Idealklassenzahlen von Quaternionenalgebren über algebraischen Zahlkörpern

Diplomarbeit

angefertigt von Ute Staemmler
nach einem Thema von Prof. Dr. R. Schulze-Pillot

Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik

Saarbrücken, November 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **5**

1 Quaternionenalgebren **9**
1.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . 9
1.2 Ganzheit . . . 14
1.3 Quadratische Zwischenkörper . . . 18
1.4 Brauergruppe und Hasse-Invariante . . . 23

2 Ideale und Ordnungen **31**
2.1 Grundlagen . . . 31
2.2 Eichler-Ordnungen . . . 37
2.3 Ordnungen in Zahlkörpern . . . 40
2.4 Die Einheitenindizes . . . 45
2.5 Quasi-normale Ideale . . . 50
2.6 Eindeutige Primidealzerlegung . . . 58

3 Die Klassenzahlformel **65**
3.1 Klassen und Typen . . . 65
3.2 Herleitung der Klassenzahlformel . . . 68

A Klassenzahlen für verschiedene Grundkörper **79**
A.1 Ein ausführliches Beispiel . . . 79
A.2 Der Körper der rationalen Zahlen . . . 81
A.3 Zahlkörper vom Grad 2 mit Diskriminante ≤ 20 . . . 82
A.4 Zahlkörper vom Grad 3 mit Diskriminante ≤ 100 . . . 92
A.5 Zahlkörper vom Grad 4 mit Diskriminante ≤ 1500 . . . 96

Literaturverzeichnis **100**

Einleitung

Der Begriff der Idealklassenzahl ist aus den Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie bekannt:

Zu einer gegebenen Ordnung O eines algebraischen Zahlkörpers L betrachtet man die Gruppe $J(O)$ der invertierbaren O-Ideale sowie deren Untergruppe $P(O)$ der O-Hauptideale. Wofür man sich interessiert, ist die Picardgruppe $Pic(O) = J(O)/P(O)$. Ihre Elemente nennt man Idealklassen von O. Es ist bekannt, daß die Picardgruppe eine endliche Gruppe ist; ihre Mächtigkeit kann durch Formeln beschrieben werden. Tatsächlich existieren sogar Algorithmen, die zumindest für Körper mit „kleiner" Diskriminante die Idealklassenzahl in akzeptabler Zeit berechnen können.

Womit wir uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigen wollen, ist im wesentlichen das Analogon obiger Situation, wenn wir anstelle des Zahlkörpers L eine Quaternionenalgebra A über einem algebraischen Zahlkörper K betrachten.

Wir definieren ein Ideal $\mathcal{I}$ von A als einen endlich erzeugten Modul über dem Ganzheitsring R_K von K mit der Eigenschaft $K\mathcal{I} = A$, und eine Ordnung $\mathfrak{O}$ von A als ein Ideal von A, welches zugleich ein unitärer Ring ist. Für eine fest gewählte Ordnung $\mathfrak{O}$ betrachten wir die Menge aller $\mathfrak{O}$-Linksideale, darunter wollen wir solche Ideale $\mathcal{I}$ verstehen, für die $\{x \in A \mid x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}\} = \mathfrak{O}$ ist.

Analog zum Zahlkörperfall untersuchen wir nun die Äquivalenzklassen aller $\mathfrak{O}$-Linksideale bezüglich der Relation

$$\mathcal{I} \sim \mathcal{J} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \mathcal{J} = \mathcal{I}a \quad \text{für ein } a \in A^*.$$

Die Betrachtungen beschränkten sich zunächst auf Maximalordnungen von A. Man stellte bereits in den 1920/30er Jahren fest, daß diese Klassenzahl in einem Großteil der Fälle im wesentlichen mit der Klassenzahl h_K des Grundkörpers K übereinstimmt (siehe M. Eichler [4]). Ausnahme sind allein die positiv definiten Quaternionenalgebren, also diejenigen, für die $K_{\infty_i} \otimes_K A$ für alle archimedischen Stellen ∞_i eine Divisionsalgebra ist.

1938 erschien die Arbeit [5] von M. Eichler, in der man eine Formel findet, in der die Klassenzahl für diese verbleibenden Fälle implizit gegeben ist. Der Umstand, daß die Klassenzahl aber nicht explizit angegeben werden konnte, machte eine konkrete Berechnung jedoch in den meisten Fällen unmöglich. Lediglich in einfachen Situationen, etwa für $K = \mathbb{Q}$, war M. Eichler in der Lage, die Klassenzahl explizit auszurechnen.

Wenn man anstelle von Maximalordnungen die sogenannten Eichler-Ordnungen betrachtet — das sind Durchschnitte von je zwei Maximalordnungen —, erhält man ähnliche Resultate: Wieder bereitet der Fall indefiniter Quaternionenalgebren keine Probleme, und es bleibt lediglich, die Idealklassen in positiv definiten Quaternionenalgebren zu untersuchen.

M.-F. Vignéras stellt in ihrem Artikel [21] aus dem Jahr 1975 eine Formel für die Idealklassenzahl bezüglich Eichler-Ordnungen in positiv definiten Quaternionenalgebren vor.

Diese hat gegenüber der Formel von M. Eichler nicht nur den Vorteil, daß sie für allgemeinere Ordnungen gilt, sondern auch, daß in ihr die Klassenzahl explizit gegeben ist, so daß eine konkrete Berechnung möglich wird.

Idealklassenzahlen von Quaternionenalgebren bestimmen zu können, mag schon für sich genommen ein reizvolles Thema sein. Motiviert wurde die Untersuchungen aber besonders durch den Zusammenhang zur Theorie der Modulformen, der 1940 von E. Hecke erkannt und später von H. Brandt und M. Eichler verallgemeinert wurde.

Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, diesen Zusammenhang genauer zu erläutern; es sei nur soviel gesagt, daß die Arithmetik von Quaternionenalgebren benutzt wird, um Basen gewisser Räumer von Modulformen zur Kongruenzuntergruppe

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

zu bestimmen. Der Leser sei hierzu auf die Arbeiten von E. Hecke [10], M. Eichler [7] und A. K. Pizer [19] verwiesen.

Wir lassen die Bedeutung von Quaternionenalgebren in Bezug auf die Theorie der Modulformen vollständig außen vor, und werden ihre Idealklassen und Idealklassenzahlen nur im Hinblick auf eine Verallgemeinerung der entsprechenden Begriffe im Zahlkörperfall betrachten.

Das erste Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Herleitung der oben erwähnten Formel auszuarbeiten, die M.-F. Vignéras zur Berechnung der Klassenzahl von $\mathfrak{O}$-Linksidealen für eine Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ in einer positiv definiten Quaternionenalgebra aufgestellt hat.

Dazu entwickeln wir in Kapitel 1 die Theorie der Quaternionenalgebren, soweit sie zum Verständis des Nachfolgenden nötig ist. Als Literaturquellen für dieses Kapitel dienen hauptsächlich die Bücher von O. T. O'Meara [16], J. Neukirch [14] und F. Lorenz [12, 13].

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns mit Ordnungen und Idealen. Insbesondere sollen Eigenschaften von Eichler-Ordnungen und quasi-normalen Idealen aufgezeigt werden. Als Wichtigste zu nennen wären etwa ihre jeweilige Gestalt im Lokalen, Zusammenhänge zwischen Eichler-Ordnungen und Ordnungen in maximalen Teilkörpern sowie die eindeutige Primidealzerlegung von quasi-normalen Idealen. An Literatur bietet sich hierfür der Artikel [6] von M. Eichler an sowie die Bücher von M.-F. Vignéras [21], M. Deuring [3] und O. T. O'Meara [16].

Kapitel 3 schließlich widmet sich den Idealklassen. Der größte Teil des Kapitels dient dem Beweis der Klassenzahlformel, der eng an den Beweis von M.-F. Vignéras [21] angelehnt ist.

Das zweite Ziel der vorliegenden Arbeit war die Implementierung ebendieser Formel am Computer. Der Algorithmus wird hier nicht im einzelnen angegeben; lediglich einige wichtige Schritte werden in groben Zügen beschrieben. Darauf werden wir näher in Anhang A eingehen. Das erstellte Programm bedient sich verschiedener zahlentheoretischer Funktionen aus dem Computeralgebrasystem PARI/GP, Informationen zu diesem System findet man in [17] und bei H. Cohen [1, 2].

Während A. K. Pizer in [18] bereits eine umfangreiche Tabelle von Idealklassenzahlen $H_{(D_1,D_2)}$ für eine Vielzahl von Invarianten (D_1, D_2) aber immer im Fall $K = \mathbb{Q}$ veröffentlicht hat, ist der im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstellte Algorithmus in der Lage, auch Berechnungen über anderen Grundkörpern als $\mathbb{Q}$ durchzuführen. Eine Auswahl von Ergebnissen, die Zahlkörper „kleiner“ Diskriminante bis zum Grad $[K : \mathbb{Q}] = 4$ umfassen, ist in Anhang A zusammengestellt.

Mein herzlichster Dank gilt Herrn Prof. Dr. Schulze-Pillot für die Themenstellung und die ausgezeichnete Betreuung, Dr. Ralf Schmidt und Markus Klein für Anregungen und Diskussionen, die sich stets als sehr hilfreich erwiesen, und Max Gebhardt — nicht nur für seine Mühe beim Korrekturlesen.

Hinweise zur Notation

- Ist M eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit $\#M$ ihre Mächtigkeit.
- Unter einem Ring soll immer ein Ring mit Einselement verstanden sein. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die vorkommenden Ringe nicht kommutativ zu sein brauchen und in den meisten Fällen auch nicht sind.
- Für einen beliebigen Ring S sei S^* die Menge seiner Einheiten.
- Der Quotientenkörper eines geeigneten kommutativen Ringes S wird durch $\mathrm{Quot}(S)$ bezeichnet.
- Für $m \geq 1$ sei $M_m(S)$ der volle Matrizenring der $(m \times m)$-Matrizen über einem Ring S, $\mathrm{GL}_m(S)$ seine Einheitengruppe, und I_m die $(m \times m)$-Einheitsmatrix.
- Zu einem algebraischen Zahlkörper K wollen wir auch seinen Ganzheitsring betrachten. Entgegen der üblichen Konvention soll dieser nicht mit $\mathcal{O}_K$ bezeichnet werden, da der Buchstabe O später in anderem Zusammenhang auftauchen wird. Stattdessen setzen wir R (oder noch genauer R_K) für den Ganzheitsring von K.
- Wir werden es mit dreierlei Sorten von Idealen zu tun haben. Für Ideale des Grundkörpers K verwenden wir in der Regel kleine Frakturbuchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}, \ldots$, für Ideale einer Körpererweiterung $L \,|\, K$ große Frakturbuchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{P}, \ldots$ und für Ideale der Quaternionenalgebra kalligraphische Buchstaben $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{P}, \ldots$.
- Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von K sei $N(\mathfrak{a}) = [R_K : \mathfrak{a}]$ seine Absolutnorm.
- Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in K, so bezeichnen wir wie gewohnt mit demselben Buchstaben $\mathfrak{p}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörende Primstelle, mit $K_\mathfrak{p}$ bzw. $R_\mathfrak{p}$ die Komplettierungen von K bzw. R an $\mathfrak{p}$, mit $\pi_\mathfrak{p}$ eine Uniformisierende des maximalen Ideals und mit $v_\mathfrak{p}$ die normierte Bewertung auf $K_\mathfrak{p}$.

Kapitel 1

Quaternionenalgebren

Dieses einführende Kapitel soll die elementaren Eigenschaften von Quaternionenalgebren bereitstellen, die im Verlauf der Arbeit benötigt werden.

Von einigen wenigen Ergebnisse abgesehen, die an späterer Stelle im Kapitel wieder aufgegriffen werden, sind die Abschnitte dieses Kapitels thematisch weitgehend unabhängig voneinander. Nachdem Definitionen und allgemeine Grundlagen eingeführt sind, wollen wir uns in Abschnitt 1.2 der Problematik der Ganzheit widmen. Im Abschnitt 1.3 werden einige technische Lemmata hergeleitet, die für die Betrachtung maximaler Teilkörper in einer Quaternionenalgebra hilfreich sind. Und schließlich beweisen wir im letzten Abschnitt des Kapitels die Endlichkeit der Diskriminante einer Quaternionenalgebra. Dafür wird ein Exkurs in die Theorie zentraleinfacher Algebren nötig werden.

1.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Ist im folgenden von einem Körper die Rede, so soll darunter stets ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ verstanden sein.

Es soll zunächst an den Begriff einer Quaternionenalgebra erinnert werden. Wir folgen dabei im wesentlichen dem Buch [16, § 57] von O. T. O'Meara.

Definition 1.1.1. Eine *Quaternionenalgebra* A über einem Körper K ist ein 4-dimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis der Form $\{1, i, j, k\}$, auf dem eine Multiplikation definiert ist, die folgenden Regeln genügt:

$$i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad ij = -ji = k \qquad \text{für zwei geeignete Elemente } \alpha, \beta \in K^*. \tag{1.1}$$

Die Angabe der Parameter α und β ist ausreichend, um die Quaternionenalgebra über K bis auf Isomorphie zu beschreiben, da durch (1.1) die Verknüpfungstafel der Multiplikation schon vollständig bestimmt ist. Wenn es auf die speziellen Werte von α und β ankommt, wollen wir daher die obige Quaternionenalgebra A mit

$$A = \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)$$

bezeichnen. Umgekehrt ist es aber auch klar, daß α und β von der Wahl der Basis von A abhängen und somit für eine gegebene Quaternionenalgebra nicht in eindeutiger Weise bestimmt sind. Unter anderem gelten die für uns relevanten Isomorphismen:

Lemma 1.1.2. *Es seien K ein Körper und $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in K^*$.*

(i) $\left(\frac{1,\alpha}{K}\right) \cong \left(\frac{1,-1}{K}\right)$,

(ii) $\left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right) \cong \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right) \cong \left(\frac{\alpha\lambda^2,\beta\mu^2}{K}\right)$.

