0.7	0.2	1.8	1.0	1.9	4.5	2.4	3.1	7.2	6.6
c_2	-0.4	-0.1	0.4	1.7	1.0	1.8	3.2	2.3	3.0	4.8	4.7
Nc_2	-0.8	-0.4	2.2	10.4	7.3	16.4	32.5	25.4	38.5	67.7	70.4

N	17	18	19	21	22	23	25	26	27	29	30
c_1	0.3	0.7	0.3	0.5	0.6	0.3	0.3	0.6	0.4	0.3	1.0
Nc_1	4.4	12.3	5.1	9.6	12.2	6.4	8.3	14.8	10.7	8.5	30.0
c_2	4.3	7.1	4.9	6.8	8.1	6.2	7.2	9.7	8.4	8.2	13.5
Nc_2	72.5		93.5								

N	31	33	34	35	37	38	39	41	42	43	45
c_1	0.3	0.5	0.6	0.4	0.3	0.6	0.5	0.3	1.0	0.3	0.5
Nc_1	9.1	15.5	19.8	14.8	11.1	22.3	18.5	12.5	40.9	13.1	24.6
c_2	8.9	11.2	13.0	11.2	10.9	14.7	13.4	12.2	18.9	12.9	16.0

N	46	47	49	50
c_1	0.6	0.3	0.3	0.7
Nc_1	27.3	14.5	17.1	50.3
c_2	18.0	14.2	15.2	20.4

$k = 3:$

N	2	3	5	6	7	9	10	11	13	14	15
c_1	-0.4	0.0	0.3	0.8	0.3	0.5	0.8	0.4	0.4	0.9	0.7
Nc_1	-0.8	0.1	1.3	4.5	2.3	4.2	8.4	4.4	5.4	12.3	11.2
c_2	-0.0	0.4	1.3	3.1	2.2	3.5	5.4	4.2	5.1	7.8	7.6
Nc_2	-0.0	1.2	6.5	18.7	15.6	31.4	54.2	45.8	66.8		

N	17	18	19	21	22	23	25	26	27	29	30
c_1	0.4	1.1	0.4	0.7	0.9	0.5	0.5	0.9	0.6	0.5	1.6
Nc_1	7.4	20.6	8.4	15.6	19.8	10.5	13.5	23.6	17.3	13.5	47.3
c_2	7.1	11.2	8.1	10.8	12.7	10.1	11.5	15.2	13.4	13.1	20.8

N	31	33	34	35	37	38	39	41	42	43	45
c_1	0.5	0.7	0.9	0.7	0.5	0.9	0.7	0.5	1.5	0.5	0.9
Nc_1	14.5	24.5	31.1	23.3	17.5	34.8	28.9	19.5	63.6	20.5	38.5
c_2	14.1	17.3	20.1	17.4	17.1	22.6	20.6	19.0	28.8	20.0	24.7

N	46	47	49	50
c_1	0.9	0.5	0.5	1.1
Nc_1	42.3	22.5	26.6	49.9
c_2	27.6	22.0	23.5	31.2

2.6 Die Dimension der Spitzenräume $\mathbf{S_n^k}$ $(\mathbf{\Gamma_0^{(n)}(N)})$

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Dimension der Räume $S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ von Spitzenformen vom Grad n zur Modulgruppe $\Gamma_0^{(n)}(N)$ vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ beschäftigen.
Im Fall $n = 1$ sind die Dimensionen für Fuchssche Gruppen der ersten Art bekannt. Siehe hierzu zum Beispiel [48], Theorem 2.5.2 und Theorem 2.5.3 oder [61], Theorem 2.24 und Theorem 2.25. E. Hecke [28], Satz 2, p. 811 und die Anmerkung dazu, gab bereits 1940 folgende Abschätzung an:

$$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(N), 1)) \leq \frac{k}{12} N \prod_{\substack{p|N \\ p,\text{Prim}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Explizite Werte finden sich zum Beispiel in [48], Table A. Speziell für Gewicht eins findet sich ein Ausdruck für die Dimensionen in Termen von Werten von Residuen von speziellen Zetafunktionen in einer Arbeit von Y. Tanigawa und H. Ishikawa [63].
Im Fall $n = 2$ hat K. Hashimoto mit Hilfe der Selbergschen Spurformel die Dimensionen von $S_n^k(\Gamma, 1)$ für bestimmte Untergruppen Γ von $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$ im Fall $k \geq 5$ bestimmt, siehe [27], Theorem 5-1. Daraus berechnet er dann unter anderem eine explizite Formel für $\dim(S_2^k(\Gamma_0^{(2)}(p), 1))$ für ungerade Primzahlen p. Siehe hierzu [27], Theorem 7-1. In dieser Veröffentlichung finden sich auch viele Hinweise auf weitere Aussagen zu Dimensionen von Spitzenräumen. Für die Gewichte $k = 3, 4$ gibt es Vermutungen für explizite Formeln. Im Falle $k = 2$ weiß man weniger. Es ist aber bekannt, dass die Dimensionen nicht für alle Stufen Null sind. Dies wurde in der Arbeit [6] von S. Böcherer und R. Schulze-Pillot gezeigt. Die in [6] vorgestellten unteren Abschätzungen sollen im folgenden Unterabschnitt zunächst beschrieben werden.
Im Fall $n = 3$ findet sich in [64] eine explizite Formel für $\dim(M_3^k(\mathrm{Sp}(3, \mathbb{Z}), 1))$ und in [46] im Fall $k \geq 10$ ein explizites Ergebnis für die Dimension von Spitzenräumen zur Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$.

2.6.1 Untere Abschätzungen der Dimensionen

In [6] werden von S. Böcherer und R. Schulze-Pillot mit Hilfe von Yoshida-Liftungen und Thetareihen nichttriviale Spitzenformen zu den Untergruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$ von 'kleinem' Gewicht konstruiert, [6], Corollary 9.1, p. 85. Wir betrachten speziell den Fall $n = 2$ und $N = p$ Primzahl. Mit $S_1^{2,*}(\Gamma_0^{(1)}(p))$ bezeichnen wir den Unterraum von $S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p))$, der von Hecke-Eigenformen h_i erzeugt wird, deren L-Funktion $L(\tau, h_i)$ an der Stelle $\tau = 1$ nicht verschwindet. Sei weiter $S_1^{2,+}(\Gamma_0^{(1)}(p))$ der Raum der Spitzenformen $f \in S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p))$, die unter der Frickeinvolution

$$w_N^{\mathrm{fr}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} & 1 \\ -N & \end{pmatrix}$$

invariant sind, also $f|_k w_N^{\mathrm{fr}} = f$, und $S_1^{2,-}(\Gamma_0^{(1)}(p))$ der Raum der Spitzenformen $f \in S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p))$, die unter der Frickeinvolution anti-invariant sind, $f|_k w_N^{\mathrm{fr}} = -f$. Die in [6] konstruierten Spitzenformen liefern für $\dim(S_2^2(\Gamma_0^{(2)}(p)))$ als untere Abschätzung den Wert

$$\dim(S_1^{2,*}(\Gamma_0^{(1)}(p))) + \frac{\mathrm{d}_p^+(\mathrm{d}_p^+ - 1)}{2} + \frac{\mathrm{d}_p^-(\mathrm{d}_p^- - 1)}{2},$$

mit

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_p^+ &= \dim(S_1^{2,+}(\Gamma_0^{(1)}(p))),\\ \mathrm{d}_p^- &= \dim(S_1^{2,-}(\Gamma_0^{(1)}(p))).\end{aligned}$$

Ist d_p^+ beziehungsweise d_p^- aus $\{0,1\}$, so ist der entsprechende Summand $\frac{\mathrm{d}_p^+(\mathrm{d}_p^+-1)}{2}$ beziehungsweise $\frac{\mathrm{d}_p^-(\mathrm{d}_p^--1)}{2}$ in der Abschätzung gleich Null. Der erste Fall für den eine Spitzenform f aus $S_1^{2,-}(\Gamma_0^{(1)}(p))$ existiert für die $L(1,f) = 0$ ist, ist $p = 389$. Dies folgt zum Beispiel aus [60]. Weitere Primzahlen, für die Spitzenformen aus $S_1^{2,-}(\Gamma_0^{(1)}(p))$ existieren, für die $L(1,f) = 0$ ist, wurden von K. Hashimoto angegeben und mit dessen Einverständnis in [6], p. 87 veröffentlicht. Ist $L(1,f) \neq 0$ für alle $f \in S_1^{2,-}(\Gamma_0^{(1)}(p))$ so gilt $\dim(S_1^{2,*}(\Gamma_0^{(1)}(p))) = \dim(S_1^{2,-}(\Gamma_0^{(1)}(p)))$.
Den Wert von $\dim(S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p)))$ findet man in [20], p 134. Es gilt für quadratfreies N:

$$\begin{aligned}\dim(S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(N))) \;=\;& 1 + \frac{1}{12}\sum_{p|N}(p+1) - \frac{1}{2}\sum_{p|N} 2 + \frac{1}{4}\sum_{p|N}\left(1 + \left(\frac{-4}{p}\right)\right)\\ &+ \frac{1}{3}\sum_{p|N}\left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right),\end{aligned}$$

wobei $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ das Jacobi-Symbol bezeichnet.

Bemerkung 2.62
Betrachten wir Spitzenformen vom Gewicht 2*, so folgt aus der obigen Formel, dass die Dimension* $\dim(S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(N)))$ *für quadratfreies* N *von der Größenordnung* $O\left(\frac{1}{12}N\right)$ *ist. Unter der Annahme, dass für Spitzenformen vom Grad* 1 *die Schranken für jede Fourierentwicklung gleichwertig sind, was für quadratfreies* N *in Proposition 2.47 gezeigt wird, kann aus einer Aussage der Form (2.43) ein Widerspruch hergeleitet werden. Nehmen wir an, für die beiden Spitzenklassen* M_j*,* $j \in \{1,2\}$ *stimmen die beiden Werte* $\min \omega_n(\mathrm{Supp}(f|_2 M_j))$*,* $j \in \{1,2\}$

immer überein. Dies liefert uns eine Abschätzung $d(N)$ für die Dimension von $\dim(S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(N)))$*, die von der Größenordnung* $O\left(\frac{N}{4\sqrt{3}\pi}\right)$ *ist. Damit ist aber*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)})(N))}{d(N)} \quad = \quad \frac{4\sqrt{3}\pi}{12} \quad \approx \quad 1,814,$$

was nicht möglich ist.

□

In [61], 2.24 wird gezeigt, dass

$$\dim(S_2^{2,+}(\Gamma_0^{(2)}(p)) \quad = \quad g(X_0^+(p))$$

ist. Dabei bezeichnet $g(X_0^+(p))$ das Geschlecht der Modulkurve $X_0^+(p)$. Eine Formel hierfür liefert E. Hecke in [28], p.773-781,

$$g(X_0^+(N)) \quad = \quad \frac{1}{2}g(X_0(N)) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\delta_N h(-4N),$$

mit

$$\delta_N \quad = \quad \begin{cases} 2, & \text{falls} \quad N \equiv 7 (\operatorname{mod} 8), \\ \frac{4}{3}, & \text{falls} \quad N \equiv 3 (\operatorname{mod} 8), \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $h(-4N)$ wird die Klassenzahl primitiver positiv definiter quadratischer Formen der Diskriminante $-4N$ und mit $g(X_0(N))$ das Geschlecht der Modulkurve $X_0(N)$glossary$g(X_0(N))$ bezeichnet. Eine Formel hierfür findet sich ebenfalls bei E. Hecke [28], p.773-781 oder in [48], Theorem 4.2.11, p. 113. Für eine Primzahl $N = p$ ist

$$\begin{aligned} g(X_0(N)) \quad = \quad & \frac{1}{12}(p+1) - \frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{-4}{p}\right)\right) \\ & + \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right). \end{aligned}$$

Da

$$S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p)) \quad = \quad S_1^{2,+}(\Gamma_0^{(1)}(p)) \oplus S_1^{2,-}(\Gamma_0^{(1)}(p))$$

die direkte Summe der beiden Unterräume invarianter und anti-invarianter Spitzenformen ist, also

$$\dim\left(S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p))\right) \quad = \quad \dim\left(S_1^{2,+}(\Gamma_0^{(1)}(p))\right) + \dim\left(S_1^{2,-}(\Gamma_0^{(1)}(p))\right),$$

gilt, kennen wir somit auch den Wert von

$$\mathrm{d}_p^- \quad = \quad \dim(S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p))) - \mathrm{d}_p^+.$$

Für Primzahlen kleiner als 100 sind in Tabelle 2.3 Dimensionen von einigen der oben genannten Räume sowie die untere Abschätzung für $\dim(S_2^2(\Gamma_0^{(2)}(p)))$ aufgeführt.

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
$\dim(S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p)))$	0	0	0	0	1	0	1	1	2	2	2	2	3
d_p^+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
d_p^-	0	0	0	0	1	0	1	1	2	2	2	1	3
$\dim(S_2^{2,*}(\Gamma_0^{(2)}(p)))$	0	0	0	0	1	0	1	1	2	2	2	2	6
p	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
$\dim(S_1^2(\Gamma_0^{(1)}(p)))$	3	4	4	5	4	5	6	5	6	7	7	7	
d_p^+	1	0	1	0	1	2	0	2	1	1	1	3	
d_p^-	2	4	3	5	3	3	6	3	5	6	6	4	
$\dim(S_2^{2,*}(\Gamma_0^{(2)}(p)))$	4	10	7	15	7	9	21	9	16	22	22	16	

Tabelle 2.3: Einige Werte von Dimensionen von Spitzenräumen und eine untere Abschätzung für $\dim(S_2^2(\Gamma_0^{(2)}(p)))$

2.6.2 Obere Abschätzungen der Dimensionen

Wir wollen nun auf obere Schranken für die Dimensionen $\dim(S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ eingehen. Seien dazu $S_1, \ldots, S_s$ die Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$. In Satz 2.44 wird für eine Spitzenform f und eine Spitzenkasse S_j eine obere Schranke

$$\tilde{c}_n^k(N,j) \;=\; \frac{[\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) : \Gamma_0^{(n)}(N)]}{t_N^{(n)}(j)}\mathfrak{w}_n \frac{k}{4\pi} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s} \frac{t_N^{(n)}(i) \min \omega_n\left(\mathrm{Supp}(f|M_i)\right)}{t_N^{(n)}(j)}$$

für die dyadische Spur der Elemente des potenziellen Trägers einer Fourierentwicklung von $f|_k M_j$ angegeben, die bestimmt werden müssen, um zu entscheiden, ob f identisch Null ist. Der Ausdruck (2.50) gibt für die Spitzenklasse J_n, die hier mit S_n bezeichnet werden soll, eine explizite Abschätzung für $\tilde{c}_n^k(N,n)$ an. Aus Abschnitt 2.4 und Satz 2.56 entnehmen wir, dass die Schranken für die Spitzenklassen J_n und E_{2n} Werte liefern, bei denen am wenigsten Fourierkoeffizienten berechnet werden müssen, um das Verschwinden von Spitzenformen nachzuweisen. Für Spitzenformen vom Grad 2 haben wir in Proposition 2.61 die explizite Schranke aus (2.50) verbessert. Den jeweils besten Wert wollen wir mit $c_n^k(N,j)$ bezeichnen.
Der Wert eines Fourierkoeffizienten a_T hängt nur von der $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$–Äquivalenzklasse von T ab. Die Anzahl der Klassen, die dyadische Spur kleiner als $c_n^k(N,j)$ haben, ist somit eine obere Schranke für die Dimension von $S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$. Da für ein Element $U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ gilt

$$a_T \;=\; \det(U)^{-k} a_{U^tTU}, \tag{2.55}$$

ist bereits die Anzahl der $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-äquivalenten Klassen von halbganzen, symmetrischen, positiv definiten Matrizen T, mit

$$\omega_n(T) \quad \leq \quad c_n^k(N,j)$$

eine obere Schranke für $\dim(S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N)))$. Gilt für jeden Repräsentanten T einer $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-Äquivalenzklasse $\overline{T}_0^{\mathrm{GL}}$ einer halbganzen, symmetrischen, positiv definiten Matrizen T_0, dass die Äquivalenzklasse $\overline{T}^{\mathrm{SL}}$ von T modulo $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ gleich $\overline{T}_0^{\mathrm{SL}}$ ist, dann muss für ungerades Gewicht k der Fourierkoeffizient a_T aufgrund von (2.55) gleich Null sein. Dies liefert für ungerades Gewicht eine weitere Verbesserung für die Schranke von $\dim(S_n^k(\Gamma_0^{(n)}(N)))$. Wir bezeichnen die so aus $c_n^k(N,j)$ erhaltene Schranke mit $d_n^k(N,j)$.
Im Fall $n=1$ stimmen die Werte von $c_1^k(N,j)$ und $d_1^k(N,j)$ für alle Spitzenklassen überein. Betrachten wir eine der Spitzenklasse

$$S_0 \;=\; E_2 \quad \text{oder} \quad S_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dann gilt für $j \in \{0,1\}$

$$c_1^k(N,j) \;=\; d_1^k(N,j) \;=\; \left(\frac{Nk}{2\sqrt{3}\pi} - 1\right)\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{N}.$$

In Tabelle 2.4 werden einige spezielle Werte von $d_1^k(N,j)$, $j \in \{0,1\}$ mit den wahren Werten von $\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(n)}(N)))$ verglichen. Die Dimensionen wurden aus [48], Tabelle A übernommen. Vergleichen wir $d_1^k(N,j)$, $j \in \{0,1\}$ mit der von E. Hecke gefundenen Abschätzung 2.55 so ist:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)})(N))}{d_1^k(N,j)} \;=\; \frac{2\sqrt{3}\pi}{12} \;\approx\; 0{,}9069.$$