Beweis. Der Beweis ist bei O. T. O'Meara [16, 57:10] nachzulesen. □

Definition 1.1.3. Sei $A = \left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$ eine Quaternionenalgebra, und sei

$$x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \qquad \text{mit } x_0, \ldots, x_3 \in K \tag{1.2}$$

ein beliebiges Element aus A. Man definiert

$$\begin{aligned} \bar{x} &\quad := x_0 1 - x_1 i - x_2 j - x_3 k, \\ \operatorname{tr}(x) := \; x + \bar{x} &\quad = 2x_0, \\ \operatorname{nrd}(x) := \; x\bar{x} &\quad = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2. \end{aligned}$$

$\bar{x}$ heißt das *Konjugierte* von x, $\operatorname{tr}(x)$ heißt die *(reduzierte) Spur* von x, und $\operatorname{nrd}(x)$ heißt die *(reduzierte) Norm* von x.

Bemerkung. Die definierten Begriffe $\bar{x}, \operatorname{tr}(x)$ und $\operatorname{nrd}(x)$ sind nur scheinbar von der Wahl der Basis $\mathcal{B} := \{1, i, j, k\}$ abhängig. Sei nämlich eine weitere Basis $\mathcal{B}' := \{1, i', j', k'\}$ von A gegeben, versehen mit den Relationen

$$(i')^2 = \alpha' \in K^*, \qquad (j')^2 = \beta' \in K^* \qquad \text{und} \qquad i'j' = -j'i' = k',$$

und sei $B = (b_{ij})$ die Darstellungsmatrix von $\mathcal{B}'$ bezüglich $\mathcal{B}$. Hat dann das Element x aus (1.2) bezüglich $\mathcal{B}'$ die Darstellung $x = y_0 1 + y_1 i' + y_2 j' + y_3 k'$, so gilt für die Koeffizientenvektoren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Der Basisvektor i' hat bezüglich $\mathcal{B}$ die Gestalt

$$i' = b_{12} 1 + b_{22} i + b_{32} j + b_{42} k,$$

und eine einfache Rechnung ergibt

$$(i')^2 = 2b_{12} i' - (b_{12}^2 - \alpha b_{22}^2 - \beta b_{32}^2 + \alpha\beta b_{42}^2) 1.$$

Nach Voraussetzung ist aber $(i')^2 = \alpha' \in K^*$, woraus folgt, daß $b_{12} = 0$ sein muß. Wenn wir entsprechende Rechnungen für die Basisvektoren j' und k' durchführen, erhalten wir auch $b_{13} = b_{14} = 0$. Damit hat B die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad \text{insbesondere ist } x_0 = y_0.$$

Also ist zunächst einmal $\mathrm{tr}(x)$ nicht von der Wahl der Basis abhängig. Da die Beziehung $\bar{x} = \mathrm{tr}(x) - x$ gilt, folgt die Basisunabhängigkeit von $\bar{x}$ und damit auch unmittelbar von $\mathrm{nrd}(x) = x\bar{x}$. □

Lemma 1.1.4. *Sei A eine Quaternionenalgebra über dem Körper K. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Die Abbildung $\mathrm{tr} : A \to K$ *ist K-linear, und es gilt* $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ *für alle $x, y \in A$.*

(ii) Die Abbildung $\mathrm{nrd} : A \to K$ *ist multiplikativ, also* $\mathrm{nrd}(xy) = \mathrm{nrd}(x)\mathrm{nrd}(y)$ *für alle $x, y \in A$. Außerdem gilt* $\mathrm{nrd}(a) = a^2$ *für alle $a \in K$.*

(iii) Ein Element $x \in A$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{nrd}(x)$ *in K invertierbar ist, und in diesem Fall ist das Inverse gegeben durch* $x^{-1} = (\mathrm{nrd}(x))^{-1}\bar{x}$.

Beweis. Alle drei Teile folgen direkt bzw. mittels elementarer Rechnung aus den Definitionen von Spur und Norm. □

Folgendes Lemma ist offensichtlich, verdient es aber, erwähnt zu werden.

Lemma 1.1.5. *Sei A eine Quaternionenalgebra über dem Körper K, und sei $x \in A \setminus K$. Dann ist das Minimalpolynom von x gegeben durch*

$$\mu_x(X) = X^2 - \mathrm{tr}(x)X + \mathrm{nrd}(x).$$

□

Bemerkung. Man beachte, daß — anders als bei der Theorie der Körpererweiterungen — in unserem Fall das Minimalpolynom μ_x über dem Körper K nicht irreduzibel zu sein braucht. □

Die zwei Standardbeispiele von Quaternionenalgebren sind aus der linearen Algebra hinlänglich bekannt, sollen aber trotzdem noch einmal erwähnt werden, da sie im weiteren Verlauf der Arbeit eine tragende Rolle spielen werden.

Beispiel 1.1.6. Das erste Beispiel einer Quaternionenalgebra ist die Algebra der *Hamiltonschen Quaternionen.* In unserer Notation handelt es sich dabei um

$$\mathbb{H} := \left(\frac{-1, -1}{\mathbb{R}}\right).$$

Für die Norm eines Elementes $x \neq 0$ der Gestalt (1.2) gilt

$$\mathrm{nrd}(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0,$$

da alle $x_i \in \mathbb{R}$ sind. Insbesondere ist damit jedes $x \neq 0$ invertierbar und $\mathbb{H}$ eine Divisionsalgebra.

Beispiel 1.1.7. Man betrachte den Matrizenring $M_2(K)$ und nehme die Identifizierungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = j, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = k$$

vor. Dann gilt offenbar $i^2 = 1$, $j^2 = -1$, $ij = -ji = k$, also haben wir einen Algebreniso-morphismus

$$\left(\frac{1,-1}{K}\right) \cong M_2(K).$$

Insbesondere liegt keine Divisionsalgebra vor. Ein beliebiges Element $x \in M_2(K)$ hat bezüglich obiger Basis die Darstellung

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2}1 + \frac{b+c}{2}i + \frac{-b+c}{2}j + \frac{a-d}{2}k,$$

woraus direkt die Beziehungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \\ \mathrm{tr}(x) &= a+d \\ \text{und} \quad \mathrm{nrd}(x) &= ad-bc \end{aligned}$$

folgen. Mit anderen Worten: Im Falle der (2×2)-Matrizen entsprechen $\bar{x}, \mathrm{tr}(x)$ und $\mathrm{nrd}(x)$ erwartungsgemäß der adjungierten Matrix, der gewöhnlichen Spur bzw. der Determinante von x.

Bemerkung. Bis auf Isomorphie gibt es über den reellen Zahlen keine weiteren Quaternionenalgebren als die in den beiden vorangegangenen Beispielen beschriebenen. Denn für die Parameter α und β einer Quaternionenalgebra A über $\mathbb{R}$ brauchen nach Lemma (1.1.2) (*ii*) jeweils nur Werte modulo $\mathbb{R}^{*2}$ betrachtet zu werden, also $\alpha, \beta \in \{\pm 1\}$. Sind beide Parameter -1, so ist $A \cong \mathbb{H}$, andernfalls ergibt sich wieder nach Lemma (1.1.2), diesmal Teil (*i*), die Isomorphie $A \cong M_2(\mathbb{R})$.

Insbesondere ist $\mathbb{H}$ bis auf Isomorphie die einzige Quaternionenalgebra über $\mathbb{R}$, die eine Divisionsalgebra ist. □

Satz 1.1.8. *Sei K ein Körper und A eine Quaternionenalgebra über K. Dann ist A entweder eine Divisionsalgebra oder isomorph zu $M_2(K)$. Genauer gilt*

$$\begin{aligned} A = \left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right) \cong M_2(K) \quad &\Longleftrightarrow \quad A \textit{ ist keine Divisionsalgebra} \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \in N_K^L(L) \quad \textit{mit } L = K(\sqrt{\beta}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \beta \in N_K^L(L) \quad \textit{mit } L = K(\sqrt{\alpha}). \end{aligned}$$

Beweis. Für Quaternionenalgebren über den reellen Zahlen haben wir diese Aussage bereits in obiger Bemerkung erläutert. Einen Beweis für allgemeine Körper K findet man wieder bei O. T. O'Meara [16, 57:9]. □

Sei nun K ein algebraischer Zahlkörper mit Ganzheitsring R und einer archimedischen oder nichtarchimedischen Primstelle $\mathfrak{p}$.

Es wird nötig werden, die Komplettierung $A_\mathfrak{p}$ der Quaternionenalgebra $A = \left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$ zu untersuchen, darunter verstehen wir die Konstantenerweiterung von A mit dem lokalen Körper $K_\mathfrak{p}$, also

$$A_\mathfrak{p} := K_\mathfrak{p} \otimes_K A = \left(\frac{\alpha,\beta}{K_\mathfrak{p}}\right).$$

Da die Relationen (1.1), die die Algebra definieren, über $K_{\mathfrak{p}}$ erhalten bleiben, ist sicherlich $A_{\mathfrak{p}}$ wieder eine Quaternionenalgebra über $K_{\mathfrak{p}}$.

Nach Satz (1.1.8) kann $A_{\mathfrak{p}}$ selbst entweder eine Divisionsalgebra oder isomorph zu $M_2(K_{\mathfrak{p}})$ sein.

Definition 1.1.9. Wir sagen, daß die Quaternionenalgebra A an der (archimedischen oder nichtarchimedischen) Primstelle $\mathfrak{p}$

- *zerfällt*, falls $A_{\mathfrak{p}} \cong M_2(K_{\mathfrak{p}})$ ist,
- *verzweigt ist*, falls $A_{\mathfrak{p}}$ eine Divisionsalgebra ist.

Daß man A an $\mathfrak{p}$ „verzweigt" nennt, wenn $A_{\mathfrak{p}}$ eine Divisionsalgebra ist, wird durch das folgende Lemma gerechtfertigt.

Lemma 1.1.10. *Sei* $A = \left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$ *eine Quaternionenalgebra, und sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* K*, so daß* $A_{\mathfrak{p}}$ *eine Divisionsalgebra ist.*

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $A_{\mathfrak{p}} \cong \left(\dfrac{u\pi_{\mathfrak{p}}, v\pi_{\mathfrak{p}}}{K_{\mathfrak{p}}}\right)$ *mit geeigneten* $u, v \in R_{\mathfrak{p}}^*$ *und einer Uniformisierenden* $\pi_{\mathfrak{p}}$ *von* $\mathfrak{p}$.

(ii) Die Abbildung $w_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $x \mapsto v_{\mathfrak{p}}(\mathrm{nrd}(x))$ *ist eine diskrete Bewertung auf* $A_{\mathfrak{p}}$ *mit Bewertungsring* $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} := \{x \in A_{\mathfrak{p}} \mid \mathrm{nrd}(x) \in R_{\mathfrak{p}}\}$.

(iii) Das maximale Ideal $\mathfrak{p}$ *von* $K_{\mathfrak{p}}$ *ist in* $A_{\mathfrak{p}}$ *verzweigt vom Verzweigungsgrad* 2.

Beweis. Nach Lemma (1.1.2) können wir annehmen, daß α und β modulo K^{*2} reduziert sind, also sei ohne Einschränkung

$$\alpha = u\pi_{\mathfrak{p}}^k, \quad \beta = v\pi_{\mathfrak{p}}^l \qquad \text{mit } u, v \in R_{\mathfrak{p}}^* \text{ und } k, l \in \{0, 1\}. \tag{1.3}$$

Wir wollen Satz (1.1.8) anwenden und betrachten daher

$$L_{\mathfrak{P}} := K_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\beta}).$$

Die Erweiterung $L_{\mathfrak{P}} \,|\, K_{\mathfrak{p}}$ ist vom Grad 2, denn sonst wäre $\beta \in K_{\mathfrak{p}}^2$, und $A_{\mathfrak{p}}$ müßte nach Lemma (1.1.2) und Beispiel (1.1.7) isomorph zur Matrixalgebra $M_2(K_{\mathfrak{p}})$ sein. Es seien $\Pi_{\mathfrak{p}}$ eine Uniformisierende des maximalen Ideals $\mathfrak{P}$ von $L_{\mathfrak{P}}$, e der Verzweigungsindex und f der Trägheitsgrad von $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$.

$$\begin{tikzcd} L_{\mathfrak{P}} \arrow[d, dash, "2"'] & \supseteq & \mathfrak{P}^e \arrow[d, dash] & = & (\Pi_{\mathfrak{p}})^e \\ K_{\mathfrak{p}} & \supseteq & \mathfrak{p} & = & (\pi_{\mathfrak{p}}) \end{tikzcd}$$

Sei $x = w\Pi_{\mathfrak{p}}^m \in L_{\mathfrak{P}}$ mit $w \in R_{L_{\mathfrak{P}}}^*$, $m \in \mathbb{Z}$. Falls der Verzweigungsindex $e = 1$ ist, ist $f = 2$ und daher $\mathrm{nrd}(\Pi_{\mathfrak{p}}) = \pi_{\mathfrak{p}}^2$. Für x folgt, daß $\mathrm{nrd}(x) = \mathrm{nrd}(w)\pi_{\mathfrak{p}}^{2m}$ ist. Ist hingegen $e = 2$, so folgt wegen $f = 1$, daß $\mathrm{nrd}(\Pi_{\mathfrak{p}}) = \pi_{\mathfrak{p}}$ und somit $\mathrm{nrd}(x) = \mathrm{nrd}(w)\pi_{\mathfrak{p}}^m$ ist.