Im Fall der Dimension $n=2$ liefert Proposition 2.61 für die Spitzenklassen

$$\begin{aligned} S_0 &= E_4 \\ S_1 &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \end{pmatrix} \\ S_2 &= \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abschätzungen von $\tilde{c}_2^k(N,j)$. Ist $j \in \{0,2\}$ und $N=p$ eine Primzahl, dann ist

$$c_2^k(p,j) \;=\; p^{\frac{j}{2}}\left(\frac{k}{6} - \frac{3}{2p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}\right) - \frac{3}{2p^4}.$$

k	2	4	6	8	10	20	30	50
$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(3)))$	0	0	1	1	2	5	9	15
$d_k^1(3)$	0	0	1	1	2	6	10	17
$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(5)))$	0	1	1	3	3	9	13	23
$d_k^1(5)$	0	1	2	3	4	10	15	26
$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(23)))$	2	5	9	13	17	37	57	97
$d_k^1(23)$	2	7	12	16	21	43	65	109
$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(59)))$	5	14	24	34	44	94	144	244
$d_k^1(59)$	10	21	32	43	54	109	164	275
$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(97)))$	7	24	40	56	72	154	236	398
$d_k^1(97)$	17	35	53	71	89	179	270	450
$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(15)))$	1	4	8	12	16	36	56	96
$d_k^1(15)$	1	5	10	14	19	41	63	107
$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(21)))$	1	6	12	16	22	48	76	128
$d_k^1(21)$	2	8	14	20	26	55	85	144
$\dim(S_1^k(\Gamma_0^{(1)}(35)))$	3	10	18	26	34	74	114	194
$d_k^1(35)$	5	14	23	32	41	85	129	218

Tabelle 2.4:

Um $d_2^k(p,j)$ zu berechnen, betrachten wir die Menge der Minkowski-reduzierten Formen, deren dyadische Spur kleiner als $c_2^k(N,j)$ ist. Ist

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{P}_n(\mathbb{Z})$$

Minkowski-reduziert, so ist $\omega_n(T) = a + c - |b|$. Des weiteren haben wir folgendes Lemma:

Lemma 2.63
Die Menge

$$\begin{aligned} \mathrm{RG}_{\mathrm{SL}} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{MAT}\left(2, \frac{1}{2}\mathbb{Z}\right) \middle| \begin{array}{ll} a, c \in \mathbb{Z}, & \\ -a < 2b \leq a < c, & \textit{falls} \quad a < c, \\ 0 \leq 2b \leq a = c, & \textit{falls} \quad a = c \end{array} \right\} \\ &= \left\{ M \in \mathrm{MAT}\left(2, \frac{1}{2}\mathbb{Z}\right) \middle| \; M \textit{ ist Minkowski-reduziert} \right\} \end{aligned}$$

ist ein Repräsentantensystem von Gram-Matrizen von halbganzen binären quadratischen Formen unter $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$*–Äquivalenz.*

□

Siehe hierzu zum Beispiel [69], §8. Ein Repräsentantensystem von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$–äquivalenten Gram-Matrizen von ganzen binären quadratischen Formen ist dann

$$\mathrm{RG}_{\mathrm{GL}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{MAT}\left(2, \frac{1}{2}\mathbb{Z}\right) \middle| \begin{array}{l} a, c \in \mathbb{Z}, \\ 0 \leq 2b \leq a \leq c \end{array} \right\}. \tag{2.56}$$

Betrachten wir Spitzenformen zu ungeradem Gewicht, dann sind diejenigen Fourierkoeffizienten

$$a_T, \qquad T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

gleich Null, für die $b = 0$ ist. Im Anhang in Tabelle 4.1 und 4.2 wurden einige Werte für die Mächtigkeiten der Mengen

$$\{T \in \mathrm{RG}_{\mathrm{SL}} |\, \omega_2(T) < \mathrm{const}\},$$
$$\{T \in \mathrm{RG}_{\mathrm{GL}} |\, \omega_2(T) < \mathrm{const}\}$$

aufgelistet. Für eine vorgegebene Konstante c_2 wollen wir nun die Grössenordnung der Mächtigkeit von $|\{T \in \mathrm{RG}_{\mathrm{GL}} |\, \omega_2(T) < c_2\}|$ bestimmen. Aus $0 \leq 2b \leq a \leq c$ und $a + c - b < c_2$ folgt $4b \leq a + c \leq c_2 + b$ und somit dann $b \leq \frac{c_2}{3}$. Damit sind:

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & b & \leq & \dfrac{c_2}{3}, \\ 2b & \leq & a & \leq & \dfrac{c_2 + b}{2}, \\ a & \leq & c & \leq & c_2 + b - a, \end{array}$$

und

$$\begin{aligned} |\mathrm{RG}_{\mathrm{GL}}| &= O\left(\sum_{b=0}^{\frac{c_2}{3}} \sum_{a=2b}^{\frac{c_2+b}{2}} \sum_{c=a}^{c_2+b-a} 1 \right) = O\left(\sum_{b=0}^{\frac{c_2}{3}} \sum_{a=2b}^{\frac{c_2+b}{2}} c_2 + b - 2a \right) \\ & O\left(\sum_{b=0}^{\frac{c_2}{3}} \sum_{a=0}^{c_2-3b} 2a \right) = O\left(\sum_{b=0}^{\frac{c_2}{3}} (c_2 - 3b)^2 \right) \\ & O\left(\sum_{b=0}^{\frac{c_2}{3}} (3b)^2 \right) = O\left(\frac{1}{9} c_2^3 \right). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Dies liefert uns, dass $d_2^k(p,j)$, $j \in \{0,2\}$ beim Grenzübergang von $p \to \infty$, p ist Primzahl, von der Grössenordnung

$$O\left(\frac{1}{2^2\, 3^5} k^3 p^3 \right)$$

ist. Die explizite Formel von K. Hashimoto liefert, dass $\dim(S_2^k(\Gamma_0^{(n)}(p)))$ für $p \to \infty$, p ist Primzahl, von der Grössenordnung

$$O\left(\frac{1}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5} k^3 p^3\right)$$

ist. Also ist

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ p,\text{Prim}}} \frac{\dim(S_n^k(\Gamma_0^{(2)}(p),1))}{d_2^k(p)} \quad = \quad \frac{3^2}{2^4 \cdot 5} \quad = \quad 0,1125.$$

Im Anschluss an Proposition 2.61 werden für die Gewichte $k \in \{1,2,3\}$ und $N \leq 50$, $4 \nmid N$ Tabellen angeführt, aus denen wir Werte für $c_2^k(N,j)$, $j \in \{0,1,2\}$ ablesen können. Hierbei sind Nc_1 als $c_2^k(N,0) = c_2^k(N,2)$ und Nc_2 als $c_2^k(N,1)$ zu interpretieren. Da es keine binären, positiv definiten quadratischen Formen mit dyadischer Spur kleiner als $1,5$ gibt, erhalten wir mit $c_2^k(N,0)$ und mit Hilfe der Werte aus den Tabellen die folgende Aussage:

Lemma 2.64

$$\begin{array}{rcll}
\dim(S_2^1(\Gamma_0^{(2)}(N))) & = & 0, & \textit{falls } N \in \{2,3,5,6,7,9,10,11,13,17\}, \\
\dim(S_2^1(\Gamma_0^{(2)}(N))) & \leq & 1, & \textit{falls } N \in \{14,15,17,19,23\}, \\
\dim(S_2^1(\Gamma_0^{(2)}(25))) & \leq & 3, & \\
\dim(S_2^1(\Gamma_0^{(2)}(N))) & \leq & 5, & \textit{falls } N \in \{18,21,29,31\}, \\
\dim(S_2^1(\Gamma_0^{(2)}(27))) & \leq & 6, & \\
\dim(S_2^1(\Gamma_0^{(2)}(N))) & \leq & 9, & \textit{falls } N \in \{22,37\}, \\
\\
\dim(S_2^2(\Gamma_0^{(2)}(N))) & = & 0, & \textit{falls } N \in \{2,3,5,6,7\}, \\
\dim(S_2^2(\Gamma_0^{(2)}(9))) & \leq & 1, & \\
\dim(S_2^2(\Gamma_0^{(2)}(11))) & \leq & 2, & \\
\dim(S_2^2(\Gamma_0^{(2)}(13))) & \leq & 5, & \\
\\
\dim(S_2^3(\Gamma_0^{(2)}(N))) & = & 0, & \textit{falls } N \in \{2,3,5\}, \\
\dim(S_2^3(\Gamma_0^{(2)}(7))) & \leq & 1, & \\
\dim(S_2^3(\Gamma_0^{(2)}(N))) & \leq & 6, & \textit{falls } N \in \{9,11\}, \\
\dim(S_2^3(\Gamma_0^{(2)}(6))) & \leq & 9. &
\end{array}$$

□

Betrachten wir die Werte von Nc_2 in den sich an Proposition 2.61 anschließenden Tabellen, so wachsen diese mit N im Vergleich zu den Weten Nc_1 schnell an.

Die Werte, die man somit für $d_2^k(N,1)$ aus $c_2^k(N,1)$ erhält, sind im Allgemeinen schlechtere Abschätzungen für $\dim(S_2^k(\Gamma_0^{(n)}(N)))$ als die Werte von $d_2^k(N,j)$, $j \in \{0,2\}$. Betrachtet man aber den Träger $\mathrm{Supp}(f|_k S_1)$, dann enthält dieser nur Matrizen, bei denen der obere linke Eintrag aus $\mathbb{Z}$ ist. Für alle anderen Elemente $T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right)$, $T > 0$, $T_{11}, T_{22} \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ verschwindet der Fourierkoeffizient a_T von $f|_k S_1$, wie wir in Lemma 1.20 gesehen haben. Um mittels $c_2^k(N,1)$ den Wert von $\dim(S_2^k(\Gamma_0^{(n)}(N)))$ abzuschätzen kann man die Mächtigkeit der Menge

$$\left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2}\mathbb{Z}\right) \middle| \begin{array}{l} a \in N\mathbb{Z},\ |2b| \le a \le c, \\ \omega_2(T) \le c_2^k(N,1) \end{array} \right\}$$

nutzen. die wir mit $\hat{d}_2^k(N,1)$ bezeichnen werden. In keinem der Fälle $k \in \{1,2,3\}$, $N \le 50$, $4 \nmid N$ erhalten wir damit eine Verbesserung der Abschätzungen. Wegen des mit steigendem N relativ zu Nc_1 starken Anwachsens von Nc_2 ist nicht zu erwarten, dass $\hat{d}_2^k(N,1)$ für große N eine Verbesserung liefert.
Betrachten wir nun noch den Fall der Dimension $n = 3$. Formel (2.50) liefert uns zusammen mit Satz 2.56 oder dem anschließenden Korollar für $j \in \{0,3\}$:

$$c_3^k(N,j) \quad = \quad \left(N\frac{\sqrt{3}k}{2\pi} - 1\right)\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}\right) + 1 - \frac{N-1}{N^6}.$$

Da

$$\omega_3(M) \quad \ge \quad \frac{2}{3}\mathrm{tr}(M) \tag{2.58}$$

ist, siehe [52] Proposition 4.2, lassen sich leicht alle Formen bestimmen, die dyadische Spur kleiner als eine vorgegebene Schranke haben. Im Anhang in Tabelle 4.3 sind die ersten ganzen, ternären quadratischen Formen aufgelistet, die dyadische Spur kleiner oder gleich fünf haben. In Tabelle 4.4 sind die Anzahlen von geraden, ternären, positiv definiten Formen angegeben, die dyadische Spur kleiner als 67 haben. Zur Berechnung dieser Anzahlen wurde die in [58] definierte Vorzeichennormalform ternärer Formen benutzt. Des weiteren findet sich in dieser Tabelle die Summe aller Anzahlen derjenigen Formen, die dyadische Spur kleiner als ein fest vorgegebener Wert $c < 67$ haben. Dies sind Abschätzung für $\dim(S_3^k(\Gamma_0^{(3)}(N)))$. Wir erhalten dadurch

Lemma 2.65

$$\begin{aligned} \dim(S_3^2(\Gamma_0^{(3)}(3))) = \dim(S_3^2(\Gamma_0^{(3)}(5))) &\ = \ 0, \\ \dim(S_3^4(\Gamma_0^{(3)}(3))), \dim(S_3^4(\Gamma_0^{(3)}(7))) &\ \le \ 1, \\ \dim(S_3^2(\Gamma_0^{(3)}(5))) &\ \le \ 5, \\ \dim(S_3^2(\Gamma_0^{(3)}(9))) &\ \le \ 8, \end{aligned}$$

□

Kapitel 3

Der Fall der Untergruppen $\Gamma^{(n)}(N)$

In diesem Kapitel wollen wir den Fall der Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma^{(n)}(N)$ behandeln. Dieser ist viel einfacher als der Fall der Gruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$. Dies liegt darin begründet, dass die Gruppen $\Gamma^{(n)}(N)$ normale Untergruppen von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ sind. Sie sind die Kerne der natürlichen Homomorphismen

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \;\to\; \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Genau wie im Fall der Untergruppen $\Gamma_0^{(n)}(N)$ interessieren wir uns auch hier für die Elemente von $\Gamma^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$. Diese nennen wir die 0-dimensionalen Spitzenklassen von $\Gamma^{(n)}(N)$ oder einfach nur die Spitzenklassen von $\Gamma^{(n)}(N)$ Die Anzahlen der Spitzenklassen von $\Gamma^{(n)}(N)$, die wir mit $s(\Gamma_0^{(n)}(N))$ bezeichnen wollen, sind bekannt. Man findet sie im Fall $n = 1$ zum Beispiel in [48], Theorem 4.2.10, (2),

$$\left|\Gamma^{(1)}(N)\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Delta(1,\mathbb{Z})\right| \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}N^2\prod\limits_{p|N}(1-\frac{1}{p^2}), & \text{falls } N \geq 3, \\ \quad 3, & \text{falls } N = 2. \end{cases} \tag{3.1}$$

U. Christian gibt in [15], (17) eine Formel von $s(\Gamma^{(n)}(N))$ für $n \geq 1$ an. Es gilt:

$$s\left(\Gamma^{(n)}(N)\right) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}N^{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1}\prod\limits_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod\limits_{j=2}^{n}\left(1+\frac{1}{p^j}\right), & \text{falls } N > 2, \\ 3\prod\limits_{j=2}^{n}\left(2^j+1\right), & \text{falls } N = 2. \end{cases}$$

Setzen wir $\prod\limits_{i=a}^{b} = 1$, fallls $b < a$ ist, so ergibt dies im Fall $n = 1$ wieder (3.1). Unter der Weite einer Spitzenklasse von $\Gamma^{(n)}(N)$ wollen wir die Anzahl der Elemente aus $\Gamma^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ verstehen, die unter

$$\Gamma^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \;\to\; \Gamma^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})$$

auf die jeweilige Spitzenklasse von $\Gamma^{(n)}(N)$ projiziert werden. Da $\Gamma^{(n)}(N)$ eine normale Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ ist, sind die Weiten aller Spitzenklassen von $\Gamma^{(n)}(N)$ gleich. Wir bezeichnen sie als $t\left(\Gamma^{(n)}(N)\right)$. Es gilt:

$$t(\Gamma^{(n)}(N)) \;=\; \frac{|\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})|}{|\Gamma^{(n)}(N)\backslash\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z})|} \;=\; \frac{|\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})|}{s(\Gamma^{(n)}(N))}.$$

Die Ordnung von $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = [\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) : \Gamma^{(n)}(N)]$ findet man in [35] oder in [50], Theorem VII. 28:

$$|\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| \;=\; [\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) : \Gamma^{(n)}(N)] \;=\; N^{2n^2+n}\prod_{p|N}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p^{2j}}\right).$$

Daraus ergibt sich nun auch eine Formel für die Weiten der Spitzenklassen von $\Gamma_0^{(n)}(N)$,

$$t\left(\Gamma^{(n)}(N)\right) \;=\; \begin{cases} 2N^{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1}\prod\limits_{p|N}\prod\limits_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p^j}\right), & \text{falls } N>2,\\ 2^{n^2}\prod\limits_{j=2}^{n}\left(2^j-1\right), & \text{falls } N=2.\end{cases}$$

Bemerkung 3.1
Im Fall $n=1$ erhalten wir so für die Weite einer Spitzenklasse $t(\Gamma^{(1)}(N)) = 2N$, falls $N>2$ ist und $t(\Gamma^{(1)}(2)) = 2$. Die Spitzen der Untergruppen $\Gamma^{(1)}(N)$ haben aber nur die Weiten N (Siehe [54], p. 46). Der Faktor 2 taucht hier für $N>2$ auf, da man bei der Definition der Weite einer Spitze nicht die Elemente $\sigma\in\Gamma^{(1)}(N)$, sondern die daraus definierten Automorphismen $\iota_\sigma : \mathbb{H}_1\to\mathbb{H}_1$ der oberen Halbebene betrachtet und

$$\mathrm{AUT}(\mathbb{H}) \;\cong\; \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm E_2\}$$

ist. Beachte hierbei, dass $-E_2\notin\Gamma^{(1)}(N)$ ist, falls $N>2$ gilt (Siehe auch Bemerkung 2.19).

$\square$

Mit Hilfe von Satz 1.12 liefert uns dies nun mit den in Kapitel 2, Abschnitt 3 vorgestellten Mitteln ein Analogon zu Satz 2.44 für Hauptkongruenzuntergruppen.