Zusammenfassend haben wir $N^{L_{\mathfrak{P}}}_{K_{\mathfrak{p}}}(L_{\mathfrak{P}}) = \mathfrak{p}^2$ im Fall, daß $\mathfrak{p}$ in $L_{\mathfrak{P}}$ unverzweigt ist, und $N^{L_{\mathfrak{P}}}_{K_{\mathfrak{p}}}(L_{\mathfrak{P}}) = \mathfrak{p}$ andernfalls.

Nach Voraussetzung ist $A_{\mathfrak{p}}$ eine Divisionsalgebra, und wegen Satz (1.1.8) folgt, daß

$$\alpha \notin N^{L_{\mathfrak{P}}}_{K_{\mathfrak{p}}}(L_{\mathfrak{P}})$$

ist. Dies ist für α in der Form (1.3) aber genau dann erfüllt, wenn $\alpha = u\pi_{\mathfrak{p}}$ und $e = 1$ gilt.

Aus Symmetriegründen können wir für β genauso schlußfolgern und erhalten (i).

Daß $w_{\mathfrak{p}}$ eine diskrete Bewertung definiert, rechnet man unter Beachtung der Tatsache, daß $A_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ist, direkt nach. Der Bewertungsring ist offensichtlich $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$. Er hat ein maximales Ideal, und dieses wird von einem Element $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}}$ erzeugt, welches minimale Bewertung $\neq 0$ hat. Ein solches Element ist beispielsweise das Basiselement i, denn es gilt

$$w_{\mathfrak{p}}(i) = v_{\mathfrak{p}}(\mathrm{nrd}(i)) = v_{\mathfrak{p}}(-i^2) = v_{\mathfrak{p}}(-\alpha) = 1,$$

da wir oben gezeigt hatten, daß $\alpha = u\pi_{\mathfrak{p}}$ ist. Mit $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}} = i$ gilt also für das maximale Ideal $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$

$$(\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}})^2 = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}\alpha = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}},$$

also ist $\mathfrak{p}$ in $A_{\mathfrak{p}}$ verzweigt vom Verzweigungsgrad 2. □

Satz und Definition 1.1.11. *Die Zahl der nichtarchimedischen Primstellen, für die $A_{\mathfrak{p}}$ verzweigt ist, ist endlich. Das Produkt der zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}$ ist somit ein ganzes Ideal von K. Es heißt die* Diskriminante *von A und wird mit D_1 bezeichnet.*

Beweis. Den Beweis dieses Satzes verschieben wir auf Abschnitt 1.4. □

1.2 Ganzheit

Im ganzen Abschnitt bezeichne K einen algebraischen Zahlkörper, R seinen Ganzheitsring und A eine Quaternionenalgebra über K.

Wenn man die Vektorraumstruktur auf der Quaternionenalgebra A außer acht läßt, so kann man natürlich auf die Erweiterung $A \supseteq R$ die Theorie von Ringerweiterungen anwenden.

Es ist bekannt, daß im Falle von beliebigen kommutativen Ringen S, T mit $T \supseteq S$ die Menge der *ganzen* Elemente aus T, also derjenigen, die Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in S sind, einen Unterring von T bilden. Um diesen Sachverhalt zu beweisen, benutzt man gerne die Tatsache, daß endlich viele Elemente $t_1, \ldots, t_r \in T$ genau dann sämtlich ganz über S sind, wenn der Ring $S[t_1, \ldots, t_r]$ als S-Modul endlich erzeugt ist (siehe z. B. J. Neukirch [14, § I.2, Satz (2.2)]).

In der Situation, mit der wir uns beschäftigen, entstehen nun Unannehmlichkeiten dadurch, daß zwar R als Ganzheitsring eines Körpers kommutativ ist, nicht aber A. Wie wir gleich sehen werden, hat dies bereits zur Folge, daß die ganzen Elemente aus A keinen Ring mehr bilden, wodurch sich viele weitere Überlegungen verkomplizieren.

Wir werden in diesem Abschnitt einige wichtige Sätze der kommutativen Ringtheorie so weit wie möglich auf unsere Situation übertragen, dabei folgen wir weitestgehend dem bereits oben zitierten Buch von J. Neukirch.

Vorab stellen wir in den folgenden Lemmata die hier benötigten Aussagen aus der Theorie der Ringe und insbesondere der Ganzheitsringe von Zahlkörpern bereit.

Definition und Lemma 1.2.1. Sei S ein beliebiger Ring mit Einselement.

(i) Ein S-Modul M ist genau dann noethersch, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

  (a) Jeder Untermodul von M ist ein endlich erzeugter S-Modul.

  (b) Jede echt aufsteigende Kette von S-Untermoduln von M ist endlich.

(ii) Der Ring S ist genau dann noethersch, wenn er als Modul über sich selbst noethersch ist.

(iii) Ist der Ring S noethersch und der S-Modul M endlich erzeugt, so ist M noethersch.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind die für uns relevanten Formulierungen der Definition des Begriffs *noethersch* und in jedem Buch zu finden, daß sich mit Ringtheorie befaßt, z. B. bei S. Lang [11, Kapitel X, § 1]. Dort kann man auch den Beweis zu Teil (iii) nachlesen. □

Lemma 1.2.2. *Der Ganzheitsring R eines algebraischen Zahlkörpers ist noethersch.*

Beweis. Dieser bekannte Sachverhalt wird z. B. bei J. Neukirch [14, § I.3, Theorem (3.1)] bewiesen. □

Neben der Tatsache, daß R als Ganzheitsring von K noethersch ist, beachte man außerdem den wichtigen Umstand, daß R ein kommutativer Ring ist, der zudem im Zentrum von A enthalten ist. Somit sind auch alle Ringe der Form $R[x]$ für ein einzelnes $x \in A$ immer noch kommutativ.

Lemma und Definition 1.2.3. Die auf der Quaternionenalgebra A durch

$$A \times A \to K, \qquad (x, y) \mapsto \mathrm{tr}(xy)$$

definierte Abbildung ist eine symmetrische nichtausgeartete K-Bilinearform auf A. Sie heißt die *Spurform* auf A.

Beweis. Die Bilinearität und die Symmetrie folgen aus Lemma (1.1.4). Bezüglich der Basis $\{1, i, j, k\}$, für die die Relationen (1.1) gelten, hat die Bilinearform die Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha\beta \end{pmatrix},$$

die wegen $\alpha, \beta \in K^*$ und der Generalvoraussetzung $\mathrm{char}(K) \neq 2$ vollen Rang hat. Also ist die Spurform nichtausgeartet. □

Es kann nun wie gewohnt der Begriff der Ganzheit eingeführt werden. Für die Quaternionenalgebra A ergibt sich dabei ein einfaches Kriterium, mit dessen Hilfe die Frage nach der Ganzheit eines Elementes über R direkt zu entscheiden ist.

Korollar 1.2.4. *Für ein Element $x \in A$ gilt:*

$$x \text{ ist ganz über } R \iff \operatorname{tr}(x), \operatorname{nrd}(x) \in R.$$

Beweis. Die Behauptung ist klar nach Lemma (1.1.5). □

Lemma 1.2.5. *Sei S ein Ring mit $R \subseteq S \subseteq A$. Der Ring S sei als R-Modul endlich erzeugt. Dann ist jedes Element aus S ganz über R.*

Beweis. Es ist S von der Form $S = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle_R$ mit $x_i \in S$. Für ein beliebiges $s \in S$ betrachten wir die Elemente sx_i. Diese liegen wieder in S, daher gibt es $\lambda_{ij} \in R$ mit

$$sx_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} x_j.$$

Mit den Bezeichnungen $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j},\ M := (sI_m - \Lambda)$ und $x = (x_1, \ldots, x_m)^t$ gilt also

$$Mx = 0.$$

Falls $\det(M) \neq 0$ ist, gilt wegen der Kommutativität von $R[s]$ für die Matrix M wie gewohnt die Beziehung $\tilde{M}M = \det(M)I_m$. Dabei ist $\tilde{M}$ die zu M adjungierte Matrix. Wegen $Mx = 0$ haben wir also in jedem Fall

$$\det(M)x_i = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Da $1 \in S$ liegt, also etwa die Gestalt $1 = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$ mit $\alpha_i \in R$ hat, können wir direkt schließen, daß

$$\det(M) = \det(M) \cdot 1 = \alpha_1 \det(M)x_1 + \ldots + \alpha_m \det(M)x_m = 0$$

sein muß. Damit ist $\det(XI_m - \Lambda) \in R[X]$ ein normiertes Polynom mit s als Nullstelle, also haben wir die Ganzheit von s verifiziert. □

Lemma 1.2.6.

$$x \in A \text{ ist ganz über } R \iff R[x] \text{ ist als } R\text{-Modul endlich erzeugt}$$

Beweis. Die Implikation von rechts nach links haben wir gerade in Lemma (1.2.5) bewiesen. Der Rest des Beweises geht ganz genau wie im kommutativen Fall:

Es sei $x \in A$ ganz über R und $f(X) \in R[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad m mit $f(x) = 0$. Weil f normiert ist, können wir jedes $g(X) \in R[X]$ wie gewohnt in der Form

$$g(X) = q(X)f(X) + r(X) \qquad \text{mit } q(X), r(X) \in R[X],\ \deg(r) < \deg(f) \text{ oder } r = 0$$

schreiben. Einsetzen von x liefert sofort

$$g(x) = r(x) \in \langle 1, x, \ldots, x^{m-1} \rangle_R.$$

Damit ist $R[x] = \langle 1, x, \ldots, x^{m-1} \rangle_R$, also als R-Modul endlich erzeugt. □

Lemma 1.2.7. *Sei S ein Ring mit $R \subseteq S \subseteq A$, so daß jedes Element von S über R ganz ist und außerdem $KS = A$ gilt. Dann ist S als R-Modul endlich erzeugt.*

Beweis. Betrachten wir eine K-Basis $(a_1, \ldots, a_4)$ von A. Wegen $KS = A$ kann nach eventuellem Hochmultiplizieren von Nennern angenommen werden, daß die Basiselemente a_i bereits in S liegen. Sei nun $x \in S$ beliebig, $x = \sum_{i=1}^4 \lambda_i a_i$ mit $\lambda_i \in K$. Für $j = 1, \ldots, 4$ ist

$$xa_j = \sum_{i=1}^4 \lambda_i a_i a_j, \qquad \text{also } \operatorname{tr}(xa_j) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \operatorname{tr}(a_i a_j).$$

Diese Spuren liegen nach Korollar (1.2.4) in R, da $xa_j \in S$ ganz ist. Sei $M := (\operatorname{tr}(a_i a_j))_{i,j}$ die zu der Spurform gehörende Matrix, so ist also

$$M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tr}(a_1 x) \\ \vdots \\ \operatorname{tr}(a_4 x) \end{pmatrix} \in R^4.$$

Da die Spurform nach Lemma (1.2.3) nichtausgeartet ist, folgt nach der Cramerschen Regel

$$\lambda_i = \frac{\det M_i}{\det M} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, 4,$$

wobei M_i diejenige Matrix bezeichne, die aus M entsteht, wenn man die i-te Spalte durch den Vektor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)^t$ ersetzt. Insgesamt haben wir also, daß x in dem R-Modul

$$\left\langle \frac{a_1}{\det M}, \ldots, \frac{a_4}{\det M} \right\rangle_R$$

liegt, und da $\det M$ nicht von x abhängt, ist also ganz S in diesem Modul enthalten.

Mit dem zu Beginn dieses Abschnitts zitierten Lemma (1.2.1) können wir nun schließen, daß $\left\langle \frac{a_1}{\det M}, \ldots, \frac{a_4}{\det M} \right\rangle_R$ als endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R, selbst noethersch ist. Daher ist jeder seiner Untermoduln, insbesondere also S, als R-Modul ebenfalls endlich erzeugt. □

Im kommutativen Fall kann die Aussage von Lemma (1.2.6) induktiv auf eine endliche Anzahl von Elementen $x_1, \ldots, x_r$ ausgeweitet werden. Daraus folgt direkt, daß mit zwei ganzen Elementen x_1 und x_2 auch deren Summe und Produkt, die beide in $R[x_1, x_2]$ liegen, ganz sind. Mit anderen Worten: Die ganzen Elemente bilden einen Ring.

Im nichtkommutativen Fall hingegen kann der entscheidende Induktionsschritt nicht vorgenommen werden. Im Beweis des Lemmas wurde nämlich wesentlich von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß der Ring R, da er im Zentrum von A liegt, mit dem Element x kommutiert. Um von $R[x_1]$ auf $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$ schließen zu können, bräuchten wir entsprechend die Aussage, daß $R[x_1]$ mit x_2 vertauscht. Dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall.

Für Quaternionenalgebren gilt daher im allgemeinen nicht, daß die Menge der ganzen Elemente unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist, und Gegenbeispiele sind schnell bei der Hand:

In Beispiel (1.1.7) haben wir gesehen, daß $M_2(\mathbb{Q})$ eine Quaternionenalgebra ist, und nach Korollar (1.2.4) sind offensichtlich die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ganz, aber weder ihre Summe noch ihr Produkt.

Statt die Menge aller ganzen Elemente von A zu betrachten, beschränkt man sich daher auf die Untersuchung von Ordnungen. Ähnlich wie im Zahlkörperfall sind diese definiert als gewisse Unterringe der Menge aller ganzen Elemente. Ordnungen werden Hauptgegenstand unserer Betrachtungen in Kapitel 2 sein.

1.3 Positiv definite Quaternionenalgebren und ihre quadratischen Zwischenkörper

Bisher haben wir bei unseren Betrachtungen beliebige Quaternionenalgebren zugelassen. Von jetzt an werden wir uns auf solche Algebren beschränken, für die wir das Verhalten der archimedischen Primstellen im Sinne der folgenden Definition kennen.

Der Körper K sei dabei immer ein algebraischer Zahlkörper.

Definition 1.3.1. Eine Quaternionenalgebra A heißt *(positiv) definit*, wenn $A_{\mathfrak{p}}$ für alle archimedischen Stellen $\mathfrak{p}$ von K eine Divisionsalgebra ist.

Die Eigenschaft, positiv definit zu sein, ist — wie wir gleich sehen werden — nicht nur eine Einschränkung an A selbst, sondern zieht auch Einschränkungen an den zugrundeliegenden Zahlkörper K mit sich.

Wir beweisen zunächst das folgende allgemeine Lemma.

Lemma 1.3.2. *Für eine endlichdimensionale Divisionsalgebra D über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F gilt $D = F$.*

Beweis. Sei $[D : F] < \infty$ und $a \in D$ beliebig. Dann erzeugt a eine kommutative Algebra $F[a]$. Diese ist als Unteralgebra von D selbst nullteilerfrei und von endlichem Grad über F. Das heißt, $F[a]$ ist sogar eine algebraische Körpererweiterung von F, da aber F bereits als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt war, folgt $F[a] = F$ und somit $a \in F$. □

Korollar 1.3.3. *Sei A eine Quaternionenalgebra über einem algebraischen Zahlkörper K. Dann gilt*

$$A \text{ ist positiv definit} \quad \Rightarrow \quad K \text{ ist total reell.}$$

Beweis. Wäre K nicht total reell, so gäbe es eine komplexe Stelle $\mathfrak{p}$. Die Lokalisierung $A_{\mathfrak{p}}$ der positiv definiten Algebra A wäre damit isomorph zu einer 4-dimensionalen Divisionsalgebra über $\mathbb{C}$. Dies ist nach Lemma (1.3.2) nicht möglich. □

Da es also nur über total reellen Zahlkörpern überhaupt positiv definite Quaternionenalgebren gibt, genügt es uns, wenn wir unsere Betrachtungen im folgenden auf genau solche Zahlkörper beschränken.

Lemma 1.3.4. *Seien K ein total reeller algebraischer Zahlkörper und $A = \left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$ eine Quaternionenalgebra über K. Es ist A genau dann positiv definit, wenn α und β total negativ sind.*

Beweis. Seien $\infty_1, \dots, \infty_n$ die archimedischen Stellen von K. Da K als total reell vorausgesetzt ist, ist $K_{\infty_i} \cong \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Diese n Isomorphismen werden genau durch die Fortsetzungen der Einbettungen $\sigma_1, \dots, \sigma_n : K \to \mathbb{R}$ auf K_{∞_i} beschrieben. Diese Fortsetzungen seien ebenfalls mit σ_i bezeichnet. Damit können wir einen Algebrenisomorphismus angeben, der die Komplettierung A_{∞_i} von A als Quaternionenalgebra über $\mathbb{R}$ interpretiert:

$$\begin{array}{ccc} \left(\dfrac{\alpha,\beta}{K_{\infty_i}}\right) & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & \left(\dfrac{\sigma_i(\alpha),\sigma_i(\beta)}{\mathbb{R}}\right) \\ x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k & \mapsto & \sigma_i(x_0)1 + \sigma_i(x_1)i + \sigma_i(x_2)j + \sigma_i(x_3)k \end{array}$$

mit $x_j \in K_{\infty_i}$ für alle $j = 0, \dots, 3$.

Per definitionem ist A positiv definit, wenn A_{∞_i} für alle i eine Divisionsalgebra ist, und nach der Bemerkung zu Beispiel (1.1.6) ist dies genau dann der Fall, wenn $\left(\frac{\sigma_i(\alpha),\sigma_i(\beta)}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathbb{H}$ gilt; $\mathbb{H}$ bezeichne wieder die Hamiltonschen Quaternionen. In derselben Bemerkung hatten wir uns bereits überlegt, daß es über $\mathbb{R}$ nur auf das Vorzeichen der Parameter $\sigma_i(\alpha)$ und $\sigma_i(\beta)$ ankommt, und die gewünschte Isomorphie zu den Hamiltonschen Quaternionen ist genau dann gegeben, wenn

$$\sigma_i(\alpha) < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_i(\beta) < 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \tag{1.4}$$

gilt, also genau dann, wenn α und β total negativ sind. □

Bemerkung. Die Bezeichnung „positiv definit“ rührt daher, daß in einer solchen Quaternionenalgebra die Normen sämtlicher Elemente $\neq 0$ unter jeder K-Einbettung $K \to \mathbb{R}$ auf positive reelle Zahlen abgebildet werden. Da für ein $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ die Norm durch $\mathrm{nrd}(x) = x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2$ gegeben ist, ist dieser Zusammenhang nach (1.4) aus dem gerade gezeigten Lemma sofort ersichtlich. □

Wenn man die Eigenschaften der Quaternionenalgebra A studieren möchte, ist es hilfreich, auch die in ihr enthaltenenen quadratischen Körpererweiterungen von K zu untersuchen.

Lemma 1.3.5. *Sei A positiv definit. Für jedes $a \in A^*$, das nicht in K liegt, ist $L := K(a)$ ein total imaginärer Zahlkörper.*

Beweis. Gezeigt werden muß im Grunde nur, daß $L := K(a)$ überhaupt wohldefiniert, also wieder ein Körper ist. Die Tatsache, daß a selbst kein Nullteiler ist, reicht hierfür allein nicht aus, da sie nicht gewährleistet, daß z. B. Elemente der Form $a + x$ mit $x \in K$ ebenfalls invertierbar sind.

Betrachten wir das Minimalpolynom $\mu_a(X) = X^2 - \mathrm{tr}(a)X + \mathrm{nrd}(a) \in K[X]$ und eine Einbettung $\sigma : K \to \mathbb{R}$. Schreiben wir a wie üblich in der Form $a = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, so gilt nun unter Berücksichtigung von Lemma (1.3.4)

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{tr}(a))^2 - 4\sigma(\mathrm{nrd}(a)) &= \sigma(\mathrm{tr}(a)^2 - 4\mathrm{nrd}(a)) \\
&= \sigma(4\alpha a_1^2 + 4\beta a_2^2 - 4\alpha\beta a_3^2) \qquad (1.5) \\
&= 4\underbrace{\sigma(\alpha)}_{<0}\sigma(a_1)^2 + 4\underbrace{\sigma(\beta)}_{<0}\sigma(a_2)^2 - 4\underbrace{\sigma(\alpha)}_{<0}\underbrace{\sigma(\beta)}_{<0}\sigma(a_3)^2 < 0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zum einen, daß $\mu_a(X)$ über K irreduzibel ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so gäbe es $b_1, b_2 \in K$ mit $\mu_a(X) = (X - b_1)(X - b_2)$, und für die Einbettung σ würde wegen

$$(X - \sigma(b_1))(X - \sigma(b_2)) = \sigma(\mu_a(X)) = X^2 - \sigma(\mathrm{tr}(a))X + \sigma(\mathrm{nrd}(a)) \qquad \text{mit } \sigma(b_1), \sigma(b_2) \in \mathbb{R}$$

folgen, daß $\sigma(\mu_a(X))$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfiele. Damit wäre die Diskriminante $\sigma(\mathrm{tr}(a))^2 - 4\sigma(\mathrm{nrd}(a))$ nichtnegativ, und dies ist offensichtlich ein Widerspruch zu (1.5). Es muß wie behauptet $\mu_a(X)$ irreduzibel gewesen sein, und damit ist $K(a) \cong K[X]/(\mu_a(X))$ ein Körper.

Andererseits entnimmt man obiger Rechnung (1.5) sofort, daß $K(a) \mid K$ eine imaginärquadratische Erweiterung sein muß, so daß $K(a)$ wie behauptet ein total imaginärer Zahlkörper ist. □

Wir fixieren ein Element $a \in A^*$, $a \notin K$ und den von ihm erzeugten imaginärquadratischen Erweiterungskörper von K.

Lemma 1.3.6. *Sei $\sigma : K(a) \to F$ eine Einbettung von $K(a)$ in einen algebraisch abgeschlossenen Körper F. Dann gilt:*

(i) $\sigma(K(a)) \mid \sigma(K)$ ist galoissch mit Galoisgruppe $G = \{\mathrm{id}, \tau\}$.

(ii) Für alle $x \in K(a)$ ist $\sigma(\bar{x}) = \tau(\sigma(x))$.

Beweis. Der erste Teil ist klar, da die Erweiterung Grad 2 hat.

Für den zweiten Teil betrachten wir zunächst ein $x \in K$. Es gilt dann

$$\sigma^{-1}\tau(\sigma(x)) = \sigma^{-1}\sigma(x) = x = \bar{x},$$

da τ ein $\sigma(K)$-Automorphismus ist. Die Behauptung ist also für diesen Fall gezeigt.

Sei nun $x \notin K$. Damit ist auch $\sigma(x) \notin \sigma(K)$, und das Minimalpolynom von $\sigma(x)$ über $\sigma(K)$ ist gegeben durch

$$X^2 - (\sigma(x) + \tau\sigma(x))X + \sigma(x)\tau\sigma(x).$$

Das Minimalpolynom von x über K erhält man durch Anwenden von σ^{-1}:

$$X^2 - (x + \sigma^{-1}\tau\sigma(x))X + x(\sigma^{-1}\tau\sigma(x)).$$

Wir wissen aber bereits, daß das Minimalpolynom von x über K

$$X^2 - (x + \bar{x})X + x\bar{x}$$

ist, und daraus schließen wir, daß $\bar{x} = \sigma^{-1}\tau\sigma(x)$ gelten muß. □

Korollar 1.3.7. *Sei wie oben die Körpererweiterung $K(a) \mid K$ gegeben, und sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K. Ist σ eine K-Einbettung $\sigma : K(a) \to \bar{K}$, so gilt für alle $x \in K(a)$*

(i)
$$N_K^{K(a)}(x) = N_K^{\sigma(K(a))}(\sigma(x)) = \mathrm{nrd}(x),$$

(ii)
$$\mathrm{Tr}_K^{K(a)}(x) = \mathrm{Tr}_K^{\sigma(K(a))}(\sigma(x)) = \mathrm{tr}(x).$$

Beweis. Wir sind in der Situation von Lemma (1.3.6) mit der zusätzlichen Voraussetzung, daß $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$ ist. Bezeichnet wieder τ den nichttrivialen K-Automorphismus von $\sigma(K(a))$, dann erhalten wir für die Norm von $\sigma(x)$

$$N_K^{\sigma(K(a))}(\sigma(x)) = \sigma(x)\tau\sigma(x) = \sigma(x\bar{x}) = x\bar{x},$$

da $x\bar{x} = \mathrm{nrd}(x)$ in K liegt. Dies verifiziert die hintere Gleichheit in (i). Ist $x \in K$, so gilt

$$N_K^{K(a)}(x) = x^2 = x\bar{x} = \mathrm{nrd}(x).$$

Ist hingegen $x \notin K$, so haben wir $K(a) = K(x)$, und es ist

$$N_K^{K(a)}(x) = N_K^{K(x)}(x) = \det \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{nrd}(x) \\ 1 & \mathrm{tr}(x) \end{pmatrix} = \mathrm{nrd}(x).$$

Damit ist Teil (i) bewiesen. Der zweite Teil folgt in analoger Weise. □

Lemma 1.3.8. *Sei $\bar{K}$ ein beliebiger algebraischer Abschluß von K. In $\bar{K}$ gibt es nur endlich viele Erweiterungen $L := K(a)$ von K mit den beiden Eigenschaften*

(i) $L \mid K$ ist imaginärquadratisch,

(ii) $a \in R_L^*$.

Beweis. Sei $n = [K : \mathbb{Q}]$. Daß $a \in R_L^*$ und damit ganz ist, ist nach dem gerade gezeigten Korollar (1.3.7) äquivalent zu der Aussage

$$\mathrm{tr}(a) \in R_K \qquad \text{und} \qquad \mathrm{nrd}(a) \in R_K^*.$$

Da wir das Element a um Faktoren aus R_K^* abändern können, ohne die von ihm erzeugte Erweiterung L zu verändern, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $\mathrm{nrd}(a)$ modulo $(R_K^*)^2$ reduziert ist.

Wir beweisen das Lemma, indem wir zeigen, daß es — unter obiger Annahme — nur noch endlich viele Möglichkeiten für das Minimalpolynom μ_a von a geben kann. Wegen der Normalität von quadratischen Erweiterungen bestimmt μ_a den Körper L in dem fest gewählten algebraischen Abschluß $\bar{K}$ bereits eindeutig.