Satz 3.2
Sei M eine Spitzenklasse für $\Gamma^{(n)}(N)$, $f\in S_n^k(\Gamma^{(n)}(N),\chi)$ eine Spitzenform und

$$(f|_kM)(Z) \;=\; \sum_{T\in\mathrm{Supp}(f|_kM)} a_T e^{2\pi i tr(TZ)}$$

die Fourierentwicklung von $(f|_kM)$. Unter diesen Voraussetzungen sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $f \equiv 0$,

ii) für alle $T \in \operatorname{Supp}(f|_k M)$ *mit*

$$\begin{aligned}
\omega_n(T) \quad &\leq \quad \frac{[\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) : \Gamma^{(n)}(N)]}{t\left(\Gamma^{(n)}(N)\right)} \mathfrak{w}_n \frac{k}{4\pi} \\
&\quad - \sum_{\substack{\tilde{M} \in \Gamma^{(n)}(N)\backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})/\Delta(n,\mathbb{Z}) \\ \tilde{M} \neq M}} \min \omega_n \left(\operatorname{Supp}(f|_k \tilde{M})\right) \\
&\leq \quad s\left(\Gamma^{(n)}(N)\right) \mathfrak{w}_n \frac{k}{4\pi} - \mathfrak{d}_n \frac{s\left(\Gamma^{(n)}(N)\right) - 1}{N}
\end{aligned}$$

gilt $a_T = 0$.

□

Bemerkung 3.3

i) Die hier angegebene Schranke hängt im Vergleich zu Satz 2.44 im Wesentlichen nur noch von der Anzahl der Spitzenklassen von $\Gamma^{(n)}(N)$ *und nicht mehr von den Weiten der einzelnen Spitzenklassen von* $\Gamma^{(n)}(N)$ *ab, da die Weiten für jede Spitzenklasse von* $\Gamma^{(n)}(N)$ *gleich sind. Insbesondere hängt sie nicht mehr von der Spitzenklasse* M *ab.*

ii) Um $\min \omega_n \left(\operatorname{Supp}(f|_k \tilde{M})\right)$ *abzuschätzen wurde ausgenutzt, dass es keine Formen vom Grad* n *mit dyadischer Spur kleiner als* $\mathfrak{d}_n$ *gibt, und dass die Fourierentwicklung von* $f|_k \tilde{M}$ *die Form*

$$(f|_k \tilde{M})(Z) \quad = \quad \sum_{\substack{T \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}\left(n, \frac{1}{2N}\mathbb{Z}\right) \\ T > 0,\ N t_{jj} \in \mathbb{Z}}} a_T e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)}$$

hat.

□

Im Folgenden wollen wir noch einige Tabellen mit Zahlenwerten angeben und einige Dimensionen von Räumen von Spitzenformen abschätzen. Zuerst eine Tabelle mit Anzahlen von Spitzenklassen von $\Gamma^{(n)}(N)$:

N	$s^{(1)}\left(\Gamma^{(1)}(N)\right)$	$s^{(2)}\left(\Gamma^{(2)}(N)\right)$	$s^{(3)}\left(\Gamma^{(3)}(N)\right)$	$s^{(4)}\left(\Gamma^{(4)}(N)\right)$
2	3	15	135	2295
3	4	48	1440	91840
4	6	144	11520	2350080
5	12	360	46800	24609312
6	12	864	259200	237119400
7	24	1344	470400	991545600
8	24	2304	1474560	4812963840
9	36	3888	3149280	16269180480
10	36	6480	8424000	56478371040

Mit $\mathfrak{d}_1 = 1$ und $\mathfrak{w}_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ erhalten wir als Abschätzung $d_1^k(N)$ für die Dimensionen $\dim\left(S_1^k\left(\Gamma^{(n)}(N)\right)\right)$ die folgenden Werte, die sich als das Maximum von Null und dem ganzzahligen Anteil von

$$s\left(\Gamma^{(1)}(N)\right)\frac{Nk}{2\sqrt{3}\pi} - s\left(\Gamma^{(1)}(N)\right) + 1$$

ergeben:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_1^2(N)$	0	0	0	0	2	7	12	24	31
$\dim\left(S_1^2\left(\Gamma^{(1)}(N)\right)\right)$	0	0	0	0	1	3	5	10	7
$d_1^4(N)$	0	1	3	11	15	38	47	84	97
$\dim\left(S_1^4\left(\Gamma^{(1)}(N)\right)\right)$	0	1	3	9	12	30	36	63	54
$d_1^6(N)$	1	3	8	22	28	69	82	143	163
$\dim\left(S_1^6\left(\Gamma^{(1)}(N)\right)\right)$	1	3	7	19	24	58	68	117	107

Die Werte für die Dimension lassen sich dabei mit Hilfe der Formel

$$\dim\left(S_1^k\left(\Gamma^{(1)}(N)\right)\right) = \begin{cases} (k-1)(g(N)-1) + \left(\frac{k}{2}-1\right)s\left(\Gamma^{(1)}(N)\right), & k>2, \\ g(N), & k=2 \end{cases}$$

berechnen (siehe [48], Theorem 2.5.2). Hier ist (siehe [48], Theorem 4.2.10, Theorem 4.2.11 und Theorem 4.2.5 (1)):

$$\begin{aligned} g(N) &= 1 + \left(\frac{N}{24} - \frac{1}{4}\right) N^2 \prod_{p|N}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad \text{falls } N > 2 \text{ und} \\ g(2) &= 0. \end{aligned}$$

Im Fall $n = 2$ sind die Dimensionen von $S_n^k(\Gamma^{(n)}(N))$ für $k \geq 4$ bekannt. Für $N \geq 3$, $k \geq 7$ wurden diese von Y. Morita in [49] unter Zuhilfenahme der Selbergschen Spurformel angegeben. Kurze Zeit später wurde von U. Christian in [16] und von T. Yamazaki in [68] die folgende Formel, die für $k \geq 4$ gilt, veröffentlicht,

$$\begin{aligned}
\dim(S_n^k(\Gamma^{(n)}(N))) &= \frac{(2k-2)(2k-3)(2k-4)}{2^{10}3^35} N^{10} \prod_{p|N} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^4}\right) \\
&\quad -\frac{(2k-3)}{2^63^2} N^8 \prod_{p|N} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^4}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2^53} N^7 \prod_{p|N} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^4}\right).
\end{aligned}$$

U. Christian arbeitet ebenfalls mit der Selbergschen Spurformel, während T. Yamazaki zum Beweis den Satz von Riemann-Roch ausnutzt.
Da $\mathfrak{d}_2 = \frac{3}{2}$ ist, liefert uns Satz 3.2 mit

$$\mathfrak{w}_2 \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

eine Konstante

$$\begin{aligned}
d_2^k(N) &= \max\left\{0, \tilde{d}_2^k(N)\right\} \quad \text{mit} \\
\tilde{d}_2^k(N) &= \text{halbganzzahligerAnteil}\left(\frac{k}{\sqrt{3}\pi} s\left(\Gamma^{(2)}(N)\right) - \frac{3}{2}\frac{s\left(\Gamma^{(2)}(N)\right)-1}{N}\right).
\end{aligned}$$

Die Anzahl der halbganzen Formen mit dyadischer Spur kleiner als $d_2^k(N)$ ist eine obere Abschätzung für $\dim\left(S_2^k\left(\Gamma^{(n)}(N)\right)\right)$. Einige explizite Werte für $d_2^k(N)$ sind:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_2^1(N)$	0	0	0	0	0	0	0	600	2190
$d_2^2(N)$	0	0	0	123	610.5	1443	3320	7030.5	14098.5
$d_2^3(N)$	0	8.5	103	453.5	1563.5	3172	6707.5	13461.5	26007.5
$d_2^4(N)$	1	35	208.5	784.5	2516	4901	10095	19892	37916
$d_2^5(N)$	6.5	61.5	314.5	1115	3468.5	6630	13482	26323	49825
$d_2^6(N)$	12	88	420.5	1446	4421.5	8359	16869.5	32753.5	61733.5

Daraus ergibt sich sofort:

Korollar 3.4

$$\begin{aligned}
\dim\left(S_2^1\left(\Gamma^{(2)}(N)\right)\right) &= 0, \quad \textit{für } 2 \leq N \leq 8,\\
\dim\left(S_2^2\left(\Gamma^{(2)}(N)\right)\right) &= 0, \quad \textit{für } 2 \leq N \leq 4,\\
\dim\left(S_2^3\left(\Gamma^{(2)}(2)\right)\right) &= 0,\\
\dim\left(S_2^4\left(\Gamma^{(2)}(2)\right)\right) &= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

In [27], Corollary 6-1 hat K. Hashimoto für $k \geq 5$ die Dimension der Spitzenräume $S_2^k\left(\Gamma^{(2)}(2)\right)$ als

$$\begin{aligned}
\dim\left(S_2^k\left(\Gamma^{(2)}(2)\right)\right) = \; & \frac{1}{1440}(15(2k-2)(2k-3)(2k-4)\\
& + (-1)^k 225(2k-2)(2k-4) \; - \; (-1)^k 2700(2k-3)\\
& + (-1)^k 8100 \; - \; 900(2k-3) \; + \; 2700).
\end{aligned}$$

angegeben. Die folgende Tabelle zeigt einige Werte für $\dim\left(S_2^k\left(\Gamma^{(2)}(2)\right)\right)$, $d_2^k(2)$ und die Anzahl $D_2^k(2)$ der halbganzen Formen T mit $\omega_2(T) \leq d_2^k(2)$, also eine obere Abschätzung für $\dim\left(S_2^k\left(\Gamma^{(2)}(2)\right)\right)$.

k	5	6	7	8	9	10	11	12
$d_2^k(2)$	6.5	12	17.5	23	28.5	34	39.5	45
$D_2^k(2)$	55	276	774	1660	3046	5041	7758	11306
$\dim\left(S_2^k\left(\Gamma^{(2)}(2)\right)\right)$	1	5	5	24	15	61	35	120

Auch im Fall der Stufe $N = 3$ sind die Dimensionen aus Korollar 3.4 bekannt. Sie können einer Arbeit von K. Gunji (siehe [26]) entnommen werden.
Für Räume von Spitzenformen vom Grad $n = 3$ wurden von E. Minking und L. Chung-Yuan in [19] Dimensionsformeln für $\dim\left(S_3^k\left(\Gamma^{(3)}(N)\right)\right)$, $k \geq 10$ angegeben. Hier ist $\mathfrak{d}_3 = 2$ und Satz 3.2 liefert uns mittels $\mathfrak{w}_3 \leq 2\sqrt{3}$ eine Konstante:

$$\begin{aligned}
d_3^k(N) &= \max\left\{0, \tilde{d}_3^k(N)\right\} \quad \text{mit}\\
\tilde{d}_3^k(N) &= \text{halbganzzahligerAnteil}\left(\frac{\sqrt{3}k}{2\pi} s\left(\Gamma^{(3)}(N)\right) - 2\frac{s\left(\Gamma^{(3)}(N)\right) - 1}{N}\right).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die folgende Tabelle

N	$d_3^2(N)$	$d_3^4(N)$	$d_3^6(N)$	$d_3^8(N)$
2	0	29.5	178.5	327
3	0	1885	4267	6648.5
4	2367	27772	53177.5	78582.5
5	35412.5	164423.5	293434.5	422445.5

und somit auch:

Korollar 3.5

$$\dim\left(S_3^2\left(\Gamma^{(3)}(2)\right)\right) \quad = \quad \dim\left(S_3^2\left(\Gamma^{(3)}(2)\right)\right) \quad = \quad 0.$$

$\square$

Um Dimensionen von Räumen von Spitzenformen vom Grad $n = 4$ abzuschätzen, benutzen wir $\mathfrak{d}_4 = 2$, $\mathfrak{w}_4 \leq \frac{8}{\sqrt{3}}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} d_4^k(N) &= \max\left\{0, \tilde{d}_4^k(N)\right\} \quad \text{mit} \\ \tilde{d}_4^k(N) &= \text{halbganzzahligerAnteil}\left(\frac{2k}{\sqrt{3}\pi}s\left(\Gamma^{(4)}(N)\right) - 2\frac{s\left(\Gamma^{(4)}(N)\right) - 1}{N}\right). \end{aligned}$$

Aus folgender Tabelle mit Werten

N	2	3	4	5	6
$d_4^1(N)$	0	0	0	0	48684309.5
$d_4^2(N)$	0	18858	2210066	41233543	571607417
$d_4^3(N)$	473	120126	5665178	86459626	1094530524.5
$d_4^4(N)$	2160	221394	9120290	131685708.5	1617453632

erhalten wir schließlich das Korollar:

Korollar 3.6

$$\begin{aligned} \dim\left(S_4^1\left(\Gamma^{(4)}(N)\right)\right) &= 0, \qquad \textit{falls}\ \ 2 \leq N \leq 5, \\ \dim\left(S_4^2\left(\Gamma^{(4)}(2)\right)\right) &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 4

Der Hermitesche Fall

4.1 Reduktionstheorie für Hermitesche Formen

Im Folgenden sollen kurz einige Tatsachen der Reduktionstheorie für ganze, positiv definite, Hermitesche Formen vorgestellt werden. Die Beweise der Aussagen finden sich bei P. Humbert in [29]. Für eine Hermitesche Form mit Gram-Matrix S wird in diesem Kapitel die From x^*Sx selbst häufig nur mit S bezeichnet. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d quadratfrei, ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathfrak{O}_K$. Zwei positiv definite Hermitesche Formen S_1 und S_2 vom Grad n heißen äquivalent, wenn es eine Matrix $U \in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{O}_K)$ gibt, so dass $S_1 = U^* S_2 U$.

Lemma 4.1
Für eine positiv definite, Hermitesche Form S gibt es nur endlich viele Vektoren $x \in \mathfrak{O}_k^n$, für die $x^*Sx < const$ ist.

□

Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich eine in $\mathrm{GL}(n, K)$ invertierbare Matrix U aus $\mathrm{MAT}(n, \mathfrak{O}_K)$ konstruieren, so dass die Diagonaleinträge $\dot{s}_{ii}$ von $\dot{S} = U^*SU$ eine Folge von sukzessiven Minima bilden. Darüber hinaus soll U hierbei so gewählt sein, dass für die Argumente der Einträge von $\dot{S}$ gilt:

$$-\frac{\pi}{\upsilon} \leq \arg(\dot{s}_{ij}) \leq \frac{\pi}{\upsilon}, \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

(siehe [29]). Hierbei bezeichne υ die Anzahl der Einheitswurzeln von K. Insbesondere gilt $0 \leq \dot{s}_{11} \leq \dots \leq \dot{s}_{nn}$. Für die Matrix U gilt der folgende Satz:

Satz 4.2
Die Norm der Determinante der Matrix U ist durch eine Konstante const_1 *beschränkt, die nicht von der Form S sondern nur vom Körper K und vom Grad n der Form S abhängt. Dabei kann man für* const_1 *den Wert*

$$\mathrm{const}_1 \quad = \quad |\mathrm{Disk}(K)|^{\frac{n}{2}} n^{2n}$$

wählen.