Wir haben $\mu_a(X) = X^2 - \mathrm{tr}(a)X + \mathrm{nrd}(a)$, und $L \mid K$ ist genau dann imaginärquadratisch, wenn

$$\sigma_i(\mathrm{tr}(a)^2 - 4\mathrm{nrd}(a)) < 0 \qquad \text{für alle Einbettungen } \sigma_i : K \to \mathbb{R} \tag{1.6}$$

ist. Insbesondere muß $\sigma_i(\mathrm{nrd}(a)) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ sein. Wir betrachten K vermöge

$$\iota : K \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_1(x) \\ \vdots \\ \sigma_n(x) \end{pmatrix}$$

nach $\mathbb{R}^n$ eingebettet. Die Bedingung (1.6) ist demnach äquivalent zu $\iota(\mathrm{tr}(a)) \in Q$ mit

$$Q := \left]-2\sqrt{\sigma_1(\mathrm{nrd}(a))},\, 2\sqrt{\sigma_1(\mathrm{nrd}(a))}\right[\times \ldots \times \left]-2\sqrt{\sigma_n(\mathrm{nrd}(a))},\, 2\sqrt{\sigma_n(\mathrm{nrd}(a))}\right[. \quad (1.7)$$

Es ist bekannt, daß das Bild von R_K unter ι in $\mathbb{R}^n$ eine diskrete Menge ist (siehe z. B. F. Lorenz [12, Feststellung 5.2] oder J. Neukirch [14, § I.5, Satz (5.2)]). Der Quader Q ist beschränkt, also kann es nur endlich viele $\mathrm{tr}(a) \in R_K$ geben, deren Bild unter ι innerhalb von Q liegt. □

Bemerkung. Der Beweis liefert ein Verfahren, wie man konkret alle Körper L mit obigen Eigenschaften konstruieren kann, sofern genügend Information über den Grundkörper K vorliegt.

Ist die Einheitengruppe R_K^* bekannt, dann lassen sich alle total positiven Einheiten in $R_K^*/(R_K^*)^2$ ermitteln, und diese sind genau diejenigen Elemente, die man für $\mathrm{nrd}(a)$ berücksichtigen muß.

Haben wir außerdem eine Ganzheitsbasis $\theta_1, \ldots, \theta_n$ von K gegeben, so daß sich das gesuchte Element $\mathrm{tr}(a)$ in eindeutiger Form als

$$\mathrm{tr}(a) = c_1\theta_1 + \ldots + c_n\theta_n \qquad \text{mit } c_i \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

schreiben läßt, dann können wir zu jedem der gefundenen Werte für $\mathrm{nrd}(a)$ die möglichen Spuren $\mathrm{tr}(a)$ wie folgt ermitteln. Wir berechnen die Matrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1(\theta_1) & \ldots & \sigma_1(\theta_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(\theta_1) & \ldots & \sigma_n(\theta_n) \end{pmatrix},$$

die die Einbettungen der Ganzheitsbasis beschreibt, und erhalten $\iota(\mathrm{tr}(a)) = \Sigma c$, wobei der Vektor $c = (c_i)_{i=1}^n$ der Koeffizientenvektor von $\mathrm{tr}(a)$ sei. Wenn $\iota(\mathrm{tr}(a))$ die Bedingung (1.7) erfüllt, ist insbesondere die Länge dieses Vektors durch den Abstand der Eckpunkte von Q zum Nullpunkt beschränkt, also gilt

$$|\iota(\mathrm{tr}(a))|^2 = c^t\, \Sigma^t\, \Sigma c \leq 4 \sum_{i=1}^n \sigma_i(\mathrm{nrd}(a)). \quad (1.8)$$

Die Matrix $\Sigma^t\,\Sigma$ ist genau die Gram-Matrix der Spurform von K bezüglich der Ganzheitsbasis $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Alle c, die (1.8) erfüllen, also bezüglich der durch die Spurform vermittelten quadratischen Form beschränkt sind, kann man etwa mithilfe des Algorithmus von U. Fincke und M. Pohst (siehe [8] oder bei H. Cohen [1, Algorithm 2.7.7]).

Die gefundenen Vektoren überprüfe man dann darauf, ob sie den Bedingungen (1.6) bzw. (1.7) genügen. □

1.4 Brauergruppe und Hasse-Invariante

In (1.1.11) wurde die Diskriminante D_1 der Quaternionenalgebra A eingeführt, die das Zerfällungsverhalten von A an den verschiedenen Primstellen beschreibt.

Als erstes interessiert es, ob die Menge der Primteiler von D_1 überhaupt endlich ist. Diese Frage haben wir in Satz (1.1.11) bereits positiv beantwortet und wollen hier den Beweis nachreichen.

Außerdem stellt sich die Frage, ob jedes quadratfreie ganze Ideal von K als Diskriminante einer Quaternionenalgebra auftreten kann und ob verschiedene Quaternionenalgebren dieselbe Diskriminante haben können. Ein weiteres Ziel in diesem Abschnitt ist daher, diese Fragen für positiv definite Quaternionenalgebren zu beantworten, indem wir die in den folgenden beiden Sätzen aufgeführten Sachverhalte über die Diskriminante D_1 beweisen.

Im folgenden sei A wie immer eine Quaternionenalgebra über dem Zahlkörper K. Mit F bezeichnen wir einen beliebigen Körper.

Satz 1.4.1. *Ist D_1 die Diskriminante einer positiv definiten Quaternionenalgebra A über K, so hat die Anzahl der (nichtarchimedischen) Primteiler von D_1 dieselbe Parität wie $n = [K : \mathbb{Q}]$. Mit anderen Worten*

$$\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \textit{ teilt } D_1\} \equiv [K : \mathbb{Q}] \bmod 2. \tag{1.9}$$

Satz 1.4.2. *Sei D_1 ein quadratfreies Produkt von Primidealen von K, das der Bedingung (1.9) genügt. Dann existiert bis auf Isomorphie genau eine positiv definite Quaternionenalgebra über K, deren Diskriminante gerade D_1 ist.*

Für die Beweise benötigen wir einige Sätze und Definitionen aus der Theorie zentraleinfacher Algebren, die beispielsweise in den Büchern [12] und [13]von F. Lorenz nachzulesen sind. Den Begriff der Zentraleinfachheit setzen wir als bekannt voraus: Eine Algebra A über einem Körper K heißt *zentral*, wenn ihr Zentrum genau der Grundkörper K ist, und sie heißt *einfach*, wenn sie keine nichttrivialen zweiseitigen Ideale besitzt.

Proposition 1.4.3. *Jede Quaternionenalgebra ist zentraleinfach.*

Beweis. Der Beweis ist rein technischer Natur und benutzt nur die Gestalt (1.2) der Quaternionen sowie die Vertauschungsrelationen, die auf den Basisvektoren $1, i, j, k$ gegeben sind. Man findet ihn z. B. im Buch von O. T. O'Meara [16, 57:2]. □

Satz 1.4.4 (Wedderburn). *Sei F ein Körper. Dann ist jede endlichdimensionale einfache F-Algebra zu einer Matrixalgebra $M_r(D)$ isomorph, wobei $r \geq 1$ wohlbestimmt und D eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte F-Divisionsalgebra ist.*

Der Grad $[D : F]$ ist endlich.

Beweis. Für einen Beweis schlage man z. B. bei F. Lorenz [13, § 29.2, Satz 5] nach. □

Aufgrund dieses Satzes von Wedderburn ergibt die folgende Definition Sinn.

Definition 1.4.5. Sei F ein Körper.

(i) Zwei endlichdimensionale einfache F-Algebren B und C heißen *ähnlich*, falls es einen Schiefkörper D gibt, so daß die Isomorphismen

$$B \cong M_r(D) \qquad \text{und} \qquad C \cong M_s(D)$$

mit geeigneten $r, s \geq 1$ gelten. In diesem Fall schreiben wir: $B \sim C$.

(ii) Die *Brauergruppe* $\mathrm{Br}(F)$ von F ist definiert als

$$\mathrm{Br}(F) := \{\text{endlichdimensionale zentraleinfache } F\text{-Algebren}\}/\sim .$$

Die Restklasse einer Algebra B in $\mathrm{Br}(F)$ soll im weiteren mit $[B]$ bezeichnet werden.

(iii) Ist $[B] \in \mathrm{Br}(F)$ und gilt $B \cong M_r(D)$ mit einem Schiefkörper D, so heißt

$$s(B) := \sqrt{[D : F]}$$

der *Schurindex* von B.

Bemerkung.

(i) Die oben definierte Brauergruppe ist tatsächlich eine Gruppe unter der Verknüpfung

$$[B] \cdot [C] := [B \otimes_F C].$$

Dabei ist das neutrale Element gerade die Äquivalenzklasse $[F] = [M_r(F)]$ der Matrizenringe über dem Grundkörper F, und das zu einer Klasse $[B]$ inverse Element ist die Klasse $[B^\circ]$ der zu B reziproken Algebra. Diese Algebra B° erhält man bekanntlich aus B, indem man die normale Multiplikation auf B durch die Verknüpfung $a \circ b = ba$ ersetzt.

(ii) Der Schurindex $s(B)$ ist immer eine ganze Zahl, denn es kann gezeigt werden, daß der Grad $[D : F]$ stets eine Quadratzahl sein muß.

Für genauere Betrachtungen der Brauergruppe und des Schurindex — insbesondere für Beweise der in der Bemerkung aufgestellten Behauptungen — sei auch hier auf die Paragraphen § 29.2 und § 29.3 des Buches [13] von F. Lorenz verwiesen. □

Wir wollen festhalten, welche Werte der Schurindex im Falle der uns interessierenden Quaternionenalgebren annehmen kann.

Korollar 1.4.6. *Sei B eine Quaternionenalgebra über einem Körper F. Dann gilt für den Schurindex $s(B)$*

$$s(B) = \begin{cases} 1, & \text{falls } B \cong M_2(F) \text{ ist,} \\ 2, & \text{falls } B \text{ ein Schiefkörper ist.} \end{cases} \tag{1.10}$$

Beweis. Die Aussage ist klar, denn im ersten Fall ist bis auf Isomorphie $D = F$, also haben wir $[D : F] = 1$. Im zweiten Fall ist $D = B$ und daher $[D : F] = 4$. □

Definition 1.4.7. Sei $E \,|\, F$ eine beliebige Körpererweiterung.

(i) Die von der Konstantenerweiterung mit E induzierte Abbildung

$$\mathrm{res}_{E|F} : \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(E), \qquad [B] \mapsto [E \otimes_F B]$$

ist ein Gruppenhomomorphismus und heißt die *Restriktionsabbildung.*

(ii) Wir setzen $\mathrm{Br}(E \,|\, F) := \ker(\mathrm{res}_{E|F})$.

(iii) Der Körper E heißt *Zerfällungskörper* für die Algebra B, falls ihre Restklasse $[B]$ in $\mathrm{Br}(E \,|\, F)$ liegt, d. h., falls mit geeignetem $r \geq 1$ die Beziehung $E \otimes_F B \cong M_r(E)$ gilt.

Wenn wir unsere Quaternionenalgebra A über K betrachten, sind wir bei der Untersuchung der Diskriminante D_1 also gerade an der Frage interessiert, welche Lokalisierungen $K_\mathfrak{p}$ für A Zerfällungskörper sind und welche nicht.

Zunächst können wir nur für Körpererweiterungen endlichen Grades eine Aussage treffen:

Lemma 1.4.8. *Sei A eine Quaternionenalgebra über dem Zahlkörper K, sei L eine endliche Erweiterung von K. Genau dann ist L ein Zerfällungskörper für A, wenn*

$$s(A_\mathfrak{p}) \mid [L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}] \qquad \text{an jeder Stelle } \mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$$

gilt.

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Hauptsatz von Hasse-Brauer-Noether, wonach eine Algebra $B \in \mathrm{Br}(F)$ über einem globalen Körper F genau dann zerfällt, wenn sie dies lokal an jeder Stelle tut. Man findet die Aussage bei F. Lorenz [12, Satz 10.6]. □

Lemma 1.4.9. *Sei B eine endlichdimensionale zentraleinfache F-Algebra mit einer Teilalgebra E von B. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) E ist ein maximaler (kommutativer) Teilkörper von B.

(ii) $[B : F] = [E : F]^2$.

Sind die Aussagen erfüllt, so ist E ein Zerfällungskörper für B.

Beweis. Der Beweis steht wiederum bei F. Lorenz [13, § 29.5, Satz 15]. □

Bemerkung. In einer Quaternionenalgebra A über K sind demnach sämtliche quadratischen Zwischenkörper L, wie wir sie im Abschnitt 1.3 betrachtet haben, wegen der Dimensionsbeziehung $[A : K] = [L : K]^2$ maximale Teilkörper und somit Zerfällungskörper von A. □

Das Lemma hat für eine Quaternionenalgebra A mit Diskriminante D_1 über K eine wichtige Konsequenz, die wir in späteren Kapiteln des öfteren verwenden werden. Wir wollen sie deshalb in folgendem Korollar festhalten.

Korollar 1.4.10. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K, $\mathfrak{p} \mid D_1$. Sei L ein quadratischer Zwischenkörper von K in A. Dann ist $\mathfrak{p}$ in L nicht zerlegt.*

Beweis. Der Körper L ist ein Zerfällungskörper von A, d. h., es ist $L \otimes_K A \cong M_2(L)$. Insbesondere ist damit für ein Primideal $\mathfrak{P}$ von L auch $L_\mathfrak{P} \otimes_K A \cong M_2(L_\mathfrak{P})$.

Wäre nun $\mathfrak{p}$ in L zerlegt, etwa $\mathfrak{p}R_L = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, so würden aus Gradgründen die Komplettierungen $K_\mathfrak{p}$ und $L_{\mathfrak{P}_i}$ für $i = 1, 2$ zusammenfallen. Es wäre also

$$A_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p} \otimes_K A = L_{\mathfrak{P}_i} \otimes_K A \cong M_2(L_{\mathfrak{P}_i}),$$

und dies steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $\mathfrak{p} \mid D_1$, also $A_\mathfrak{p}$ eine Divisionsalgebra ist. □

Lemma 1.4.11. *Sei F jetzt ein lokaler Körper. Dann besitzt jede endlichdimensionale zentraleinfache F-Algebra B einen Zerfällungskörper E, der über F unverzweigt vom Grad $s(B)$ ist.*

Ist B sogar ein Schiefkörper, so kann E als Teilkörper von B gewählt werden.

Beweis. Auch dieser Beweis ist bei F. Lorenz in [13, § 31.1, Satz 1] zu finden. □

Der Grund, warum wir an unverzweigten Zerfällungskörpern interessiert sind, ist die folgende Proposition, die uns das entscheidende Hilfsmittel für die Beweise der Sätze (1.4.1) und (1.4.2) liefert.

Proposition 1.4.12. *Sind F und E nichtarchimedische lokale Körper und ist die Erweiterung $E \mid F$ unverzweigt vom Grad r, so existiert ein Homomorphismus*

$$\mathrm{inv}_{E|F} : \mathrm{Br}(E \mid F) \to {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}\ ,$$

der die Gruppe $\mathrm{Br}(E \mid F)$ *isomorph auf* ${}^{(\frac{1}{r}\mathbb{Z})}/_{\mathbb{Z}}$ *abbildet.*

Bemerkung.

(i) Das Bild $\mathrm{inv}_{E|F}([B])$ heißt die *Hasse-Invariante* von $[B]$. Wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, schreiben wir auch $\mathrm{inv}_{E|F}(B)$.

(ii) Der Homomorphismus $\mathrm{inv}_{E|F}$ setzt sich kanonisch zu einem Isomorphismus

$$\mathrm{inv}_F : \mathrm{Br}(F) \to {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$$

fort, indem wir zu einem Element $[B] \in \mathrm{Br}(F)$ einen unverzweigten Zerfällungskörper E wählen — der existiert nach Lemma (1.4.11) — und $\mathrm{inv}_F(B) := \mathrm{inv}_{E|F}(B)$ setzen. Die Wohldefiniertheit dieser Konstruktion und die Isomorphie zwischen $\mathrm{Br}(F)$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ werden bei F. Lorenz in [13, § 31.4] bewiesen.

□

Eine konkrete Beschreibung des Homomorphismus $\mathrm{inv}_{E|F}$ ist möglich, setzt aber ein ausführlicheres Studium der Theorie der zyklischen Algebren voraus, auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden kann. In § 30 und § 31 des bereits mehrfach zitierten Buches [13] von F. Lorenz werden Sätze und Beweise bereitgestellt, die die Konstruktion von $\mathrm{inv}_{E|F}$ erläutern.

Für unsere Zwecke ist es ausreichend zu wissen, daß die Abbildung $\mathrm{inv}_{E|F}$ ein Isomorphismus zwischen $\mathrm{Br}(E\,|\,F)$ und der zyklischen Untergruppe $(\frac{1}{r}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ vom Index $[E:F]$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist, denn damit können wir für unsere Quaternionenalgebra A über dem Zahlkörper K zusammenfassend festhalten:

Korollar 1.4.13. *Für eine nichtarchimedische Primstelle $\mathfrak{p}$ ist*

$$\mathrm{inv}_{K_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}, & \textit{falls } \mathfrak{p} \mid D_1, \\ 0 \bmod \mathbb{Z}, & \textit{falls } \mathfrak{p} \nmid D_1. \end{cases}$$

Beweis. Die Aussage folgt aus den vorangegangenen. Denn es ist $A_\mathfrak{p}$ eine zentraleinfache Algebra über dem lokalen Körper $K_\mathfrak{p}$. Somit hat sie nach Lemma (1.4.11) einen unverzweigten Zerfällungskörper $E_\mathfrak{p}$ vom Grad $s(A_\mathfrak{p})$ über $K_\mathfrak{p}$.

Ist $\mathfrak{p} \mid D_1$, also $A_\mathfrak{p}$ eine Divisionsalgebra, so besagt Korollar (1.4.6), daß $[E_\mathfrak{p} : K_\mathfrak{p}] = 2$ ist. Daher liefert $\mathrm{inv}_{E_\mathfrak{p}\,|\,K_\mathfrak{p}}$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{inv}_{E_\mathfrak{p}\,|\,K_\mathfrak{p}} : \mathrm{Br}(E_\mathfrak{p}\,|\,K_\mathfrak{p}) \to (\tfrac{1}{2}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$$

zwischen zyklischen Gruppen der Ordnung 2. Die Restklasse der Algebra $A_\mathfrak{p}$ kann nicht das neutrale Element von $\mathrm{Br}(E_\mathfrak{p}\,|\,K_\mathfrak{p})$ sein, da $A_\mathfrak{p}$ nicht isomorph zu $M_2(K_\mathfrak{p})$ ist. Also muß sie unter $\mathrm{inv}_{E_\mathfrak{p}\,|\,K_\mathfrak{p}}$ — und somit auch unter $\mathrm{inv}_{K_\mathfrak{p}}$ — auf das Element $(\frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z})$ abgebildet werden.

Im Fall $\mathfrak{p} \nmid D_1$ ist $A_\mathfrak{p} \cong M_2(K_\mathfrak{p})$, also ist $[A_\mathfrak{p}]$ das neutrale Element in $\mathrm{Br}(K_\mathfrak{p})$ und wird unter dem Isomorphismus $\mathrm{inv}_{K_\mathfrak{p}}$ auf das neutrale Element in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abgebildet, also auf $(0 \bmod \mathbb{Z})$. □

Das gerade bewiesene Korollar gibt also Auskunft über die lokalen Hasse-Invarianten $\mathrm{inv}_{K_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p})$ an nichtarchimedischen Primstellen. Wir können in naheliegender Weise auch Hasse-Invarianten an den archimedischen Primstellen einführen.

Vereinbarung 1.4.14. Sei $\mathfrak{p}$ eine archimedische Primstelle von K. Für die Quaternionenalgebra A setzen wir

$$\mathrm{inv}_{K_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}, & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ reell und } A_\mathfrak{p} \cong \mathbb{H} \text{ ist}, \\ 0 \bmod \mathbb{Z}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. Diese auf den ersten Blick willkürlich erscheinende Festsetzung sieht sich darin begründet, daß für eine komplexe Stelle $\mathfrak{p}$ die Algebra $A_\mathfrak{p}$ eine endlichdimensionale Algebra über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $K_\mathfrak{p} \cong \mathbb{C}$ ist. Eine solche Algebra kann wegen Lemma (1.3.2) keine Divisionsalgebra sein, sondern ist isomorph zu $M_2(K_\mathfrak{p})$. Sie ist also trivial in der zugehörigen Brauergruppe, und die einzig sinnvolle Wahl von $\mathrm{inv}_{K_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p})$ ist daher $(0 \bmod \mathbb{Z})$.

Für eine reelle Stelle kann ein zu $\mathbb{C}$ isomorpher Zerfällungskörper gewählt werden, der dann über $K_\mathfrak{p} \cong \mathbb{R}$ den Grad 2 hat. Damit wird wie im Beweis von Korollar (1.4.13) die Algebra $\mathbb{H}$ der Hamiltonschen Quaternionen — die einzige Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$ — als nichttriviales Element der Brauergruppe auf $(\frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z})$ abgebildet. □

Die Kenntnis aller lokalen Hasse-Invarianten $\mathrm{inv}_{K_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p})$ ermöglicht es uns nun, aus dem Hauptsatz der Algebrentheorie die Endlichkeit von D_1 und die beiden uns interessierenden Sätze (1.4.1) und (1.4.2) herzuleiten. Der Hauptsatz lautet wie folgt:

Satz 1.4.15 (Hauptsatz der Algebrentheorie). *Sei F ein globaler Körper. Mit den beiden Gruppenhomomorphismen*

$$\mathrm{res} : \mathrm{Br}(F) \to \bigoplus_\mathfrak{p} \mathrm{Br}(F_\mathfrak{p}), \qquad [B] \mapsto ([B_\mathfrak{p}])_\mathfrak{p}$$

und

$$\mathrm{sum} : \bigoplus_\mathfrak{p} \mathrm{Br}(F_\mathfrak{p}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\,, \qquad ([B_\mathfrak{p}])_\mathfrak{p} \mapsto \sum_\mathfrak{p} \mathrm{inv}_{F_\mathfrak{p}}(B_\mathfrak{p})$$

ist die folgende Sequenz exakt

$$1 \longrightarrow \mathrm{Br}(F) \xrightarrow{\mathrm{res}} \bigoplus_\mathfrak{p} \mathrm{Br}(F_\mathfrak{p}) \xrightarrow{\mathrm{sum}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{1.11}$$

Dabei läuft $\mathfrak{p}$ über sämtliche archimedischen und nichtarchimedischen Primstellen von F.

Beweis. Satz und Beweis findet man in dem Buch [12, Satz (11.1.3)] von F. Lorenz. □

Beweis von Satz (1.1.11). Sei A eine Quaternionenalgebra über K. Ihre Restklasse $[A]$ in der Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ wird unter res auf $([A_\mathfrak{p}])_\mathfrak{p}$ abgebildet, und wegen der Exaktheit der Sequenz (1.11) ist

$$\sum_\mathfrak{p} \mathrm{inv}_\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p}) = 0 \bmod \mathbb{Z}.$$

Genau für diejenigen archimedischen oder nichtarchimedischen Primstellen $\mathfrak{p}$, an denen $A_\mathfrak{p}$ eine Divisionsalgebra ist, ist $\mathrm{inv}_{K_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) = \frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}$; die anderen $\mathfrak{p}$ tragen zu der Summe nicht bei. Insgesamt liefert die Summe aber eine ganze Zahl, es kann daher nur endlich viele nichttriviale Summanden geben. □

Beweis von Satz (1.4.1). Sei die Quaternionenalgebra A jetzt sogar positiv definit. Wie im vorigen Beweis ist auch hier $\sum_\mathfrak{p} \mathrm{inv}_\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p}) = 0 \bmod \mathbb{Z}$, und nur die Primstellen, an denen A verzweigt ist, tragen zu der Summe bei.

Es gibt $[K : \mathbb{Q}]$ archimedische Stellen von K, alle sind reell, und da A als positiv definit vorausgesetzt ist, liefert jede dieser Stellen den Summanden $(\frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z})$.

Insgesamt ergibt sich damit die Gleichung

$$\frac{1}{2}\left([K : \mathbb{Q}] + \#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\}\right) \equiv 0 \bmod \mathbb{Z},$$

woraus folgt, daß $[K : \mathbb{Q}]$ und $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\}$ dieselbe Parität haben müssen. □

Beweis von Satz (1.4.2). Sei D_1 ein quadratfreies ganzes Ideal von K mit der Eigenschaft

$$\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv [K : \mathbb{Q}] \bmod 2.$$

Wir setzen

$$A_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} M_2(K_{\mathfrak{p}}), & \text{falls } \mathfrak{p} \not| \infty,\ \mathfrak{p} \not| D_1, \\ D_{\mathfrak{p}}, & \text{falls } \mathfrak{p} \mid \infty \text{ oder } \mathfrak{p} \mid D_1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Dabei sei $D_{\mathfrak{p}}$ eine Divisionsalgebra über $K_{\mathfrak{p}}$ mit $[D_{\mathfrak{p}} : K_{\mathfrak{p}}] = 4$.

Es ist also $([A_{\mathfrak{p}}])_{\mathfrak{p}} \in \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}})$, und da

$$\begin{aligned} \mathrm{sum}(([A_{\mathfrak{p}}])_{\mathfrak{p}}) &= \sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{inv}_{K_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) = \frac{1}{2}\#\{\mathfrak{p} \mid \infty \text{ oder } \mathfrak{p} \mid D_1\} \bmod \mathbb{Z} \\ &= 0 \bmod \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ist, folgt aus der Exaktheit der Sequenz (1.11), daß $([A_{\mathfrak{p}}])_{\mathfrak{p}}$ bereits im Bild der Abbildung res liegen muß. Wir finden also ein $[A] \in \mathrm{Br}(K)$, daß lokal durch (1.12) beschrieben ist.

Es bleibt zu zeigen, daß es bis auf Isomorphie genau eine Quaternionenalgebra in der Klasse $[A]$ gibt, diese ist dann die gesuchte Quaternionenalgebra mit Diskriminante D_1. Da die Schurindizes der in (1.12) gegebenen Lokalisierungen 1 im Fall $A_{\mathfrak{p}} = M_2(K_{\mathfrak{p}})$ bzw. 2 im anderen Fall sind, folgt diese letzte Aussage aus dem abschließenden Lemma. □

Lemma 1.4.16. *Sei* $[A] \in \mathrm{Br}(K)$.

(i) Ist der Schurindex $s(A) = 2$*, dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine Quaternionenalgebra, die zu* A *ähnlich ist.*

(ii) Der Schurindex erfüllt die Gleichung $s(A) = \mathrm{kgV}\{s(A_{\mathfrak{p}})\}$*, wo* $\mathfrak{p}$ *über alle Stellen von* K *läuft.*

Beweis. Den Beweis des ersten Teiles findet man bei F. Lorenz in [13, § 30.4, Beispiel 3], den zweiten Teil in [12, Satz 10.10]. □

Kapitel 2

Ideale und Ordnungen

Nun, da wir über die nötigen Grundlagen über Quaternionenalgebren verfügen, können wir uns den Objekten zuwenden, denen unser Hauptinteresse gilt: den Idealen.