□

Der bestmögliche Wert für const_1 ist vermutlich kleiner als $|\mathrm{Disk}(K)^{\frac{n}{2}} n^{2n}|$. Ebenfalls gilt (siehe [29]):

Satz 4.3
Eine Matrix $U \in \mathrm{MAT}(n, \mathfrak{O}_K) \cap \mathrm{GL}(n, K)$ *mit Determinante* $\det(U) = \alpha$ *lässt sich in der Form* VU_v *schreiben, wobei* V *als Determinante eine Einheit* $\det(V) = \epsilon$ *hat, und* U_v *aus einer endlichen Menge* $M(K, \alpha, n)$ *ganzer Matrizen ist, die nur von* K*,* α *und* n *abhängt.*

$\square$

Die Menge $M(K, \alpha, n)$ ist nicht eindeutig bestimmt. Sie ist ein Repräsentantensystem von

$$\mathrm{SL}(n, \mathfrak{O}_K) \backslash \{U \in \mathrm{MAT}(n, \mathfrak{O}_K) \cap \mathrm{GL}(n, K) | \det(U) = \alpha\}.$$

Als ein vollständiges Repräsentantensystem hiervon kann man eine Menge von Matrizen M wählen, die paarweise nicht kongruent modulo α sind, also

$$U_{v_1} \not\equiv U_{v_2} (\mathrm{mod}\, \alpha) \qquad \forall U_{v_1}, U_{v_2} \in M(K, \alpha, n).$$

und für die $\det(M)$ aus $\alpha\mathfrak{O}_K^*$ ist. Legen wir $M(K, \alpha, n)$ als ein solches Repräsentantensystem fest, dann folgt aus diesem Satz, dass die in den Bemerkungen nach Lemma 4.1 konstruierte Matrix U eine Darstellung $U = VU_v$ mit $U_v \in M(K, \alpha, n)$ besitzt. Transformieren wir $\dot{S}$ mittels U_v^{-1} , so erhalten wir eine positiv definite, Hermitesche Form $\ddot{S} = (U_v^{-1})^* \dot{S} U_v^{-1} = V^* S V$, die zu S äquivalent ist. Diese wollen wir als Humbert-reduziert bezeichnen. Da $M(K, \alpha, n)$ endlich ist kann des Weiteren gezeigt werden, dass eine Konstante const_2 existiert, die nicht von $\ddot{S}$ abhängt, so dass für die Einträge $\ddot{s}_{ij}$ mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$|\ddot{s}_{ij}| \;\leq\; \mathrm{const}_2 \ddot{s}_{ii} \quad \text{und} \quad |\ddot{s}_{ij}| \;\leq\; \mathrm{const}_2 \ddot{s}_{jj}.$$

4.2 Die Hermite-Humbert Konstante für Hermitesche Zahlkörper

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Ergebnisse sind im Wesentlichen einer Arbeit von M. I. Icaza, [31] entnommen. Sei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathfrak{O}_K$. Sei weiter

$$x^* S x \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij} \overline{x_i} x_j \;\text{ mit } x = (x_1, \ldots, x_n)$$

eine Hermitesche, positiv definite Form mit Gram-Matrix S. Definieren wir $\mathrm{m}_{n,K}$ als

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_{n,K} : \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C}) \;=\; \{s \in \mathrm{HER}(n, \mathbb{C}) | \; s \geq 0\} \;&\rightarrow\; \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \mathrm{m}_{n,K}(S) \;&=\; \min_{x \in (\mathfrak{O}_K)^n - \{0\}} (x^* S x), \end{aligned} \tag{4.1}$$

sowie

$$\gamma_{n,K}(S) \quad = \quad \left(\frac{\mathrm{m}_{n,K}(S)}{\sqrt[n]{\det(S)}} \right)^2, \tag{4.2}$$

dann erhalten wir die Hermite-Humbert Konstante $\gamma_{n,K}$ als

$$\gamma_{n,K} \quad = \quad \sup_S \{\gamma_{n,K}(S)\}\,.$$

Bemerkung 4.4

i) Das Quadrat in (4.2) tritt auf, da wir hier im Gegensatz zu [31] in der Definition des Minimums $\mathrm{m}_{n,K}(S)$ einer Form S die Wurzel des dort verwendeten Minimums $\mu(S)$ betrachten. Die im folgenden benutzten Ergebnisse aus [31] werden entsprechend angepasst.

ii) Sei eine Hermitesche, positiv definite Form mit Gram-Matrix S vorgegeben. Die Form

$$x^* S x \quad = \quad \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij} \overline{x_i} x_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{O}_K^n$$

können wir durch Spurbildung wie in [56] auch als positiv definite, reelle, $2n$-dimensionale Form $S_\mathbb{R}$ auffassen.
Ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d \equiv 1, 2 \bmod 4$, dann ist $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z} + \mathrm{i}\sqrt{d}\mathbb{Z}$ und $S_\mathbb{R}$ hat Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} s_{11} & & \ldots & \mathrm{Re}(s_{1j}) & -\sqrt{d}\mathrm{Im}(s_{1j}) & \ldots \\ & ds_{11} & \ldots & \sqrt{d}\mathrm{Im}(s_{1j}) & d\mathrm{Re}(s_{1j}) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \mathrm{Re}(s_{1j}) & \sqrt{d}\mathrm{Im}(s_{1j}) & \ldots & s_{jj} & & \ldots \\ -\sqrt{d}\mathrm{Im}(s_{1j}) & d\mathrm{Re}(s_{1j}) & \ldots & & ds_{jj} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ist nun $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d \equiv 3 \bmod 4$, dann ist $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z} + \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{d}}{2}\mathbb{Z}$ und $S_\mathbb{R}$ hat Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2s_{11} & s_{11} & \ldots & 2r_{1j} & r_{1j} - \sqrt{d}i_{1j} & \ldots \\ s_{11} & \frac{1+d}{2}s_{11} & \ldots & r_{1j} + \sqrt{d}i_{1j} & \frac{1+d}{2}r_{1j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 2r_{1j} & r_{1j} - \sqrt{d}i_{1j} & \ldots & 2s_{jj} & s_{jj} & \ldots \\ r_{1j} + \sqrt{d}i_{1j} & \frac{1+d}{2}r_{1j} & \ldots & s_{jj} & \frac{1+d}{2}s_{jj} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $r_{ij} = \mathrm{Re}(s_{ij})$ *und* $i_{ij} = \mathrm{Im}(s_{ij})$.
Sei im Folgenden $a = \mathrm{m}_{n,K}(S)$ *das Minimum der Form* S. *Im Fall* $d \equiv 1, 2 \mod 4$ *hat auch das Minimum der Form* $S_{\mathbb{R}}$ *den Wert* a. *Denn ist* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{O}_K^n$ *so gegeben, dass* $x^*Sx = a$ *ist, dann ist*

$$y^t \;=\; \left(\mathrm{Re}(x_1), \frac{\mathrm{Im}(x_1)}{\sqrt{d}}, \ldots, \mathrm{Re}(x_n), \frac{\mathrm{Im}(x_n)}{\sqrt{d}}\right)$$

aus $\mathbb{Z}^{2n}$ *und es ist* $y^tS_{\mathbb{R}}y = a$. *Umgekehrt ist* $y = (y_1, \ldots, y_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ *ein Vektor, für den* $y^tS_{\mathbb{R}}y$ *sein Minimum* a' *annimmt, dann hat* x^*Sx *für*

$$x^t \;=\; \left(y_1 + \mathfrak{i}\sqrt{d}y_2, \ldots, y_{2n-1} + \mathfrak{i}\sqrt{d}y_{2n}\right)$$

auch den Wert a'.
Für den Fall $d \equiv 3 \mod 4$ *sei*

$$x^t \;=\; \left(x_{1,1} + \frac{1+\mathfrak{i}\sqrt{d}}{2}x_{1,2}, \ldots, x_{n,1} + \frac{1+\mathfrak{i}\sqrt{d}}{2}x_{n,2}\right) \;\in\; \mathfrak{O}_K^n$$

mit $x^*Sx = a$. *Dann ist* $y = (x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{n,1}, x_{n,2})$ *aus* $\mathbb{Z}^{2n}$ *und* $y^tS_{\mathbb{R}}y = 2a$. *Ist umgekehrt* $y = (y_1, \ldots, y_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$, *so dass* $y^tS_{\mathbb{R}}y = a$ *gilt, dann ist*

$$x^t \;=\; \left(y_1 + \frac{1+\mathfrak{i}\sqrt{d}}{2}y_2, \ldots, y_{2n-1} + \frac{1+\mathfrak{i}\sqrt{d}}{2}y_{2n}\right)$$

aus $\mathfrak{O}_K^n$ *und es ist* $x^*Sx = \frac{a}{2}$. *Folglich hat* $S_{\mathbb{R}}$ *im Fall* $d \equiv 3 \mod 4$ *das Minimum* $2a$. *Für die Diskriminanten der zu* S *und* $S_{\mathbb{R}}$ *gehörenden Gitter wird in [56] der folgende Zusammenhang gezeigt:*

$$\det(S_{\mathbb{R}}) \;=\; \mathrm{Disk}(K)^n \det(S).$$

□

Aus der Reduktionstheorie von P. Humbert folgt dass $\gamma_{n,K}$ endlich ist. Darüber hinaus wird in [31], Theorem 1 die folgende Schranke gezeigt:

$$\gamma_{n,K} \;\leq\; 4\,\frac{|\mathrm{Disk}(K)|}{\sqrt[n]{\mathrm{V}(2n)^2}}. \tag{4.3}$$

Dabei ist $\mathrm{V}(n)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, also

$$\mathrm{V}(2n) \;=\; \frac{\pi^n}{n!}.$$

Also gilt für $S \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{m}_{n,K}(S) \quad \leq \quad \frac{2\sqrt[n]{n!}}{\pi} \sqrt{|\mathrm{Disk}(K)|}\,\sqrt[n]{\det(S)}. \tag{4.4}$$

Beachtet man, dass für $S \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C}) - \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ immer $\mathrm{m}_{n,K}(S) = 0$ gilt, so folgt die Gültigkeit von Ungleichung (4.4) für alle $S \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$. Es gilt also das folgende Lemma:

Lemma 4.5
Die Funktion $\mathrm{m}_{n,K}(S)$ *ist stetig auf* $\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ *und verschwindet auf* $\mathrm{HP}_n^{semi}(\mathbb{C}) - \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$.

Beweis:
Die Stetigkeitsaussage kann für nicht singuläre Formen analog zu [52], Proposition 2.2 gezeigt werden, oder sie kann aus Lemma 4.11 der vorliegenden Arbeit gefolgert werden, das ebenfalls analog zu [52], Proposition 2.2 bewiesen wird. Mit Hilfe der Ungleichung (4.4) und den anschließenden Zeilen folgt nun die Aussage des Lemmas.

□

In [31], Theorem 2 wird darüber hinaus gezeigt, dass es für jedes n und K eine Form S gibt, so dass

$$\gamma_{n,K}(S) \quad = \quad \gamma_{n,K}$$

gilt.

Bemerkung 4.6
Sei

$$\mathrm{QF}_{\mathbb{R}}(K,n) \quad = \quad \{S_{\mathbb{R}} |\ S \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathfrak{O}_K),\ S > 0\}$$

und

$$\gamma_{2n}^{(K)} \quad = \quad \min_{S_{\mathbb{R}} \in \mathrm{QF}_{\mathbb{R}}(K,2n)} \{\gamma_{2n}(S_{\mathbb{R}})\}$$

mit

$$\gamma_{2n}(S_{\mathbb{R}}) \quad = \quad \frac{m(S_{\mathbb{R}})}{\sqrt[2n]{\det(S_{\mathbb{R}})}}.$$

Ist S eine positiv definite Hermitesche Form und $S_{\mathbb{R}} \in \mathrm{QF}_{\mathbb{R}}(K,n)$ die positiv definite reelle Form, die man durch Spurbildung wie in [56] aus S erhält, dann gilt nach (4.4):

$$\begin{aligned}
\gamma_{2n}(S_{\mathbb{R}}) \quad &= \quad \frac{m(S_{\mathbb{R}})}{\sqrt[2n]{\det(S_{\mathbb{R}})}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{Disk}(K)|}} \frac{\alpha_d\, m_{n,K}(S)}{\sqrt[2n]{\det(S)}} \\
&\leq \quad \alpha_d \frac{2\sqrt[n]{n!}}{\pi} \frac{1}{\sqrt[n]{\det(S)}}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\alpha_d = \begin{cases} 1, & \textit{falls} \quad d \equiv 1, 2 \bmod 4, \\ 2, & \textit{falls} \quad d \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Folglich ist dann:

$$\begin{aligned} m(S_{\mathbb{R}}) &\leq \alpha_d \frac{2\sqrt[n]{n!}}{\pi} \frac{1}{\sqrt[n]{\det(S)}} \sqrt[2n]{\det(S_{\mathbb{R}})} \\ &= \alpha_d \frac{2\sqrt[n]{n!}}{\pi} |\mathrm{Disk}(K)| \sqrt[n]{\det(S_{\mathbb{R}})}. \end{aligned}$$

□

4.3 Die dyadische Spur

In diesem Abschnitt übertragen wir die Definition der dyadischen Spur aus [52] auf die Menge der positiv definiten Hermiteschen Formen und werden einige grundlegende Eigenschaften dieser Verallgemeinerung herleiten. Die Vorgehensweise und die angeführten Beweise lehnen sich eng an [52], Paragraph 3, sowie Lemma 2.4 und Proposition 2.2 an. Beweise aus [52], die sich sofort verallgemeinern, werden hier nicht mehr aufgeführt.

Definition 4.7
Wir sagen eine Hermitesche Matrix $S \in \mathrm{MAT}^{\mathrm{sym}}(n, \mathbb{C})$ hat eine dyadische Darstellung, falls es $\alpha_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und $v_i \in \mathfrak{O}_K^n - \{0\}$ gibt, so dass

$$S = \sum_i \alpha_i v_i v_i^*$$

ist.

□

Sei für $S \in \mathrm{HER}(n, K)$, $S \geq 0$ das Radikal von S als

$$\mathrm{rad}(S) = \{v \in \mathbb{C}^n \mid v^* S v = 0\}$$

definiert und

$$C_n^*(\mathfrak{O}_K) = \mathbb{R}_{\geq 0} \langle v v^* \rangle_{v \in \mathfrak{O}_K^n - \{0\}}.$$

Proposition 4.8

$$C_n^*(\mathfrak{O}_K) = \{S \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rad}(S) \textit{ ist über } K \textit{ definiert}\}.$$

Beweis:
Für die Menge $\{S \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rad}(S)$ ist über K definiert $\}$ schreiben wir im Beweis kurz X. Für den Fall $n = 1$ ist

$$C_1^*(\mathfrak{O}_K) \;=\; \mathbb{R}_{\geq 0}\langle vv^*\rangle_{v\in\mathfrak{O}_K-\{0\}} \;=\; \mathbb{R}_{\geq 0}|v|^2_{v\in\mathfrak{O}_K-\{0\}} \;=\; \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Da S positiv semidefinit ist, ist dann

$$X \;=\; \mathbb{R}_{\geq 0} \;=\; C_n^*(\mathfrak{O}_K).$$

Im Fall $n > 1$ zeigen wir zunächst $C_n^*(\mathfrak{O}_K) \subset X$. Sei $S = \sum_i \alpha_i v_i v_i^*$ eine dyadische Darstellung von S. Dann ist

$$x^*Sx \;=\; \sum_i \alpha_i x^* v_i v_i^* x \;=\; \sum_i \alpha_i |x^* v_i|^2 \;\geq\; 0$$

und damit ist S positiv semidefinit. Und da S positiv semidefinit ist, folgt des Weiteren

$$\mathrm{rad}(S) \;=\; \left\{ x \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_i \alpha_i |x^* v_i|^2 = 0 \right\} \;=\; \{x \in \mathbb{C}^n \mid x^* v_i = 0 \,\forall i\}\,.$$

Da v_i aus $\mathfrak{O}_K^n$ ist, kann dies als Erzeugnis von Vektoren über K aufgefasst werden. Somit ist $C_n^*(\mathfrak{O}_K) \subset X$ gezeigt.
Nun zur umgekehrten Richtung $X \subset C_n^*(\mathfrak{O}_K)$: Unter der Annahme, dass

$$\mathrm{HP}_n(\mathbb{C}) \;\subset\; C_n^*(\mathfrak{O}_K)$$

ist, folgt die Behauptung mit Induktion. Sei $S \in X$ gegeben. Ist $\mathrm{rad}(S) = 0$, dann ist S positiv definit, also $S \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C}) \subset C_n^*(\mathfrak{O}_K)$. Sei also $\mathrm{rad}(S) \neq 0$. Sei $v = (v_1, \ldots, v_n)$ ein Vektor aus $\mathrm{rad}(S)$. Da $\mathrm{rad}(S)$ über K definiert ist, können wir annehmen, dass alle Einträge von v aus $\mathfrak{O}_K$ sind. Sei a eine Zahl aus dem von $v_1, \ldots, v_n$ erzeugten Ideal. Nach [7], Hilfssatz 4*, lässt sich v zu einer ganzen Matrix U ergänzen, deren erste Spalte v ist und die Determinante a hat. Damit ist

$$U^*SU \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Induktionsannahme ist S_{n-1} aus $C_{n-1}^*(\mathfrak{O}_K)$ und hat somit eine dyadische Darstellung

$$S_{n-1} \;=\; \sum_i \alpha_i v_i v_i^*.$$

Damit ist dann

$$U^*SU \;=\; \sum_i \alpha_i \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}^*.$$

Sei $\tilde{U}$ eine ganze Matrix, so dass $U^{-1} = \frac{1}{a}\tilde{U}$ gilt. Dann ist

$$S = (U^*)^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix} U^{-1} = \sum_i \frac{\alpha_i}{|a|^2}\left(\tilde{U}^*\begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}\right)\left(\tilde{u}^*\begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}\right)^*,$$

und deshalb liegt S in $C_n^*(\mathfrak{O}_K)$. Es bleibt somit $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C}) \subset C_n^*(\mathfrak{O}_K)$ zu zeigen. Wir beweisen zunächst $\mathrm{HP}_n(K) \subset C_n^*(\mathfrak{O}_K)$. Für eine Hermitesche Form x^*Sx mit $S \in \mathrm{HP}_n(K)$ findet man eine Darstellung

$$x^*Sx = \sum_i \alpha_i |x^* v_i|^2$$

mit $v_i \in K^n$ und $\alpha_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Wählen wir nun ein $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ so, dass zv_i für alle i aus $\in \mathfrak{O}_K^n$ ist, dann erhalten wir:

$$S = \sum_i \frac{\alpha_i}{z^2}(zv_i)(zv_i^*).$$

Damit ist $\mathrm{HP}_n(K) \subset C_n^*(\mathfrak{O}_K)$. Als nächstes zeigen wir, dass alle $S \in \mathrm{HER}(n, \mathbb{C})$ mit

$$s_{ii} \geq \mathrm{const} \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} |s_{ij}|$$

für eine genügend große Konstante const, die nur von K abhängt, aus $C_n^*(\mathfrak{O}_K)$ sind.
Sei $\delta = \sqrt{-d}$, also $\delta\overline{\delta} = |\delta|^2 = d$. Sei weiter $S = R + \delta T$ für zwei reelle Matrizen R und T. Bezeichnen $e_1, \ldots, e_n$ die Standardeinheitsvektoren, so ergibt sich für δT die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\delta T &= \delta \begin{pmatrix} 0 & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ -t_{ij} & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |t_{ij}|(-\delta e_i + \mathrm{sgn}(t_{ij})e_j)(-\delta e_i + \mathrm{sgn}(t_{ij})e_j)^* \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\left(d\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{i}|t_{ij}| + \sum_{\substack{j=i \\ j\neq i}}^{n}|t_{ij}|\right) e_i e_i^*.
\end{aligned}$$

Für die reelle, symmetrische Matrix R ist

$$R = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |r_{ij}|(e_i + \mathrm{sgn}(r_{ij})e_j)(e_i + \mathrm{sgn}(r_{ij})e_j)^* + \sum_{i=1}^{n}\left(r_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}|r_{ij}|\right) e_i e_i^*.$$

Wählen wir die Konstante const also größer als d, so sind die Koeffizienten der Terme $e_i e_i^*$ von $R + \delta T$ positiv, da $r_{ii} = s_{ii}$.
Sei nun allgemein $S \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$. Wir wählen $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $S - \eta E_n \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$. Anschließend wähle $\tilde{S}$ aus $\mathrm{HP}_n(K)$, so dass $\breve{S} = (S - \eta E_n) - \tilde{S}$ nur Einträge hat, die im Betrag kleiner als $\frac{\eta}{nd}$ sind. Dies ist möglich, da $\mathrm{HP}_n(K)$ dicht in $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ liegt. Also hat $S = \tilde{S} + (\eta E_n + \breve{S})$ eine dyadische Darstellung, da sowohl $\breve{S}$, als auch $\eta E_n + \tilde{S}$ eine dyadische Darstellung haben. Damit ist gezeigt, dass $X \subset C_n^*(\mathfrak{O}_K)$ gilt.