Wie im Fall von Zahlkörpern, so ist auch bei Quaternionenalgebren der Idealbegriff eng mit dem Begriff von Ordnungen verknüpft. Es ist bereits angeklungen, daß die ganzen Elemente einer Quaternionenalgebra keinen Ring bilden und man — anders als im Zahlkörperfall — keine ausgezeichnete Hauptordnung, sondern verschiedene Maximalordnungen hat.

Nach grundlegenden Definitionen von Idealen und Ordnungen in Abschnitt 2.1 werden wir uns in den Abschnitten 2.2–2.4 vornehmlich mit Eichler-Ordnungen beschäftigen, die als Durchschnitte zweier Maximalordnungen auftreten. Im Anschluß daran untersuchen wir die quasi-normalen Ideale, also diejenigen Ideale, deren Links- und Rechtsordnung solche Eichler-Ordnungen sind.

2.1 Grundlagen

Sei K im folgenden immer ein algebraischer Zahlkörper, R sein Ganzheitsring und A eine Quaternionenalgebra über K.

Definition 2.1.1.

(i) Ein *Ideal* von A ist ein endlich erzeugter R-Modul $\mathcal{I}$ mit $K\mathcal{I} = A$.

(ii) Eine *Ordnung* von A ist ein Ring $\mathfrak{O}$ aus ganzen Zahlen von A, so daß $R \subseteq \mathfrak{O}$ und $K\mathfrak{O} = A$ gilt.

(iii) Eine *Maximalordnung* ist eine Ordnung, die in keiner anderen echt enthalten ist.

Bemerkung. Es sei angemerkt, daß Ideale im Sinne obiger Definition keine Ideale im ringtheoretischen Sinne sind, da nicht verlangt wird, daß $A\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ und $\mathcal{I}A \subseteq \mathcal{I}$ gilt. In Proposition (1.4.3) haben wir aber bereits vermerkt, daß A als zentraleinfache Algebra keine zweiseitigen Ideale besitzt, insofern wird im folgenden unter einem „Ideal“ stets ein Ideal im Sinne von Definition (2.1.1) verstanden, und mögliche Mißverständnisse sollten hiermit ausgeräumt sein. □

Lemma 2.1.2. *Eine äquivalente Definition des Begriffs einer Ordnung ist die folgende: Eine Ordnung der Quaternionenalgebra A ist ein Ideal von A, das zugleich ein unitärer Ring ist.*

Beweis. Um die Äquivalenz dieser beiden Definitionen einzusehen, ziehen wir die Ergebnisse aus Abschnitt 1.2 heran. Ist $\mathfrak{O}$ ein unitärer Ring und zugleich ein Ideal von A, so bleibt nur zu zeigen, daß alle Elemente in $\mathfrak{O}$ ganz sind über R. Dies folgt direkt mit Lemma (1.2.5), denn $\mathfrak{O}$ ist als Ideal ein endlich erzeugter R-Modul.

Umgekehrt sei $\mathfrak{O}$ eine Ordnung von A im Sinne der Definition (2.1.1). Hier bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{O}$ als R-Modul endlich erzeugt ist. Diese Tatsache wurde in Lemma (1.2.7) verifiziert. □

Definition und Lemma 2.1.3. Sei $\mathcal{I}$ ein Ideal der Quaternionenalgebra A. Wir nennen das Ideal

$$\mathcal{I}^{-1} := \{x \in A \mid \mathcal{I}x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}\}$$

das zu $\mathcal{I}$ *inverse Ideal*, und die Ordnungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) &:= \{x \in A \mid x\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}\}, \\ \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}) &:= \{x \in A \mid \mathcal{I}x \subseteq \mathcal{I}\} \end{aligned}$$

heißen *Linksordnung* von $\mathcal{I}$, bzw. *Rechtsordnung* von $\mathcal{I}$.

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß $\mathcal{I}^{-1}$ ein Ideal und $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ sowie $\mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ Ordnungen von A sind.

Das Ideal $\mathcal{I}$ ist nach Definition ein endlich erzeugter R-Modul, und wir fixieren ein Erzeugendensystem $a_1, \ldots, a_m$.

Als erstes wird gezeigt, daß $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ eine Ordnung ist. Dabei sind die Ringeigenschaften sofort ersichtlich, ebenso die Tatsache, daß $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ ein R-Modul ist.

Sei $a \in \mathcal{I} \cap R$. Für jedes $x \in \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ gilt nach Definition von $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$, daß $x = a^{-1}xa \in a^{-1}\mathcal{I}$ ist. Wir erhalten somit

$$\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \subseteq \left\langle \frac{a_1}{a}, \ldots, \frac{a_m}{a} \right\rangle_R,$$

das heißt, $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ ist ein Untermodul eines endlich erzeugten Moduls über einem noetherschen Ring und deshalb nach Lemma (1.2.1) selbst endlich erzeugt.

Es bleibt, die Gleichheit $K\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) = A$ zu zeigen. Dazu sei nun $x \in A$. Für alle $i = 1, \ldots, m$ ist das Produkt $xa_i \in A$, also etwa von der Form $xa_i = \sum_{j=1}^m s_j a_j$ mit $s_j \in K$. Wenn $s \in R$ den Hauptnenner aller s_j bezeichnet, dann gilt $xa_i \in s^{-1}\mathcal{I}$ für alle i. Es folgt $sx\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$, was gerade bedeutet, daß $sx \in \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ liegt, oder anders ausgedrückt, daß $x \in K\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ ist.

Für die Rechtsordnung $\mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ gehe man genauso vor.

Der Beweis, daß $\mathcal{I}^{-1}$ ein Ideal ist, geht ebenfalls nach ähnlichem Muster. Es ist auch hier klar, daß es sich um einen R-Modul handelt, und wir wählen wie oben ein Element $a \in \mathcal{I} \cap R$ mit $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \subseteq a^{-1}\mathcal{I}$. Wegen $1 \in \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ folgt nun direkt

$$\mathcal{I}^{-1} \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})\mathcal{I}^{-1}\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \subseteq \frac{1}{a}\mathcal{I}\mathcal{I}^{-1}\frac{1}{a}\mathcal{I} \subseteq \frac{1}{a^2}\mathcal{I}.$$

Also ist wieder mithilfe von Lemma (1.2.1) bewiesen, daß $\mathcal{I}^{-1}$ endlich erzeugt ist.

Für ein Element $x = r_1a_1 + \ldots + r_ma_m \in \mathcal{I}$ können wir wieder die Produkte xa_i betrachten. Es ist

$$xa_i = \sum_{j=1}^m r_j a_j a_i \qquad \text{und} \quad a_j a_i = \sum_{k=1}^m s_{ijk} a_k \qquad \text{mit} \quad s_{ijk} \in K.$$

Wieder bezeichnen wir mit $s \in R$ den Hauptnenner der s_{ijk}. Es ist also $x\mathcal{I} \subseteq s^{-1}\mathcal{I}$. Die Zahl s hängt aber nicht von x ab, demnach gilt sogar $\mathcal{I}^2 \subseteq s^{-1}\mathcal{I}$ und daher $\mathcal{I}s\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})\mathcal{I} \subseteq s\mathcal{I}^2 \subseteq \mathcal{I}$. Nach Definition bedeutet dies gerade, daß $s\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}^{-1}$ ist.

Wenn wir uns nun ein beliebiges $y \in A$ vorgeben, können wir, da wir bereits die Gleichung $K\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) = A$ verifiziert haben, $t \in K$ und $z \in \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ wählen, so daß $y = tz = (ts^{-1})sz \in K\mathcal{I}^{-1}$ ist. Damit ist bewiesen, daß $\mathcal{I}^{-1}$ ein Ideal ist. □

Lemma 2.1.4. *Seien $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ Ideale von A. Dann gelten die folgenden Aussagen*

(i) $\mathcal{I}\mathcal{I}^{-1} \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ *und* $\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$.

(ii) $\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}) \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}^{-1})$ *und* $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \subseteq \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}^{-1})$.

(iii) Es gibt Elemente $0 \neq s, t \in R$ *mit* $s\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \subseteq t^{-1}\mathcal{I}$.

(iv) Es gibt Elemente $0 \neq s, t \in R$ *mit*

$$s\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \subseteq s^{-1}\mathcal{I}^{-1} \qquad \text{und} \qquad t\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}) \subseteq t^{-1}\mathcal{I}^{-1}.$$

Beweis. Die in Teil (i) und (ii) behaupteten Inklusionen folgen direkt aus $\mathcal{I}\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$. Teil (iii) wurde im wesentlichen auch schon gezeigt. Sei nämlich $\mathcal{I} = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle_R$. Die Elemente a_i lassen sich wegen $K\mathcal{J} = A$ in der Form $a_i = s_i^{-1} r_i$ mit $0 \neq s_i \in R$, $r_i \in \mathcal{J}$ schreiben. Das Element $s := \prod s_i \in R$ erfüllt nun offensichtlich

$$s\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}.$$

Genauso erhalten wir ein $0 \neq t \in R$ mit $t\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, und Behauptung (iii) folgt.

Setzen wir jetzt speziell $\mathcal{J} = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$, dann finden wir ein $0 \neq s \in R$ mit $s\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$. Wegen $\mathcal{I}s\mathcal{I} = (s\mathcal{I})\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ ist daher auch $s \in \mathcal{I}^{-1}$. Für die Ordnung $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$, die nach Teil (ii) in der Rechtsordnung von $\mathcal{I}^{-1}$ enthalten ist, gilt somit

$$\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) = s^{-1}s\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \subseteq s^{-1}\mathcal{I}^{-1}\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}^{-1}) \subseteq s^{-1}\mathcal{I}^{-1}.$$

Auf die gleiche Weise beweist man die Aussage über die Rechtsordnung. □

Definition 2.1.5. Ein Ideal $\mathcal{I}$ der Quaternionenalgebra A heißt

- $\mathfrak{O}$-*Linksideal*, falls $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ ist, bzw. $\mathfrak{O}$-*Rechtsideal*, falls $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ ist,
- *gleichseitig* oder auch *zweiseitig*, falls $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ ist; setzen wir in diesem Falle $\mathfrak{O} := \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$, so wollen wir $\mathcal{I}$ kurz ein $\mathfrak{O}$-*Ideal* nennen,
- *Hauptideal*, falls es ein $a \in A^*$ gibt mit $\mathcal{I} = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})a = a\mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$,
- *ganz*, falls $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ gilt, oder äquivalent $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$.

Bemerkung. Die behauptete Äquivalenz bei der Definition des Begriffs „ganz“ ergibt sich direkt aus

$$\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \iff \mathcal{I}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I} \iff \mathcal{I} \subseteq \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}).$$

□

Wie für Ideale in Zahlkörpern können wir auch in unserer Situation den Begriff der Norm von der Ebene der Elemente auf die der Ideale übertragen.

Definition 2.1.6. Sei $\mathcal{I}$ ein Ideal von A. Unter der *(reduzierten) Norm* von $\mathcal{I}$ verstehen wir dasjenige gebrochene Ideal von K, welches von allen $\mathrm{nrd}(x)$ mit $x \in \mathcal{I}$ erzeugt wird. Naheliegenderweise bezeichnen wir die reduzierte Norm von $\mathcal{I}$ mit

$$\mathrm{nrd}(\mathcal{I}).$$

Bemerkung. Die Multiplikativität der reduzierten Normabbildung, die wir auf Element-Ebene in Lemma (1.1.4) erwähnt hatten, überträgt sich automatisch. Wie im Zahlkörperfall gilt außerdem für ein Hauptideal $\mathfrak{O}a$

$$\mathrm{nrd}(\mathfrak{O}a) = R \cdot \mathrm{nrd}(a).$$

□

Häufig werden wir zu gegebenem Ideal $\mathcal{I}$ auch seine Lokalisierung $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ nach einem Primideal $\mathfrak{p}$ von K betrachten. Wird $\mathcal{I}$ als R-Modul von $\{a_1, \ldots, a_m\}$ erzeugt, so ist

$$\mathcal{I}_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}\mathcal{I} = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle_{R_\mathfrak{p}}$$

seine Lokalisierung. Wir haben außerdem

$$(\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}))_\mathfrak{p}\, \mathcal{I} = \mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathcal{I}\, (\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}))_\mathfrak{p},$$

und es gelten wie gewohnt die Beziehungen

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} & \Longleftrightarrow & \mathcal{I}_\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{J}_\mathfrak{p} & \text{für alle } \mathfrak{p} < \infty, \\ \mathcal{I} = \mathcal{J} & \Longleftrightarrow & \mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathcal{J}_\mathfrak{p} & \text{für alle } \mathfrak{p} < \infty, \\ (\mathrm{nrd}(\mathcal{I}))_\mathfrak{p} & = & \mathrm{nrd}(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) & \text{für alle } \mathfrak{p} < \infty. \end{array}$$

Entsprechendes gilt für Ordnungen. Zudem ist eine Ordnung $\mathfrak{O}$ von A genau dann maximal, wenn $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} < \infty$ eine Maximalordnung von $A_\mathfrak{p}$ ist.

Für Einzelheiten sei auf die Bücher von O. T. O'Meara [16, § 81E.] sowie von M.-F. Vignéras [21, Corollaire 5.2] verwiesen.