$\square$

Wir definieren nun die dyadische Spur für $S \neq 0$ als

$$\begin{aligned} \omega_{n,K} = \omega_K : C^*(\mathfrak{O}_K) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \omega_K(S) &= \sup\left(\sum_i \alpha_i\right), \end{aligned}$$

wobei das Supremum über alle dyadischen Darstellungen $S = \sum\limits_i \alpha_i v_i v_i^*$ genommen wird. Für $S = 0$ sei

$$\omega_K(0) = 0.$$

Nun geben wir einige Eigenschaften von ω_K an, insbesondere die Endlichkeit der Bildwerte, die aus Teil i) des nächsten Lemmas folgt.

Lemma 4.9
Für alle $S \in C_n^*(\mathfrak{O}_K)$ gilt:

i) $\forall K, \forall Y \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ *ist* $\mathrm{tr}(YS) \geq \omega_K(S)\mathrm{m}_{n,K}(Y)$,

ii) $\omega_K(S) = 0 \Leftrightarrow S = 0$,

iii) $\omega_K(\lambda S) = \lambda \omega_K(S)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

iv) $\omega_K(S_1 + S_2) \geq \omega_K(S_1) + \omega_K(S_2)$ *und*

v) ω_K *ist eine* $\mathrm{GL}(n, \mathfrak{O}_K)$*-Klassenfunktion, das heißt* $\omega_K(S) = \omega_K(USU^*)$ *für alle* $U \in \mathrm{GL}(n, \mathfrak{O}_K)$.

Beweis:
Ist

$$S = \sum_i \alpha_i v_i v_i^*$$

eine dyadische Darstellung von S, so gilt für ein $Y \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ die Ungleichung

$$\operatorname{tr}(YS) \;=\; \sum_i \alpha_i \operatorname{tr}\left(Y v_i v_i^*\right) \;=\; \sum_i \alpha_i v_i^* Y v_i \;\geq\; \sum_i \alpha_i \mathrm{m}_{n,K}(Y).$$

Bildet man nun das Supremum über alle dyadischen Darstellungen von S, dann folgt die Behauptung aus Teil i). Ist eine von Null verschiedene positiv semidefinite Hermitesche Form gegeben, dann ist deren dyadische Spur positiv. Da $\omega_K(0) = 0$ ist, folgt Teil ii). Für ein positives $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $S = \sum a_i v_i v_i^*$ eine dyadische Darstellung von S genau dann, wenn $\sum \lambda a_i v_i v_i^*$ eine dyadische Darstellung von λS ist, so dass $\lambda \omega_K(S) = \omega_K(\lambda S)$ gilt. Die Aussage iv) erhält man, da die Summe der dyadischen Darstellungen von S_1 und S_2 eine dyadische Darstellung von $S_1 + S_2$ ist. Für v) muss bemerkt werden, dass $\sum a_i v_i v_i^*$ genau dann eine dyadische Darstellung von S ist, wenn $\sum a_i U v_i (U v_i)^*$ eine dyadische Darstellung von USU^* ist.

$\square$

Bemerkung 4.10
Teil ii), iii) und iv) von Lemma 4.9 besagen, dass man ω_K als Typ-I-Funktion auffassen kann (siehe Definition 1.11), wenn man als Urbildmenge einer Typ-I-Funktion eine Teilmenge D mit $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C}) \subset D \subset \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ zulässt.

$\square$

Lemma 4.11
Eine Funktion deren Definitionsbereich $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ umfasst und die die Eigenschaften ii), iii) und iv) aus Lemma 4.9 erfüllt, ist stetig auf $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$.

Beweis:
Der Beweis von [52], Proposition 2.2 kann nach Ersetzen von $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ durch $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ wörtlich übernommen werden.

$\square$

Lemma 4.12
Sei $\phi : \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion, die die Eigenschaften ii), iii) und iv) aus Lemma 4.9 erfüllt und die auf $\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C}) - \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ verschwindet, dann nimmt die Funktion

$$\hat{\phi}(S) \;=\; \inf_{Y \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})} \frac{\operatorname{tr}(SY)}{\phi(Y)}$$

für alle $S \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ ihr Minimum in einem Y_0 an.

Beweis:
Ersetzen wir in [52], Lemma 3.6 die Symbole $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{P}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ und $V_n(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{HER}(n,\mathbb{C})$, so kann der dort angegebene Beweis wörtlich übernommen werden.

□

Proposition 4.13
Das Infimum

$$\hat{\mathrm{m}}_{n,K}(S) \quad = \quad \inf_{Y\in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})} \frac{\mathrm{tr}(SY)}{\mathrm{m}_{n,K}(Y)}$$

wird für alle $S \in C_n^*(\mathfrak{O}_k)$ *für ein* Y_0 *angenommen.*

Beweis:
Aufgrund von Lemma 4.5 und 4.12 erhalten wir die Aussage für $S \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$. Sei $S \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C}) - \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ und damit $\mathrm{rad}(S) \neq 0$. Nach Proposition 4.8 ist $\mathrm{rad}(S)$ über K definiert, da $S \in C_n^*(\mathfrak{O}_K)$. Sei nun, wie im Beweis von Proposition 4.8, U aus $\mathrm{MAT}(n,\mathfrak{O}_K)$ mit $\det(U) = a$ so konstruiert, dass

$$U^*SU \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist. Sei weiter $\tilde{U} \in \mathrm{SL}(n,\mathfrak{O}_K)$ so gewählt, dass $U^{-1} = \frac{1}{a}\tilde{U}$ gilt. Dann ist

$$S \quad = \quad (U^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{n-1} \end{pmatrix} U^{-1} \quad = \quad \tilde{U}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|a|^2}\tilde{S}_{n-1} \end{pmatrix} \tilde{U}.$$

Mit S ist auch $\tilde{S}_{n-1}$ und $S_{n-1} = \frac{1}{|a|^2}\tilde{S}_{n-1}$ positiv semidefinit. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{m}}_{n,K}(S) \quad &= \quad \hat{\mathrm{m}}_{n,K}\left(\tilde{U}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}\tilde{U}^*\right) \\
&= \quad \inf_{Y\in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})} \frac{\mathrm{tr}\left(\tilde{U}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}\tilde{U}^*Y\right)}{\mathrm{m}_{n,K}(Y)} \\
&= \quad \inf_{Y\in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})} \frac{\mathrm{tr}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}\right)\tilde{U}^*Y\tilde{U}\right)}{\mathrm{m}_{n,K}(\tilde{U}^*Y\tilde{U})} \\
&= \quad \hat{\mathrm{m}}_{n,K}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}\right)\right).
\end{aligned}$$

Seien ohne Einschränkung S_{n-1} und $\tilde{Y}_0 \in \mathrm{HP}_{n-1}(\mathbb{C})$ so gewählt, dass

$$\hat{\mathrm{m}}_{n-1,K}(S_{n-1}) \;=\; \frac{\mathrm{tr}(S_{n-1}\tilde{Y}_0)}{\mathrm{m}_{n-1,K}(\tilde{Y}_0)}$$

ist. Da

$$\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{Y}_0 \end{pmatrix}\right) \;=\; \mathrm{tr}(S_{n-1}\tilde{Y}_0)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}_{n,K}\begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{Y}_0 \end{pmatrix} &= \min_{x\in(\mathfrak{O}_K)^n-\{0\}} x^*\begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{Y}_0 \end{pmatrix} x \\
&\le \min_{(0,\tilde{x})^t\in((\mathfrak{O}_K)\times(\mathfrak{O}_K)^{n-1})-\{0\}} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{Y}_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{m}_{n-1,K}(\tilde{Y}_0)
\end{aligned}$$

gelten, ist

$$\hat{\mathrm{m}}_{n-1,K}(S_{n-1}) \;\le\; \hat{\mathrm{m}}_{n,K}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}\right).$$

Umgekehrt muss aber

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{m}}_{n,K}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix} &= \inf_{\begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{Y} \end{pmatrix}\in\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})} \frac{\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{Y} \end{pmatrix}\right)}{\mathrm{m}_{n,K}\begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{Y} \end{pmatrix}} \\
&\le \inf_{Y\in\mathrm{HP}_{n-1}(\mathbb{C})} \frac{\mathrm{tr}\,(S_{n-1}Y)}{\mathrm{m}_{n-1,K}\,(Y)} \\
&= \hat{\mathrm{m}}_{n-1,K}(S_{n-1})
\end{aligned}$$

sein, so dass $\hat{\mathrm{m}}_{n,K}(S) = \hat{\mathrm{m}}_{n-1,K}(S_{n-1})$ ist. Da aber S_{n-1} aus $\mathrm{HP}_{n-1}(\mathbb{C})$ war, wird das Infimum nach Lemma 4.5 und 4.12 angenommen.

□

Lemma 4.14
Sei $Y_0 \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$. Dann gibt es eine Umgebung $N \subset \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ von Y_0, so dass

$$Y \in N \;\Rightarrow\; \mathrm{MinVec}(Y) \subset \mathrm{MinVec}(Y_0).$$

Hierbei bezeichne

$$\mathrm{MinVec}(Y) \;=\; \{x \in \mathfrak{O}_K^n \,|\, x^*Sx = \mathrm{m}_{n,K}(S)\}$$

die Menge der Minimalvektoren von S.

Beweis:
Nach Ersetzen von $\mathbb{Z}$ durch $\mathfrak{O}_K$, $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ durch $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{m}(Y)$ durch $\mathrm{m}_{n,K}(Y)$ kann der Beweis von [52], Lemma 3.8 wörtlich übernommen werden.

$\square$

Satz 4.15
Für jedes $S \in C_n^*(\mathfrak{O}_K)$ gibt es ein $Y_0 \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$, so dass

$$\omega_K(S) = \inf_{Y \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})} \frac{\mathrm{tr}(SY)}{\mathrm{m}_{n,K}(Y)} = \frac{\mathrm{tr}(SY_0)}{\mathrm{m}_{n,K}(Y_0)} \tag{4.5}$$

ist, wobei S eine dyadische Darstellung in den Minimalvektoren von Y_0 besitzt, also

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i v_i^*$$

mit $v_i \in \mathrm{MinVec}(Y_0)$, $\alpha_i \geq 0$. Darüber hinaus gilt:

$$\frac{\mathrm{tr}(SY_0)}{\mathrm{m}_{n,K}(Y_0)} = \omega_K(S) = \sum_{v_i \in \mathrm{MinVec}(Y_0)} \alpha_i.$$

Beweis:
Proposition 4.13 liefert die Existenz eines Y_0, das die zweite Gleichheit von (4.5) erfüllt. Hierbei gilt:

$$\mathrm{tr}(SY_0)\mathrm{m}_{n,K}(Y) \leq \mathrm{tr}(SY)\mathrm{m}_{n,K}(Y_0) \text{ für alle } Y \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C}). \tag{4.6}$$

Wegen Lemma 4.14 gibt es nun eine Umgebung N von Y_0 so, dass $Y \in N \Rightarrow \mathrm{MinVec}(Y) \subset \mathrm{MinVec}(Y_0)$ gilt. Für alle genügend kleinen $B \in \mathrm{HER}(n, \mathbb{C})$ ist $Y_B = Y_0 + B \in N$. Wähle $v_0 \in \mathrm{MinVec}(Y_0)$ so, dass $\mathrm{m}_{n,K}(Y_B) = v_0^* Y_B v_0$ ist. Damit wird Gleichung (4.6) zu

$$\mathrm{tr}(SY_0)\mathrm{tr}(Y_B v_0 v_o^*) \leq \mathrm{tr}(SY_B)\mathrm{m}_{n,K}(Y_0) \ \ \forall B \in \{Y - Y_0 | Y \in N\}. \tag{4.7}$$

Sei nun ein $T \in \mathrm{HER}(n, \mathbb{C})$ mit $v^*Tv \geq 0 \ \forall v \in \mathrm{MinVec}(Y_0)$ gegeben. Für ein genügend kleines $\lambda > 0$ erfüllt dann $B = \lambda T$ die Ungleichung (4.7), also $0 \leq \lambda \mathrm{tr}(SY_0)\mathrm{tr}(Tv_0v_0^*) \leq \lambda \mathrm{m}_{n,K}(Y_0)\mathrm{tr}(ST)$. Demnach ist $\mathrm{tr}(ST) \geq 0$ für alle $T \in \mathrm{HER}(n, \mathbb{C})$ mit $v^*Tv \geq 0 \ \forall v \in \mathrm{MinVec}(Y_0)$. Damit liegt S im kleinsten abgeschlossenen Kegel, der die Menge $\{v^*v \mid v \in \mathrm{MinVec}(Y_0)\}$ enthält. Dies ist aber $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle vv^* \rangle_{v \in \mathrm{MinVec}(Y_0)}$. Ist nun

$$S = \sum_{v_i \in \mathrm{MinVec}(Y_0)} \alpha_i v_i v_i^*$$

eine dyadische Darstellung in den Minimalvektoren von Y_0, also insbesondere $\omega_K(S) \geq \sum \alpha_i$, so ist $\mathrm{tr}(SY_0) = \sum \alpha_i \mathrm{m}_{n,K}(Y_0)$. Mit Hilfe von Lemma 4.9 i) folgt nun wegen

$$\frac{\mathrm{tr}(SY_0)}{\mathrm{m}_{n,K}(Y_0)} \quad \geq \quad \omega_K(S) \quad \geq \quad \sum_i \alpha_i$$

die Behauptung.

□

Lemma 4.16

i) $\omega_K(\mathrm{HP}_n(\mathfrak{O}_K))$ *ist diskret in* $\mathbb{R}$,

ii) $\omega_K(S) \geq \frac{\pi n}{2\sqrt[n]{n!}\sqrt{|\mathrm{Disk}(K)|}} \sqrt[n]{\det(S)}$.

Beweis:
Aus Teil ii) der Aussage folgt, dass es für ein gegebenes Element c aus $\mathbb{R}_{>0}$ nur endlich viele Konjugationsklassen ganzer Matrizen S gibt, für die $\omega_K(S) < c$ ist, also ist $\omega_K(\mathrm{HP}_n(\mathfrak{O}_K))$ diskret in $\mathbb{R}$.
Aufgrund von Lemma 4.9, Teil ii) genügt es, die Ungleichung aus Teil ii) nur für nichtsinguläres S zu zeigen. Mit Hilfe von (4.4) folgt für alle $Y \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$:

$$\frac{\mathrm{tr}(SY)}{\mathrm{m}_{n,K}(Y)} \quad \geq \quad \frac{n\sqrt[n]{\det(SY)}}{\mathrm{m}_{n,K}(Y)} \quad \geq \quad \frac{\pi n}{2\sqrt[n]{n!}\sqrt{|\mathrm{Disk}(K)|}} \sqrt[n]{\det(S)}.$$

Nehmen wir nun das Infimum über alle $Y \in \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$, so erhalten wir mit Hilfe von Satz 4.15 die geforderte Ungleichung.

□

Lemma 4.17
Sind $l \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ *und* $H \subset \frac{1}{l}\mathrm{HP}_n(\mathfrak{O}_K)$, *so gilt:*

$$\begin{aligned} & \inf \omega_K(\textit{Abschluss der konvexen Hülle von } (\mathbb{R}_{\geq 1}H) \cap \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})) \\ = \quad & \inf_{s \in H} \omega_K(s) \quad = \quad \min_{s \in H} \omega_K(s). \end{aligned}$$

Beweis:
Da H im Abschluss der konvexen Hülle von $\mathbb{R}_{\geq 1}H$ liegt, gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \inf \omega_K(\text{Abschluss der konvexen Hülle von } (\mathbb{R}_{\geq 1}H) \cap \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})) \\ \leq \quad & \inf \omega_K(H). \end{aligned}$$

Umgekehrt gibt es zu jedem x aus dem Abschluss der konvexen Hülle von $\mathbb{R}_{\geq 1}H$ eine Auswahl $S_i \in H$ und $0 \leq \alpha_i \in \mathbb{R}$, so dass $\sum \alpha_i \geq 1$ ist und $\sum\limits_i \alpha_i S_i$ beliebig nahe an x liegt. Da ω_K nach Lemma 4.11 stetig auf $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ ist, liegt $\omega_K\left(\sum \alpha_i S_i\right)$ beliebig dicht an $\omega_K(x)$. Des weiteren ist

$$\omega_K\left(\sum \alpha_i S_i\right) \;\geq\; \sum \alpha_i \omega_K(S_i) \;\geq\; \sum \alpha_i \inf \omega_K(H) \;\geq\; \inf \omega_K(H),$$

und somit $\omega_K(x) \geq \inf \omega_K(H)$. Da $\omega_K(\mathrm{HP}_n(\mathfrak{O}_K))$ nach Lemma 4.16 diskret in $\mathbb{R}$ ist, wird das Infimum angenommen und es gilt die zweite Gleichung.

□

4.4 Der Halbhüllensatz

In diesem Abschnitt wollen wir Satz 1.2 aus [52] verallgemeinern. Sei L eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge des $\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$. L heißt Kern, falls

(1) $\mathbb{R}_{\geq 1} L = L$,

(2) $0 \notin L$ und

(3) $\mathbb{R}_{>0} L \supset \mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$.

Sei weiter

$$L^{\sqcup} \;=\; \{x \in \mathrm{HER}(n,\mathbb{C}) \mid \forall y \in L \;\text{ gilt }\; \mathrm{tr}(xy) \;\geq\; 1\}\,.$$

Mit L ist auch $L^{\sqcup}$ ein Kern und für zwei Kerne $L_1 \subset L_2$ ist $L_2^{\sqcup} \subset L_1^{\sqcup}$. Des weiteren ist $(L^{\sqcup})^{\sqcup} = L$. Für einen imaginär quadratischen Zahlkörper K liegt die Menge $L_K = L \cap \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(K)$ dicht in L, und es gilt $L_K^{\sqcup} = L^{\sqcup}$. Wir bezeichnen für eine nichtleere Teilmenge C von $\mathrm{HER}(n,\mathbb{C})$ die Menge

$$\{x \in \mathrm{HER}(n,\mathbb{C}) | \; \mathrm{tr}(xy) \geq 0 \; \forall y \in C\}$$

mit $C^{\vee}$. Die Menge $C^{\vee}$ ist ein Kegel im $\mathbb{C}^{n^2}$ und $(C^{\vee})^{\vee}$ ist der kleinste abgeschlossene Kegel, der C enthält.
Ist $f \in M_n^k(\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K),\chi)$ eine Modulform, so definieren wir $\nu(f)$ als den Abschluss der konvexen Hülle von $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathrm{Supp}(f)$. Dabei bezeichnt $\mathrm{Supp}(f)$ die Menge aller $T \in \mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K)^{\#}$, für die in der Fourierentwicklung von $(f|_k M)(Z)$,

$$(f|_k M)(Z) = \sum_{0 \leq T \in (\mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K))^{\#}} a_T(M) e^{2\pi \mathrm{i} \frac{\mathrm{tr}(TZ)}{b}},$$

(siehe (1.9)) der Fourierkoeffizient ungleich Null ist. Hierbei lassen wir im Vergleich zum symplektischen Fall in der Fourierentwicklung von $(f|_k M)(Z)$ auch Summanden $a_T e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{b}\mathrm{tr}(TZ)}$ zu, für die $b > 1$ ist. Bevorzugt man eine Fourierentwicklung in der nur Summanden der Form $a_T e^{2\pi \mathrm{i}\,\mathrm{tr}(TZ)}$ auftreten, ist $\mathrm{Supp}(f)$ eine Teilmenge von $\frac{1}{b}(\mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K))^{\#}$. Die Aussagen und Beweise in den folgenden Abschnitten müssen dann entsprechend angepasst werden.
Mit e_{ij} sei im Folgenden die Matrix bezeichnet, die an der ij-ten Stelle den Eintrag 1 hat und sonst nur Nullen.

Lemma 4.18
Sei $n > 2$ und Γ eine Kongruenzuntergruppe mit

$$\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] \quad \subset \quad \Gamma \subset \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K).$$

Für eine Hermitesche Modulform $f \in M_n^k(\Gamma, \chi)$ mit $0 \notin \mathrm{Supp}(f)$ ist $\nu(f)$ ein Kern oder f ist identisch null.

Beweis:
Aus der Fourierentwicklung von f (siehe (1.9)) folgt, dass $\mathrm{Supp}(f) \subset \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ ist. Es gilt $\nu(f) \subset \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$, denn der Abschluss $\overline{\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})}$von $\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ ist gleich $\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$. Dies sieht man leicht, denn: Sei $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine gegen ein $S \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ konvergente Folge von Elementen aus $\mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ und $\{\lambda_i^j\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ die Eigenwerte von S_i. Diese sind größer gleich null, da die S_i positiv semidefinit sind. Da die Eigenwerte $\{\lambda_i^j\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ stetig von S_i abhängen, konvergiert die Folge $\{\lambda_i^j\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ für $i \to \infty$ gegen die Eigenwerte $\{\lambda^j\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ von S. Für diese muss dann aber $\{\lambda^j\}_{j\in\{1,\ldots,n\}} \geq 0$ gelten, da auch alle $\{\lambda_i^j\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ größer oder gleich null sind. Damit ist dann S aber auch positiv semidefinit. Dass S Hermitesch ist, ist klar. Des weiteren ist $\nu(f)$ abgeschlossen und konvex. Es bleiben also die Bedingungen $(1), (2)$ und (3) der Definition des Kern zu überprüfen. Die Aussage (1) ist aufgrund der Konstruktion von $\nu(f)$ klar. Die zweite Aussage folgt aus der Tatsache, dass

$$\mathrm{Supp}(f) \quad \subset \quad (\mathrm{HER}(n, \mathfrak{O}_K))^{\#} \quad \subset \quad \frac{1}{\mathrm{Disk}(K)} \mathrm{HER}(n, \mathfrak{O}_K)$$

ist. Es folgt für alle $T \in \mathrm{Supp}(f)$, dass $\mathrm{tr}(T) \geq \frac{1}{\mathrm{Disk}(K)}$, also auch

$$\mathrm{tr}(x) \quad \geq \quad \frac{1}{\mathrm{Disk}(K)} \quad \forall x \in \nu(f).$$

Damit ist (2) gezeigt und es bleibt (3) zu beweisen. Zeigen wir $K^\vee \subset \mathrm{P}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$, dann folgt $\mathrm{P}_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}_{>0}\nu(f)$ und (3) ist bewiesen.
Wir wollen Zeigen: Falls $\nu(f)^\vee \not\subset \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ ist, so existiert ein $T \in \nu(f)^\vee$, das nicht semidefinit ist und ein $A \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{O}_K)$, so dass für den oberen linken Eintrag p_{11} von $P = A^* T A^{-1}$ die Ungleichung $p_{11} < 0$ gilt. Sei dazu $\tilde{v} \in \mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektor, für den $\tilde{v}^* T \tilde{v} \leq 0$ ist. Approximiert man $\tilde{v}$ durch einen Vektor $v \in K^n$, so dass sich die Einträge v_i und $\tilde{v}_i$ aus v und $\tilde{v}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ höchstens um ϵ unterscheiden, dann ist für ein genügend kleines ϵ auch $v^* T v \leq 0$. Wir ergänzen nun v zu einer über K invertierbaren Matrix $\tilde{A}$. Sei $\tilde{\mathfrak{a}}$ ein Ideal in K, das so gewählt ist, dass $\tilde{\mathfrak{a}}\tilde{A} = A$ aus $\mathrm{SL}(n, \mathfrak{O}_K)$ ist. Der obere linke Eintrag der rechten Seite von

$$\tilde{A}^* T \tilde{A} \quad = \quad A^* \frac{T}{|\tilde{\mathfrak{a}}|^2} A$$

ist genau dann kleiner als null, falls dies der obere linke Eintrag der rechten Seite ist. Da $A \in \mathrm{SL}(n, \mathfrak{O}_K)$ und $\frac{T}{|\mathfrak{a}|^2} \in \nu(f)^\vee$ ist, folgt die Existenz von A und T.
Sei

$$\gamma \;=\; \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \;\in\; S\Delta_n(\mathfrak{O}_K),$$

dann operiert γ auf dem Hermiteschen Halbraum durch $\gamma Z = A^* Z A$. Somit ist

$$(f|_k\gamma)(Z) \;=\; \det(A^{-1})^{-k} f(A^* Z A) \;=\; f(A^* Z A).$$

Da $S\Delta_n(\mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}]$ normal in $\Delta_n(\mathfrak{O}_K)$ ist, ist $f|_k\gamma$ invariant unter $S\Delta_n(\mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}]$. Wegen $\mathrm{Supp}(f|_k\gamma) = A^*\mathrm{Supp}(f)A$ ist nun

$$\nu(f|_k\gamma) \;=\; A^*\nu(f|_k\gamma)A$$

und

$$\nu(f|_k\gamma)^\vee \;=\; A^{-1}\nu(f|_k\gamma)(A^*)^{-1}.$$

Also: $P = A^{-1}T(A^*)^{-1} \in A^{-1}\nu(f|_k\gamma)(A^*)^{-1} = \nu(f|_k\gamma)^\vee$.
Falls $\mathrm{Supp}(f|_k\gamma) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}e_{11}$ ist, folgt, dass $f \equiv 0$ ist. Denn sei hierzu

$$E \;=\; E_n + \mathfrak{a}e_{11} - \mathfrak{a}e_{22} + \mathfrak{a}e_{12} - \mathfrak{a}e_{21},$$

dann gilt:

$$H \;=\; \begin{pmatrix} E^* & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} \in S\Delta_n(\mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}],$$

und es ist $(f|_k\gamma)|_k H = f|_k\gamma$, also

$$\mathrm{Supp}((f|_k\gamma)|_k H) \;=\; \mathrm{Supp}(f|_k\gamma)$$

und

$$E^*\mathrm{Supp}(f|_k\gamma)E \;=\; \mathrm{Supp}(f|_k\gamma).$$

Dann ist aber für $s = \lambda e_{11} \in \mathbb{R}_{\geq 0}e_{11}$:

$$E^*sE \;=\; \lambda((1 + 2Re(\mathfrak{a}) + |\mathfrak{a}|^2)e_{11} + (\mathfrak{a} + |\mathfrak{a}|^2)e_{12}) + (\overline{\mathfrak{a}} + |\mathfrak{a}|^2)e_{21}) + |\mathfrak{a}|^2 e_{22}).$$

Demnach ist $\lambda = 0$. Da $0 \notin \mathrm{Supp}(f|_k\gamma)$ ist $\mathrm{Supp}(f|_k\gamma) = \emptyset$ also $f|_k\gamma \equiv 0$ und $f \equiv 0$.
Um $\mathrm{Supp}(f|_k\gamma) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}e_{11}$ zu zeigen, nehmen wir nun an es gelte $\mathrm{Supp}(f|_k\gamma) \not\subset \mathbb{R}_{\geq 0}e_{11}$ und führen dies zu einem Widerspruch. Aufgrund dieser Annahme gibt es ein $B \in \mathrm{Supp}(f|_k\gamma)$, dessen m-ter Diagonaleintrag b_{mm}, $m > 1$ größer als Null

ist. Sei für $t \in \mathbb{N}$ nun $T_t = E_t + t\mathfrak{a}e_{1m}$ und sei $\delta_t = T_t B T_t^*$. Die Folge der oberen linken Einträge von δ_t ist für $t > N$ für ein genügend großes N streng monoton steigend, da

$$(\delta_t)_{11} \;=\; b_{11} + t\overline{\mathfrak{a}}b_{1m} + t\mathfrak{a}b_{m1} + t^2|\mathfrak{a}|^2 b_{mm} \;=\; t^2|\mathfrak{a}|^2 b_{mm} + O(t).$$

Sei nun $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(\zeta) > 0$ und $Z_\zeta = iE_n + i\zeta P$. Da $P \in \nu(f|_k\gamma)^\vee$ ist, ist $\mathrm{tr}(P\nu(f|_k\gamma)^\vee) \geq 0$, also $\mathrm{tr}(P\mathrm{Supp}(f)) \geq 0$. Des weiteren ist:

$$\begin{aligned}\sum_{S \in \mathrm{Supp}(f|_k\gamma)} \left| a_S e^{2\pi i \frac{\mathrm{tr}(SZ_\zeta)}{b}} \right| &= \sum_{S \in \mathrm{Supp}(f|_k\gamma)} |a_S| \left| e^{-2\pi \frac{\mathrm{tr}(SE_n)}{b}} \right| \left| e^{2\pi i\zeta \frac{\mathrm{tr}(SP)}{b}} \right| \\ &\leq \sum_{S \in \mathrm{Supp}(f|_k\gamma)} |a_S| \left| e^{-2\pi \frac{\mathrm{tr}(SE_n)}{b}} \right|.\end{aligned}$$

Die letzte Summe konvergiert absolut gleichmäßig auf einer abgeschlossenen Umgebung von iE_n. Also konvergiert die Fourierentwicklung von $\mathrm{Supp}(f|_k\gamma)$ bei Z_ζ absolut. Betrachten wir nun die Teilfolge

$$\sum_{t>N} |a_{\delta_t}| \left| e^{2\pi i \frac{\mathrm{tr}(\delta_t Z_\zeta)}{b}} \right| \;=\; |a_B| \sum_{t>N} \left| e^{2\pi i \frac{\mathrm{tr}(\delta_t Z_\zeta)}{b}} \right|.$$

Da $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(\delta_t Z_\zeta)) = t^2|\mathfrak{a}|^2 b_{mm}(1 + \zeta p_{11}) + O(t)$ mit $p_{11} < 0$ ist, ist $1 + \zeta p_{11}$ für genügend großes ζ negativ und die Teilfolge divergiert, ein Widerspruch zur absoluten Konvergenz der Oberfolge.

□

Satz 4.19 (Halbhüllensatz)
Sei $n > 2$, Γ eine Kongruenzuntergruppe mit $\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] \subset \Gamma \subset \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$ und $f \in M_n^k(\Gamma, \chi)$ eine Hermitesche Modulform. Falls

$$\phi_f(Z) \;=\; \det(Y)^{\frac{k}{2}} |f(Z)| \text{ mit } Y = \mathrm{Im}(Z)$$

sein Maximum bei $Z_0 = X_0 + iY_0$ annimmt, dann ist

$$\frac{bk}{4\pi} Y_0^{-1} \in \nu(f).$$

Hierbei ist b eine Konstante, die von f abhängt. Ist $\mathfrak{a} = (N)$ mit $N \in \mathbb{N}$, dann kann $b = N$ gewählt werden.

Beweis:
Zunächst ist $0 \notin \mathrm{Supp}(f)$, da sonst für $0 \in \mathrm{Supp}(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{Z \to \infty iE_n} |\phi_f(Z)| \;=\; +\infty$$

nicht existiert und somit $\phi_f(Z)$ sein Maximum nicht in $\mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ annimmt. Es kann also Lemma 4.18 angewendet werden und es folgt: $\nu(f)$ ist ein Kern. Falls

$$\left(\frac{bk}{4\pi}Y_0^{-1}\right)^{\sqcup} \supset (\nu(f)^{\sqcup})_K$$

gilt, folgt

$$\frac{bk}{4\pi}Y_0^{-1} \in \left(\left(\frac{bk}{4\pi}Y_0^{-1}\right)^{\sqcup}\right)^{\sqcup} \subset ((\nu(f)^{\sqcup})_K)^{\sqcup} \subset (\nu(f)^{\sqcup})^{\sqcup} \subset \nu(f)$$

und die Behauptung ist bewiesen. Es reicht also zu zeigen, dass

$$\operatorname{tr}\left(\frac{bk}{4\pi}Y_0^{-1}T\right) \geq 1 \ \forall T \in (\nu(f)^{\sqcup})_K, \ T \text{ positiv semidefinit}$$

gilt. Sei dazu $\delta = \sqrt{-d}$ und und sei $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ sowie P und Q so gewählt, dass $T = \frac{P+\delta Q}{q}$ ist. Setze $\tilde{T} = P + \delta Q$. Seien weiter $\zeta \in \mathbb{C}$ und $Z_\zeta = Z_0 + \zeta|\mathfrak{a}|^2\tilde{T}$. Da

$$Z_\zeta - Z_\zeta^* = Z_0 - Z_0^* + 2\mathfrak{i}\operatorname{Im}(\zeta)|\mathfrak{a}|^2\tilde{T}$$

ist, $Z_0 - Z_0^*$ aus $\mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ ist, und T positiv semidefinit ist, ist $Z_\zeta \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})$, falls $\operatorname{Im}(\zeta) > -\epsilon$ für ein genügend kleines ϵ gilt. Da $f(Z)$ holomorph ist, ist auch $f(Z_\zeta)$ holomorph. Aufgrund der Ganzheit von $\tilde{T}$ kann $f(Z_\zeta)$ als holomorphe Funktion von $z = e^{\frac{2\pi i}{b}\zeta}$ auf $0 < |z| \leq e^{-\frac{2\pi}{b}\epsilon}$ aufgefasst werden. Die Laurententwicklung von f um $z = 0$ ist

$$f(Z_\zeta) = \sum_{S\in\operatorname{Supp}(f)} a_S e^{\frac{2\pi i}{b}\operatorname{tr}(SZ_\zeta)} = \sum_{S\in\operatorname{Supp}(f)} a_S e^{\frac{2\pi i}{b}\operatorname{tr}(SZ_0)} e^{\frac{2\pi i}{b}\zeta\operatorname{tr}(S|\mathfrak{a}|^2\tilde{T})},$$

und es gilt:

$$\min_{S\in\operatorname{Supp}(f)} \operatorname{tr}\left(\frac{|\mathfrak{a}|^2}{b}S\tilde{T}\right) = \min_{S\in\operatorname{Supp}(f)} \frac{|\mathfrak{a}|^2 q}{b}\operatorname{tr}(ST) \geq |\mathfrak{a}|^2 q,$$

da $\operatorname{tr}(ST) \geq 1$ ist. Deshalb setzt sich die Funktion

$$\frac{f(Z_0)}{e^{\frac{2\pi i|\mathfrak{a}|^2 q}{b}\zeta}}$$

holomorph auf $z = 0$ fort und nimmt nach dem Maximumsprinzip ihr Maximum auf $|z| = e^{\frac{2\pi i}{b}\epsilon}$ an, also für ein ζ' mit $\operatorname{Im}(\zeta') = -\epsilon$. Da der Wert des Maximums größer als der Wert der Funktion bei $z = 1$ sein muss, gilt die Ungleichung:

$$\left|\frac{f(Z_0)}{e^{\frac{2\pi i}{b}0}}\right| = |f(Z_0)| \leq \left|\frac{f(Z_{\zeta'})}{e^{\frac{2\pi i|\mathfrak{a}|^2 q}{b}\zeta'}}\right|.$$

Da $\phi_f(Z)$ sein Maximum bei Z_0 annimmt, also

$$\phi_f(Z_0) \quad = \quad |\det(Y_0)|^{\frac{k}{2}}|f(Z_0)| \geq |\det(Y)|^{\frac{k}{2}}|f(Z)|$$

ist, folgt:

$$|f(Z_{\zeta'})|\left|\frac{\det(Y_{\zeta'})}{\det(Y_0)}\right|^{\frac{k}{2}} \quad \leq \quad \left|\frac{f(Z_{\zeta'})}{e^{\frac{2\pi i|\mathfrak{a}|^2 q}{b}\zeta'}}\right|$$

mit $Y_{\zeta'} = \det(Y_0 + |\mathfrak{a}|^2\mathrm{Im}(\zeta'\tilde{T})) = \det(Y_0 + |\mathfrak{a}|^2\epsilon P)$. Da $f \not\equiv 0$ ist, liefern die beiden obigen Ungleichungen:

$$\left|\frac{\det(Y_{\zeta'})}{\det(Y_0)}\right|^{\frac{k}{2}} \quad \leq \quad \left|\frac{1}{e^{\frac{2\pi i|\mathfrak{a}|^2 q}{b}\zeta'}}\right|,$$

also

$$\det(E_n + |\mathfrak{a}|^2\epsilon\tilde{T}Y_0^{-1})^{\frac{k}{2}} \quad \leq \quad e^{-\frac{2\pi|\mathfrak{a}|^2 q\epsilon}{b}}.$$

Hieraus folgt (vergleiche [24] p. 49-50), dass

$$\frac{k}{2}\mathrm{tr}(|\mathfrak{a}|^2\tilde{T}Y_0^{-1}) \quad \geq \quad \frac{2\pi|\mathfrak{a}|^2 q}{b}$$

ist. Es folgt

$$\frac{kb}{4\pi}\mathrm{tr}(TY_0^{-1}) \quad \geq \quad 1,$$

was zu zeigen war. Die Aussage über die Konstante b ergeben sich aus (1.9) und den sich daran anschließenden Zeilen.

□

Satz 4.20
Sei $n > 2$, Γ eine Kongruenzuntergruppe mit $\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] \subset \Gamma \subset \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$, und $f \in S_n^k(\Gamma, \chi)$ eine Hermitesche Spitzenform mit Fourierentwicklung

$$(f)(Z) = \sum_{0 \leq T \in (\mathrm{HER}(n, \mathfrak{O}_K))^\#} a_T e^{2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{tr}(TZ)}{b}}$$

für die $\phi_f(Z)$ ihr Maximum bei $Z_0 = X_0 + iY_0$ annimmt. Dann gilt für alle $M \in \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$, dass

$$\frac{kb}{4\pi}\mathrm{Im}(M^{-1}Z_0)^{-1} \in \nu(f|_k M)$$

ist.

Beweis:
Für $\tilde{M} \in \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$ gibt es eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ so, dass $f|_k\tilde{M}$ invariant unter $S\Delta_n(\mathfrak{O}_K)[(N)]$ ist, denn mit Γ ist auch $\tilde{M}^{-1}\Gamma\tilde{M}$ eine Kongruenzuntergruppe. Da für alle

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in S\Delta_n(\mathfrak{O}_K)[(N)]$$

gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{f|_kM}(Z) &= \det(Y)^{\frac{k}{2}}|(f|_kM)(Z)| \\ &= \det(Y)^{\frac{k}{2}}\det(D)^{-k}|f(M\langle Z\rangle)| \\ &= \det(Y)^{\frac{k}{2}}|f(M\langle Z\rangle)| \ = \ \phi_f(M\langle Z\rangle), \end{aligned}$$

nimmt $f|_kM$ sein Maximum auf $M^{-1}\cdot Z$ an. Nun kann Satz 4.19 angewendet werden.

□

Bemerkung 4.21
Ist f Spitzenform zur vollen Modulgruppe ($n > 2$), so nimmt $\phi_f(Z)$ sein Maximum auf $\mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ an.

Beweis:
Analog zu [24], Hilfssatz 3.11 genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{\det(Y)\to\infty} \phi_f(Z) \ = \ 0.$$

Diese Aussage findet sich in [10], p. 146, (E).

□

4.5 Anwendungen des Halbhüllensatzes

Ziel dieses Abschnittes ist es, ein Analogon zum Satz von C. Poor und D. S. Yuen anzugeben, das für Hermitesche Modulformen gilt. Sei K ein imaginärquadratischer Zahlkörper, Γ eine Kongruenzuntergruppe mit

$$\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)[\mathfrak{a}] \ \subset \ \Gamma \ \subset \ \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K), \quad n > 2$$

und $f \in S_n^k(\Gamma, \chi)$ eine Spitzenform. Wir interessieren uns für die Kerne $\nu(f|_kM)$ mit $M \in \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$. Für zwei Repräsentanten M_1 und M_2 derselben Nebenklasse von $\Gamma\backslash\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$, stimmen die Kerne $\nu(f|_kM_1)$ und $\nu(f|_kM_2)$ überein. Ist $M = \begin{pmatrix} A^* & S \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in \Delta_n(\mathfrak{O}_K)$, so ist $\nu(f|_kM) = A^*\nu(f)A$.

Definition 4.22
Eine Menge von Kernen $\{K_M\}_{M\in \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)}$ *heißt* Γ*-zulässig, falls für alle* $M_1 \in \Gamma$ *und* $M_2 = \begin{pmatrix} A^* & S \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in \Delta_n(\mathfrak{O}_K)$ *gilt:* $K_{M_1 M M_2} = K_{A^* M A}$.

□

Die Menge $\{\nu(f|_k M)\}_{M\in \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)}$ ist Γ-zulässig und für eine Γ-zulässige Menge von Kernen $\{K_M\}_{M\in \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)}$ sind die beiden Aussagen

i) Für alle $M \in \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$ gilt: $\nu(f|_k M) \subset K_M$ und

ii) Für alle $M \in \Gamma\backslash \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)/\Delta_n(\mathfrak{O}_K)$ gilt: $\nu(f|_k M) \subset K_M$

äquivalent.

Satz 4.23
Sei $f \in S_n^k(\Gamma,\chi)$ *eine Spitzenform zur Kongruenzuntergruppe* Γ *von endlichem Index in* $\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$, $n > 2$ *und die Funktion* $\phi_f(Z)$ *nehme ihr Maximum bei* $Z_0 = X_0 + iY_0 \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C})$ *an. Sei weiter* $\{K_M\}_{M\in\Gamma\backslash \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)/\Delta_n(\mathfrak{O}_K)}$ *eine* Γ*-zulässige Menge von Kernen mit* $\mathrm{Supp}(f|_k M) \subset K_M$. *Seien*

$$(f|_k M)(Z) = \sum_{0\le T\in(\mathrm{HER}(n,\mathfrak{O}_K))^\#} a_T(M) e^{2\pi \mathrm{i}\frac{\mathrm{tr}(TZ)}{b_f}}$$

die Fourierentwicklungen von $(f|_k M)(Z)$. *Dann gilt:*

i) Ist $f \not\equiv 0$, *so ist:*

$$Z_0 \quad \notin \bigcup_{M\in \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)} M \left\{ Z \in \mathbb{H}_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, \frac{b_f k}{4\pi}\mathrm{Im}(Z)^{-1} \notin K_M \right\}.$$

ii) Enthält die in Teil i) beschriebene Vereinigung von Mengen den Fundamentalbereich $\mathcal{F}_n(K,\Gamma)$, *so ist* $f \equiv 0$.

Beweis:
Der Beweis geht analog zu [52], Theorem 1.6. Der dortige Hinweis auf Lemma 1.5 ist mit den obigen Ausführungen abgedeckt. Die Konstante b_f hängt, da M und M^{-1} aus $\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$ sind, nur von der Form f und nicht von der Matrix M ab. (Siehe (1.9).)

□

Satz 4.24 (gleichmäßige Abschätzung)
Sei $\Gamma \supset \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)[(N)]$, $N \in \mathbb{N}$, $n > 2$ *eine Kongruenzuntergruppe und* $f \in S_n^k(\Gamma,\chi)$ *eine Spitzenform zu* Γ*. Ist für alle* $M \in \Gamma\backslash\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$

$$\min \omega_K(\mathrm{Supp}(f|_k M)) \;\; > \;\; \frac{Nk}{4\pi} \sup_{Z\in\mathbb{H}_n(\mathbb{C})} \inf_{\sigma\in\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)} \omega_K(\mathrm{Im}(\sigma Z)^{-1}),$$

so ist $f \equiv 0$.

Beweis:
Ersetzen wir im Beweis von [52], Theorem 2.5 ϕ durch ω_K, 'Main Result 1.3' durch Satz 4.20, $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ durch $\mathrm{HP}_n(\mathbb{C})$ und Lemma 2.4 durch Lemma 4.17, so kann dieser Beweis hier wörtlich übernommen werden. Hierbei ist zu beachten, dass man für die Konstante b aus Satz 4.20 den Wert N wählen kann, siehe (1.9) und die anschließenden Zeilen.

□

Satz 4.25 (Mittlere Abschätzung)
Sei $f \in S_n^k(\Gamma,\chi)$ *eine Spitzenform zur Kongruenzuntergruppe* $\Gamma \supset \mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)[N]$ *von endlichem Index* I *in* $\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$*,* $n > 2$*. Seien weiter* $M_1,\dots,M_I$ *eine Menge von Repräsentanten von* $\Gamma\backslash\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$*. Ist*

$$\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} \min \omega_K(\mathrm{Supp}(f|_k M_i)) \;\; > \;\; \frac{Nk}{4\pi} \sup_{Z\in\mathbb{H}_n(\mathbb{C})} \inf_{\sigma\in\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)} \omega_K(\mathrm{Im}(\sigma Z)^{-1}),$$

so ist $f \equiv 0$.

Beweis:
Ersetzt man im Beweis von [52], Theorem 2.6 das Zeichen ϕ durch ω_K und Theorem 2.5 durch Satz 4.24, so kann dieser Beweis wörtlich übernommen werden.

□

Um diese Sätze für explizite Rechnungen anwenden zu können, bleibt noch die Bestimmung von

$$\omega_K^{(n)} \;\; = \;\; \sup_{Z\in\mathbb{H}_n(\mathbb{C})} \inf_{\sigma\in\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)} \omega_K(\mathrm{Im}(\sigma Z)^{-1})$$

oder einer oberen Schranke hiervon. Als obere Schranke kann

$$\mathfrak{w}_{K,n} \;\; = \;\; \sup_{Z\in\mathcal{F}(n,K)} \omega_K(Z^{-1})$$

benutzt werden. Hierbei bezeichnet $\mathcal{F}(n,K)$ einen Fundamentalbereich der Operation von $\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K)$ auf $\mathbb{H}_n(\mathbb{C})$. Damit erhalten wir für die vollen Modulgruppen den folgenden Satz:

Satz 4.26
Sei K ein imaginärquadratischer Zahlkörper und sei für $n > 2$ eine Spitzenform $f \in S_n^k(\mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K), \chi)$ mit Fourierentwicklung

$$f(Z) \quad = \sum_{T \in \mathrm{Supp}(f)} a(T) e^{\frac{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}{b}}$$

vorgelegt. Dann sind äquivalent:

i) $f \equiv 0$,

ii) $\forall T \in \mathrm{Supp}(f)$ *mit* $\omega_K(T) < \omega_K^{(n)} \frac{bk}{4\pi}$ *ist* $a(T) = 0$,

iii) $\forall T \in \mathrm{Supp}(f)$ *mit* $\omega_K(T) < \mathfrak{w}_{K,n} \frac{bk}{4\pi}$ *ist* $a(T) = 0$.

□

Im Folgenden wollen wir nun noch eine explizite Abschätzung für $\mathfrak{w}_{K,n}$ angeben. In Lemma 4.9 haben wir gesehen, dass für jeden imaginärquadratischen Zahlkörper und für alle $S, Y \in \mathrm{HP}_n^{\mathrm{semi}}(\mathbb{C})$ gilt:

$$\mathrm{tr}(YS) \quad \geq \quad \omega_K(S) \mathrm{m}_{n,K}(Y).$$

Also ist für $S = Y^{-1}$

$$\omega_K(Y^{-1}) \quad \leq \quad \frac{\mathrm{tr}(YY^{-1})}{\mathrm{m}_{n,K}(Y)} \quad = \quad \frac{n}{\mathrm{m}_{n,K}(Y)}. \tag{4.8}$$

Folglich sind wir an einer Abschätzung für

$$\mathrm{m}_{n,K}(Y), \quad Z \; = \; X + \mathrm{i}Y \in \mathcal{F}(n, K)$$

interessiert. Für alle $Z \in \mathcal{F}(n, K)$ und

$$M \quad = \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n, \mathfrak{O}_K)$$

ist

$$\det\left((CZ + D)(CZ + D)^*\right) \quad \geq \quad 1$$

und für die Einträge x_{ij} von X gilt: $|x_{ij}| \leq \frac{1}{2}$. Also ist $\forall Y \in \mathcal{F}(n, K)$

$$y_{ii} \quad \geq \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.9}$$

Aus der Reduktionstheorie (siehe Seite 133*f*) erhalten wir die Existenz einer Matrix U_v^{-1} in der Menge

$$\bigcup_{\alpha} M(K,\alpha,n),$$

die aus endlich vielen in $\mathrm{GL}(n,K)$ invertierbaren Matrizen aus $\mathrm{MAT}(n,\mathfrak{O}_k)$ besteht, deren Determinnate α durch

$$1 \;\leq\; \alpha \leq |\mathrm{Disk}(K)|^{\frac{n}{2}} n^{2n}$$

beschränkt ist, siehe hierzu Satz 4.2. Dabei kann U_v^{-1}, so gewählt werden, dass $Y = (U_v^{-1})^* \dot{Y} U_v^{-1}$ und

$$\dot{y}_{11} \;\leq\; \ldots \leq \dot{y}_{nn}$$

gelten. Beachte nun, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_{n,K}(\dot{Y}) &= \min_{x\in\mathfrak{O}_K^n-\{0\}} x^*\dot{Y}x \\ &= \alpha^2 \min_{x\in\mathfrak{O}_K^n-\{0\}} \left(\frac{1}{\alpha}U_v x\right)^* Y \left(\frac{1}{\alpha}U_v x\right) \end{aligned}$$

ist. Da die Menge

$$G \;=\; \left\{ \frac{1}{\alpha}U_v x \,\middle|\, x \in \mathfrak{O}_K^n - \{0\} \right\} \subset \mathfrak{O}_K^n - \{0\}$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_{n,K}(\dot{Y}) \;\leq\; \alpha^2 \min_{x\in G} x^*Yx \;&\leq\; \alpha^2 m_{n,K}(Y) \\ &\leq\; |\mathrm{Disk}(K)|^{\frac{n}{2}} n^{2n} m_{n,K}(Y). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Schließlich erhalten wir aus (4.8), (4.9) und (4.10) die Abschätzung

$$\mathfrak{w}_{K,n} \;\leq\; \frac{2}{\sqrt{3}} |\mathrm{Disk}(K)|^n n^{4n}.$$

Wir erhalten ergänzend zu Satz 4.26:

Satz 4.27
Sei für $n > 2$ eine Spitzenform $f \in S_n^k(\mathrm{U}(n,\mathfrak{O}_K),\chi)$ mit Fourierentwicklung

$$f(Z) \;=\; \sum_{T\in\mathrm{Supp}(f)} a(T) e^{\frac{2\pi i \mathrm{tr}(TZ)}{b}}$$

vorgelegt. Dann sind äquivalent:

i) $f \equiv 0$,

iii) $\forall T$ *mit* $\omega_K(T) < \frac{k}{2\sqrt{3}\pi} |\mathrm{Disk}(K)|^n n^{4n}$ *ist* $a(T) = 0$.

□

Bemerkung 4.28
Im Vergleich zum Siegelschen Fall (siehe [52] oder Satz 1.9) tritt hier in der Schranke für die dyadische Spur ein Faktor $|\mathrm{Disk}(K)|^n n^{4n}$ *auf. Insbesondere der Faktor* n^{4n} *scheint hierbei störend. Eine bessere Abschätzung für Determinanten der Menge* $M(K, \alpha, n)$ *aus der Reduktionstheorie wäre hier wünschenswert.*

□

Beispiel 4.29
Im einfachsten Fall des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ *mit* $\mathrm{Disk}(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})) = -4$ *müssen im Fall* $n = 2$ *schon alle* $T \in HP_n(\mathbb{Z}[\mathfrak{i}])$ *betrachtet werden, für die*

$$\omega_K(T) \quad < \quad \frac{k}{\sqrt{3}\pi} 2^{11}$$

ist. Für praktische Rechnungen ist diese Konstante bereits zu groß.

□

Anhang

Wir geben hier noch einige Tabellen an, die allgemeine Aussagen zu binären und ternären quadratischen Formen enthalten.

In Tabelle 4.1 werden die Anzahlen von geraden, binären quadratischen Formen mit vorgegebener dyadischer Spur aufgelistet. In der Spalte, die mit ω_2 gekennzeichnet ist, steht hierbei der Wert der dyadischen Spur und in der mit 'anz' gekennzeichneten Spalte die Anzahl der Formen, deren dyadische Spur diesen Wert hat. Der Wert in der mit 'sum' gekennzeichneten Spalte gibt die Anzahl aller gerader, binären Formen an, die dyadische Spur kleiner oder gleich dem Wert in der mit ω_2 gekennzeichneten Spalte haben. Dies entspricht der Anzahl aller $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$–Äquivalenzklassen gerader, binärer Formen, deren dyadische Spur kleiner als dier Wert ω_2 ist.

Aus Tabelle 4.2 können Abschätzungen für die Dimension der Räume $S_2^k(\Gamma_0^{(n)}(N))$ abgelesen werden. Es werden die Anzahlen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$–Äquivalenzklassen ganzer binärer Formen deren dyadishe Spur kleiner als eine vorgegebene Konstante c ist aufgeführt. (Die Aussagen in der vorliegenden Arbeit sind für galbganze Formen formuliert, so dass die dort angegebenen Konstanten mit 2 multipliziert werden müssen um sie mit den Konstante in der Tabelle vergleichen zu können.) Der Unterschied der hierbei für Spitzenformen vom geradem und ungeradem Gewicht gemacht wird beruht darauf, dass alle Fourierkoeffizienten a_T einer Spitzenform mit ungeradem Gewicht, die die Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

haben, verschwinden. Es gilt:

$$a_{U^tTU} \;=\; \det(U)^k a_T \quad \text{für alle} \quad U \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}),$$

siehe [24], Hilfssatz 3.4. Betrachten wir $U = \mathrm{Diag}(1,-1)$, dann folgt $a_T = 0$. Falls eine Spitzenform gerades Gewicht hat, kann so nicht argumentiert werden.

In Tabelle 4.3 werden all diejenigen halbganzen ternären Formen mit ihrer Determinante und Spur aufgelistet, die dyadische Spur kleiner als 5 haben. Ist die Gram-Matrix einer solchen Form durch

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

gegeben, dann wird diese in der Tabelle durch den Eintrag $2a\ \ 2b\ \ 2c\ \ 2d\ \ 2e\ \ 2f$ aufgelistet. Zur Berechnung dieser Liste wurde die explizite Beschreibung von ternären Formen aus [58] benutzt.

In Tabelle 4.4 werden die Anzahlen von geraden ternären quadratischen Formen mit vorgegebener dyadischer Spur aufgelistet. Die Beschriftung der Tabelle ist analog zu Tabelle 4.1.

ω_2	anz	sum	ω_2	anz	sum	ω_2	anz	sum	ω_2	anz	sum
3	2	2	4	1	3	5	2	5	6	3	8
7	4	12	8	4	16	9	6	22	10	6	28
11	8	36	12	9	45	13	10	55	14	11	66
15	14	80	16	14	94	17	16	110	18	18	128
19	20	148	20	21	169	21	24	193	22	25	218
23	28	246	24	30	276	25	32	308	26	34	342
27	38	380	28	39	419	29	42	461	30	45	506
31	48	554	32	50	604	33	54	658	34	56	714
35	60	774	36	63	837	37	66	903	38	69	972
39	74	1046	40	76	1122	41	80	1202	42	84	1286
43	88	1374	44	91	1465	45	96	1561	46	99	1660
47	104	1764	48	108	1872	49	112	1984	50	116	2100

Tabelle 4.1: Liste mit Anzahlen von geraden binären quadratischen Formen mit vorgegebener dyadischer Spur

c	$2\|k$	$2 \nmid k$	c	$2\|k$	$2 \nmid k$	c	$2\|k$	$2 \nmid k$	c	$2\|k$	$2 \nmid k$
3	1	1	4	2	1	5	3	2	6	5	3
7	7	5	8	10	6	9	13	9	10	17	11
11	21	15	12	27	18	13	32	23	14	39	27
15	46	34	16	55	39	17	63	47	18	74	54
19	84	64	20	97	72	21	109	84	22	124	94
23	138	108	24	156	120	25	172	136	26	192	150
27	211	169	28	234	185	29	255	206	30	281	225
31	305	249	32	334	270	33	361	297	34	393	321
35	423	351	36	459	378	37	492	411	38	531	441
39	568	478	40	611	511	41	651	551	42	698	588
43	742	632	44	793	672	45	841	720	46	896	764
47	948	816	48	1008	864	49	1064	920	50	1128	972

Tabelle 4.2: Liste mit Abschätzungen von $\dim(S_2^k(\Gamma_0^{(n)}(N)))$ für $\omega_2 < c$

2 · Form						2 · dyadische Spur	8 · Determinante	2 · Spur
2	2	2	1	1	1	4	4	6
2	2	2	1	0	0	5	6	6
2	2	2	0	0	0	6	8	6
2	2	4	1	1	1	6	10	8
2	2	4	0	1	1	6	12	8
2	2	4	1	0	0	7	12	8
2	2	4	0	1	0	7	14	8
2	4	4	1	1	2	7	20	10
2	2	6	1	1	1	8	16	10
2	2	4	0	0	0	8	16	8
2	2	6	0	1	1	8	20	10
2	4	4	0	0	2	8	24	10
2	4	4	1	1	1	8	24	10
2	4	4	1	0	1	8	26	10
4	4	4	2	2	1	8	36	12
4	4	4	2	2	2	8	32	12
2	2	6	1	0	0	9	18	10
2	2	6	0	1	0	9	22	10
2	4	4	1	0	0	9	28	10
2	4	4	0	0	1	9	30	10
2	4	6	1	1	2	9	4	12
2	4	6	0	1	2	9	36	12
4	4	4	2	1	1	9	44	12
4	4	4	1	1	-1	9	50	12
2	2	8	1	1	1	10	22	12
2	2	6	0	0	0	10	24	10
2	2	8	0	1	1	10	28	12
2	4	4	0	0	0	10	32	10
2	4	6	1	1	1	10	38	12
2	4	6	0	0	2	10	40	12
2	4	6	1	0	1	10	40	12
2	4	6	0	1	1	10	42	12
4	4	4	2	0	0	10	48	12
2	6	6	1	1	3	10	48	14
4	4	4	1	1	1	10	54	12
4	4	4	1	1	0	10	56	12
4	4	6	2	2	2	10	56	14
4	4	6	2	2	1	10	60	14
4	4	6	0	2	2	10	64	14
4	4	6	1	2	2	10	66	14

Tabelle 4.3: Liste mit ternären, halbganzen, quadratischen Formen mit dyadischer Spur kleiner gleich 10 mit Wetrten für Spur und Determinante

ω_3	1	2	3	4	5
anz	0	0	0	1	1
sum	0	0	0	1	2
ω_3	6	7	8	9	10
anz	3	3	8	8	16
sum	5	8	16	24	40
ω_3	11	12	13	14	15
anz	17	32	33	55	60
sum	57	89	122	177	237
ω_3	16	17	18	19	20
anz	95	101	151	164	235
sum	332	433	584	748	983
ω_3	21	22	23	24	25
anz	256	351	383	516	560
sum	1239	1590	1973	2489	3049
ω_3	26	27	28	29	30
anz	730	799	1020	1111	1393
sum	3779	4578	5598	6709	8102
ω_3	31	32	33	34	35
anz	1517	1873	2037	2474	2689
sum	9619	11492	13529	16003	18692
ω_3	36	37	38	39	40
anz	3232	3502	4156	4504	5295
sum	21924	25426	29582	34086	39381
ω_3	41	42	43	44	45
anz	5721	6664	7189	8302	8937
sum	45102	51766	58955	67257	76194
ω_3	46	47	48	49	50
anz	10225	10979	12464	13332	14996
sum	86419	97398	109862	123194	138190
ω_3	51	52	53	54	55
anz	15989	17828	18913	20900	22057
sum	154179	172007	190920	211820	233877
ω_3	56	57	58	59	60
anz	24152	25335	27467	28616	30724
sum	258029	283364	310831	339447	370171
ω_3	61	62	63	64	65
anz	31746	33711	34530	36254	36751
sum	401917	435628	470158	506412	543163

Tabelle 4.4: Liste mit Anzahlen von geraden ternären quadratischen Formen mit vorgegebener dyadischer Spur

Literaturverzeichnis

[1] A. N. Andrianov, *On Siegel modular forms of genus n and weight $n/2$*, Journal of Mathematical Sciences. The University of Tokyo. Graduate School of Mathematical Sciences, Tokyo. (Früher: Journal of the Faculty of Science. Section I A) **28** (1981), 487–503.

[2] ———, *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 286, Springer, 1987.

[3] B. J. Goldman, G. C. Rota, *On the foundation of combinatorial theory IV, finite vector spaces and eulerian generating functions*, Studies in Applied Mathematics **XLIX No. 3** (1970), 239–258.

[4] S. Böcherer, *Siegel modular forms and theta series*, Theta functions, Proc. 35th AMS Summer Research Institute, Bowdoin College, Brunswick/ME 1987, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **49, Pt. 2** (1989), 3–17.

[5] S. Böcherer, J. Funke, R. Schulze-Pillot, *Trace operator and theta series*, Journal of Number Theory **78** (1999), 119–139.

[6] S. Böcherer, R. Schulze-Pillot, *Siegel modular forms and theta series attached to quaternion algebras*, Nagoya Mathematical Journal **121** (1991), 35–96.

[7] H. Braun, *Zur Theorie der hermiteschen Formen*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg **14** (1941), 61–150.

[8] ———, *Hermitian modular functions I*, Annals of Mathematics **50** (1949), 827–855.

[9] ———, *Hermitian modular functions III*, Annals of Mathematics **53** (1951), 143–160.

[10] ———, *Der Basissatz für hermitesche Modulformen*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg **19** (1955), 134–148.

[11] H. Cartan, *Fonctions automorphes*, Séminaire **No. 10** (1957).

[12] J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms*, Academic Press, 1978.

[13] U. Christian, *Siegelsche Modulfunktionen*, Vorlesung, Mathematisches Institut der Universität Göttingen,(1974/75, 1980/81).

[14] ———, *Hilbert-Siegelsche Modulformen und Poincarésche Reihen*, Mathematische Annalen **148** (1962), 257–307.

[15] ———, *Über die Anzahl der Spitzen Siegelscher Modulgruppen*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg **32** (1968), 55–60.

[16] ———, *Berechnung des Rangs der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **277** (1975), 130–154.

[17] T. Dern, *Multiplikatorsysteme und Charaktere hermitescher Modulgruppen*, Monatshefte für Mathematik **126** (1998), 109–116.

[18] ———, *Hermitesche Modulformen zweiten Grades*, Wissenschaftsverlag, Aachen, zugleich Dissertation RWTH Aachen, 2001.

[19] L. Chung-Yuan E. Minking, *Dimension formulae for the vector spaces of siegel cusp forms of degree three*, American Journal of Mathematics **108** (1986), 1059–1087.

[20] M. Eichler, *The basis problem for modular forms and the traces of Hecke operators*, Lecture Notes in Mathematics **320** (1972), 75–152.

[21] ———, *Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht*, Mathematische Annalen **213** (1975), 281–291.

[22] ———, *Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht*, Mathematische Annalen (Erratum) **215** (1975), 195.

[23] E. Freitag, *Die Invarianz gewisser von Thetareihen erzeugter Vektorräume unter Heckeoperatoren*, Mathematische Zeitschrift **156** (1977), 141–155.

[24] ———, *Siegelsche Modulformen*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 254, Springer, 1983.

[25] E. Gottschling, *Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereichs der Modulgruppe zweiten Grades*, Mathematische Annalen **138** (1959), 103–124.

[26] K. Gunji, *On the graded ring of Siegel modular forms of degree 2, level 3*, Journal of the Mathematical Society of Japan **56** (2004), 375–403.

[27] K. Hashimoto, *The dimension of the spaces of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two (I)*, Journal of Mathematical Sciences. The University of Tokyo. Graduate School of Mathematical Sciences, Tokyo. (Früher: Journal of the Faculty of Science. Section I A) **30** (1983), 403–488.

[28] E. Hecke, *Gesammelte Werke*, Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, 1959.

[29] P. Humbert, *Théorie de la réduction des formes quadratiques définies positives dans un corps algébraique k fini*, Commentarii Mathematici Helvetici **12** (1940), 263–306.

[30] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics 21, Springer, 1975.

[31] M. I. Icaza, *Hermite constant and extreme forms for algebraic number fields*, Journal of the London Mathematical Society (2) **55:1** (1997), 11–22.

[32] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290, Springer, 1993.

[33] B. Orsted J. P. Anker, *Lie Theory: Lie Algebras and Representations*, Progress in Mathematics Vol. 228, Birkhäuser, 2004.

[34] Y. Kitaoka, *A remark on the transformation of theta functions associated to positive definite quadratic forms*, Journal of Number Theorie **12** (1980), 224–229.

[35] H. Klingen, *Bemerkungen über Kongruenzgruppen der Modulgruppe n-ten Grades*, Archiv der Mathematik **X** (1959), 113–122.

[36] ———, *Charakterisierung der Siegelschen Modulgruppe durch ein endliches System definierender Relationen*, Mathematische Annalen **144** (1961), 64–72.

[37] ———, *Zur Struktur der Siegelschen Modulgruppe*, Mathematische Zeitschrift **136** (1974), 169–178.

[38] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Progress in Mathematics 140, Birkhäuser, 1996.

[39] M. Kneser, *Starke Approximation in algebraischen Gruppen. I*, Journal für reine und angewandte Mathematik **218** (1965), 196–302.

[40] ———, *Quadratische Formen*, Vorlesung, Korrigierter Nachdruck, Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1992.

[41] M. Koecher, *Zur Theorie der Modulformen n-tenGrades I*, Mathematische Zeitschrift **59** (1954), 455–466.

[42] A. Krieg, *Modular forms on half-spaces of quaternions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1143, Springer, 1985.

[43] H. Maaß, *Modulformen n-ten Grades und Poincarésche Reihen*, Mathematische Annalen. **123** (1951), 125–151.

[44] ______, *Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe*, Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen (1964), 125–135.

[45] J. Mennicke, *Zur Theorie der Siegelschen Modulgruppe*, Mathematische Annalen **159** (1965), 115–129.

[46] E. Minking, *Dimension formulae for the vector spaces of siegel cusp forms of degree three (II)*, Memoirs of the American Mathematical Society **373** (1987), 1–184.

[47] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen I,II*, Teubner, Leibzig-Berlin, (1911); Nachdruck Chelesa, New York, 1967.

[48] T. Miyake, *Modular forms*, Springer, 1989.

[49] Y. Morita, *An explicit formula for the dimension of the space of Siegel modular forms of degree two*, Journal of Mathematical Sciences. The University of Tokyo. Graduate School of Mathematical Sciences, Tokyo. (Früher: Journal of the Faculty of Science. Section I A) **21** (1974), 167–248.

[50] M. Newman, *Integral matrices*, Pure and Applied Mathematics, vol. 45, Academic Press, New York, London, 1972.

[51] M. Newman, J. R. Smart, *Symplectic modulary groups*, Acta Arithmetica **9** (1964), 83–89.

[52] C. Poor, D. S. Yuen, *Linear dependence among Siegel modular forms*, Mathematische Annalen **318** (2000), 205–234.

[53] H. G. Quebbemann, *A shadow identity and an application to isoduality*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg **68** (1998), 339–345.

[54] R. A. Rankin, *Modular forms and functions*, Cambridge University Press, 1977.

[55] I. Satake, *On the compactification of the siegel space*, The Journal of the Indian Mathematical Society **20** (1956), 259–281.

[56] R. Scharlau, R. Schulze-Pillot, *Extremal lattices*, Algorithmic algebra and number theory. Selected papers from a conference, Heidelberg, Germany, October 1997, Springer (1998), 139–170.

[57] G. Scheja, U. Storch, *Lehrbuch der Algebra*, Teil 1, 2-te Auflage, Teubner Stuttgart, 1994.

[58] A. Schiemann, *Ternäre positiv definite quadratische Formen mit gleichen Darstellungszahlen*, Dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität Bonn, 1993.

[59] R. Schulze-Pillot, *Theta liftings and theta series*, Preprint.

[60] ———, *A linear relation between theta series of degree and weight 2 in: Proceedings of the Journées Arithmétique, Ulm, 1987*, Lecture Notes in Mathematics **1380** (1989), 197–201.

[61] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press, 1971.

[62] C. L. Siegel, *Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades*, Gesammelte Abhandlungen **II** (1939), 97–137.

[63] Y. Tanigawa, H. Ishikawa, *The dimension formula of the space of cusp forms of weight one for* $\Gamma_0(p)$, Nagoya Mathematical Journal **111** (1988), 115–129.

[64] S. Tsuyumine, *On Siegel modular forms of degree three*, American Journal of Mathematics **108** (1986), 755–862.

[65] B. L. Van der Waerden, *Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen*, Acta Mathematicae **96** (1956), 265–309.

[66] B. L. Van der Waerden, H. Gross, *Studien zur Theorie der quadratischen Formen*, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften 34, Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1968.

[67] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 188, Springer, 1972.

[68] T. Yamazaki, *On Siegel modular forms of degree two*, American Journal of Mathematics **98** (1976), 39–53.

[69] D. B. Zagier, *Zetafunktionen und quadratische Körper*, Hochschultext, Springer, 1981.

Index