Ideale — oder allgemeinere Objekte — lokal zu untersuchen, ist normalerweise nur dann nützlich, wenn man aus der im Lokalen gewonnenen Information Rückschlüsse auf globale Eigenschaften ziehen kann. Man benötigt insbesondere ein Kriterium, nach dem zu entscheiden ist, ob zu beliebig vorgegebenen lokalen Objekten ein globales Objekt mit genau den vorliegenden Lokalisierungen existiert. Unser nächster Schritt ist es daher, ein solches Lokal-Global-Prinzip anzugeben.

Korollar 2.1.7. *Seien $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ Ideale von A. Dann gilt*

$$\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathcal{J}_\mathfrak{p} \qquad \text{für fast alle Primideale } \mathfrak{p} \text{ von } K.$$

Insbesondere stimmt jedes Ideal lokal fast überall mit seiner Links- bzw. Rechtsordnung überein.

Beweis. Nach Lemma (2.1.4) gibt es zwei von 0 verschiedene Elemente $s, t \in R$ mit

$$s\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{J} \subseteq t^{-1}\mathcal{I}.$$

An fast allen Primstellen sind aber $s \in R_\mathfrak{p}^*$ und $t \in R_\mathfrak{p}^*$, und in einem solchen Fall ist dann

$$\mathcal{I}_\mathfrak{p} = s\mathcal{I}_\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{J}_\mathfrak{p} \subseteq t^{-1}\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathcal{I}_\mathfrak{p},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 2.1.8 (Lokal-Global-Korrespondenz). *Es sei $\mathcal{I}$ ein fest gewähltes Ideal von A. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{Ideale von } A\} & \longrightarrow & \{\,(\mathcal{J}_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \mid \mathcal{J}_\mathfrak{p} \textit{ ist ein Ideal von } A, \textit{ und } \mathcal{J}_\mathfrak{p} = \mathcal{I}_\mathfrak{p} \textit{ für fast alle } \mathfrak{p}\} \\ \mathcal{J} & \mapsto & (\mathcal{J}_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \end{array}$$

bijektiv.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Abbildung haben wir in Korollar (2.1.7) nachgewiesen. Der vollständige Beweis steht bei M.-F. Vignéras in [21, Proposition 5.1] oder auch bei O. T. O'Meara in [16, 81:14]. □

Bei der Untersuchung der Ideale von A kommt man nicht umhin, auch deren Links- und Rechtsordnung zu studieren. M. Deuring betrachtet in [3, Kapitel VI, § 2] den speziellen Fall von *normalen* Idealen. Darunter versteht er diejenigen Ideale, deren Links- und Rechtsordnungen maximal sind.

Obwohl unser Hauptinteresse einer größeren Klasse von Idealen gelten wird, ist es trotzdem auch für unsere Zwecke hilfreich, wenn wir einige Aussagen über Maximalordnungen und ihre Ideale zur Verfügung haben. Wie wir oben angemerkt hatten, sind Ordnungen genau dann maximal, wenn sie es lokal an allen $\mathfrak{p} < \infty$ sind. Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir also Maximalordnungen von $A_\mathfrak{p}$ untersuchen.

Lemma 2.1.9. *Ist $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ ein Ideal von $A_\mathfrak{p} = M_2(K_\mathfrak{p})$ mit Linksordnung $M_2(R_\mathfrak{p})$, so ist $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$-Hauptideal.*

Beweis. Der Ring $R_\mathfrak{p}$ ist ein Hauptidealring. Man kann zeigen, daß damit auch $M_2(R_\mathfrak{p})$ ein Hauptidealring ist (siehe beispielsweise bei M. Newman [15, Theorem II.5]). Wenn wir $\mathcal{I}$ gemäß Lemma (2.1.4) mit einem geeigneten Element $0 \neq s \in R_\mathfrak{p}$ multiplizieren, kann angenommen werden, daß $\mathcal{I}$ ein ganzes Ideal von $M_2(R_\mathfrak{p})$ ist, und die Behauptung folgt aus der Hauptidealeigenschaft. □

Lemma 2.1.10. *Die Maximalordnungen von $A_\mathfrak{p}$ sind gegeben durch*

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{M}_\mathfrak{p} & := & \{a \in A_\mathfrak{p} \mid \operatorname{nrd}(a) \in R_\mathfrak{p}\}, & \textit{falls } \mathfrak{p} \mid D_1, \\ \mathfrak{M}_{\mathfrak{p},a} & := & a \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} a^{-1} \quad \textit{mit } a \in A_\mathfrak{p}^*, & \textit{falls } \mathfrak{p} \nmid D_1. \end{array}$$

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{p} \mid D_1$, also $A_\mathfrak{p}$ eine Divisionsalgebra. Wir hatten bereits in Lemma (1.1.10) gesehen, daß

$$w_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \qquad w_\mathfrak{p}(a) := v_\mathfrak{p}(\mathrm{nrd}(a)),$$

eine Bewertung auf $A_\mathfrak{p}$ definiert, die den Ganzheitsring

$$\{a \in A_\mathfrak{p} \mid w_\mathfrak{p}(a) \geq 0\} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p},$$

besitzt, der offensichtlich $R_\mathfrak{p}$ enthält. Wir zeigen, daß dieser Ring tatsächlich eine Ordnung von A ist. Es ist $A_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p}\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$, denn für ein $a \in A_\mathfrak{p}$ ist entweder $a \in \mathfrak{M}_\mathfrak{p} \subseteq K_\mathfrak{p}\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$, oder es ist $v_\mathfrak{p}(\mathrm{nrd}(a)) < 0$, also $v_\mathfrak{p}(\mathrm{nrd}(\bar{a})^{-1}) > 0$. Das heißt, a läßt sich schreiben in der Form $a = (\bar{a})^{-1}\mathrm{nrd}(a) \in K_\mathfrak{p}\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$.

Es bleibt zu zeigen, daß alle Elemente in $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ ganz über $R_\mathfrak{p}$ sind. Sei also $x \in \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$.

Ist $x \in K_\mathfrak{p}$, so ist $x^2 = \mathrm{nrd}(x) \in R_\mathfrak{p}$ und daher $x \in R_\mathfrak{p}$, also ist x ganz über $R_\mathfrak{p}$.

Ist hingegen $x \notin K_\mathfrak{p}$, so ist $L_\mathfrak{p} := K_\mathfrak{p}(x)$ eine quadratische Körpererweiterung von $K_\mathfrak{p}$ in $A_\mathfrak{p}$. Durch Einschränken von $w_\mathfrak{p}$ auf $L_\mathfrak{p}$ erhalten wir auch hier eine Bewertung. Ihr Ganzheitsring

$$\{a \in L_\mathfrak{p} \mid w_\mathfrak{p}(a) \geq 0\} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p} \cap L_\mathfrak{p}$$

ist bekanntlich der ganze Abschluß von $R_\mathfrak{p}$ in $L_\mathfrak{p}$. Wegen $x \in \mathfrak{M}_\mathfrak{p} \cap L_\mathfrak{p}$ ist also insbesondere x ganz über $R_\mathfrak{p}$.

Damit ist gezeigt, daß die Menge $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ eine Ordnung von $A_\mathfrak{p}$ ist. Die Maximalität folgt direkt, da $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ nach Korollar (1.2.4) bereits alle ganzen Elemente und damit auch jede andere Ordnung von $A_\mathfrak{p}$ enthält.

Für $\mathfrak{p} \nmid D_1$ können wir $A_\mathfrak{p}$ mit dem Matrizenring $M_2(K_\mathfrak{p})$ identifizieren. Da mit dieser Identifizierung die Spur-, bzw. reduzierte Normabbildung genau der Spur bzw. Determinante von (2×2)-Matrizen entsprechen, ist sofort einsichtig, daß die angegebenen Mengen tatsächlich Ordnungen von $A_\mathfrak{p}$ sind, und es muß nur ihre Maximalität untersucht werden. Ist für ein beliebiges $a \in A_\mathfrak{p}^*$ die Ordnung $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p},a}$ nicht maximal, sondern etwa enthalten in einer echt größeren Ordnung $\mathfrak{M}$, so ist auch $M_2(R_\mathfrak{p}) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p},1}$ nicht maximal, denn es ist dann natürlich $M_2(R_\mathfrak{p}) \subsetneq a^{-1}\mathfrak{M}a$, und letztere Menge ist ebenfalls eine Ordnung von $A_\mathfrak{p}$. Also reicht es, die Maximalität von $M_2(R_\mathfrak{p})$ zu verifizieren.

Nehmen wir an, es gäbe eine Ordnung $\mathfrak{M}$ von $A_\mathfrak{p}$, die $M_2(R_\mathfrak{p})$ enthält und zusätzlich ein Element $x \in A_\mathfrak{p}$, das nicht in $M_2(R_\mathfrak{p})$ liegt. Da mit $M_2(R_\mathfrak{p})$ insbesondere auch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und deren Produkte mit x in $\mathfrak{M}$ enthalten sind, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß x von der Form

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a, b, c, d \in K_\mathfrak{p},\ a \notin R_\mathfrak{p}$$

ist. Wir bezeichnen mit δ_1 den Hauptnenner von c und d und mit δ_2 den Hauptnenner von b und d und bilden das Produkt

$$\begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in R_\mathfrak{p},\ a \notin R_\mathfrak{p}.$$

Die rechte Seite liegt in $\mathfrak{M}$. Andererseits ist die linke Seite offensichtlich nicht ganz, da die Spur der Matrix nicht in $R_\mathfrak{p}$ liegen kann. Dies ist der gesuchte Widerspruch.

Es bleibt zu zeigen, daß tatsächlich alle Maximalordnungen von $A_\mathfrak{p}$ die angegebene Gestalt haben. Dazu nehmen wir eine beliebige Maximalordnung $\mathfrak{M}$ her und betrachten das $M_2(R_\mathfrak{p})$-Linksideal $\mathcal{I} := M_2(R_\mathfrak{p})\mathfrak{M}$. Es gelten die Inklusionen

$$M_2(R_\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}),$$

und da sowohl der Matrizenring als auch $\mathfrak{M}$ Maximalordnungen sind, gilt sogar in beiden Fällen die Gleichheit. Nun ist $\mathcal{I}$ als $M_2(R_\mathfrak{p})$-Linksideal nach Lemma (2.1.9) ein Hauptideal und daher von der Form $\mathcal{I} = M_2(R_\mathfrak{p})a$ für ein geeignetes $a \in A_\mathfrak{p}^*$. Man rechnet sofort nach, daß die Rechtsordnung eines solchen Hauptideals durch $a^{-1}M_2(R_\mathfrak{p})a$ gegeben ist, die Rechtsordnung von $\mathcal{I}$ war aber gerade $\mathfrak{M}$, also ist dies von der behaupteten Gestalt. □

Korollar 2.1.11. *Ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ eine Maximalordnung von $A_\mathfrak{p}$, dann ist jedes $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$-Linksideal $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ ein Hauptideal.*

Beweis. Für den Fall, daß $\mathfrak{p} \mid D_1$ gilt, verweisen wir auf [3, Kapitel VI, § 11, Satz 12] von M. Deuring.

Ist hingegen $\mathfrak{p} \nmid D_1$, also $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = aM_2(R_\mathfrak{p})a^{-1}$, so ist das Ideal $a^{-1}\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ ein $M_2(R_\mathfrak{p})$-Linksideal. Nach Lemma (2.1.9) gibt es also ein $x \in A_\mathfrak{p}^*$ mit $a^{-1}\mathcal{I}_\mathfrak{p} = M_2(R_\mathfrak{p})x$. Es folgt $\mathcal{I}_\mathfrak{p} = (aM_2(R_\mathfrak{p})a^{-1})ax$. □

2.2 Eichler-Ordnungen

Wie bereits angemerkt liegt unser Hauptinteresse nicht bei den Maximalordnungen der Quaternionenalgebra A. Wir wenden uns stattdessen einer größeren Klasse von Ordnungen zu.

Definition 2.2.1. Den Durchschnitt zweier Maximalordnungen der Quaternionenalgebra A bezeichnet man als *Eichler-Ordnung* von A.

Bemerkung. Es wird nicht verlangt, daß eine Eichler-Ordnung Durchschnitt zweier *verschiedener* Maximalordnungen sein muß. Maximalordnungen werden als Spezialfall von Eichler-Ordnungen ausdrücklich zugelassen. □

Wir wollen die Gestalt der Eichler-Ordnungen genauer untersuchen und werden sie dazu im Lokalen konkret angeben. Um den Beweis möglichst einfach zu halten, benötigen wir zunächst folgenden Satz.

Satz 2.2.2 (Hermitesche Normalform). *Sei $x \in \mathrm{GL}_2(K_\mathfrak{p})$ eine invertierbare Matrix über $K_\mathfrak{p}$. Dann existiert eine unimodulare Matrix $v \in \mathrm{GL}_2(R_\mathfrak{p})$, so daß das Produkt vx von der Gestalt*

$$vx = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^r & b \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{pmatrix}, \qquad \textit{mit } r, s \in \mathbb{Z} \quad \textit{und entweder } b = 0 \textit{ oder } v_\mathfrak{p}(b) < s \tag{2.1}$$

ist.

Beweis. Die Hermitesche Normalform für n-dimensionale Matrizen über einem beliebigen Hauptidealring wird zum Beispiel von M. Newman in [15, Theorem II.2] hergeleitet. □

Korollar 2.2.3. *Sei $\mathfrak{O}$ eine Eichler-Ordnung der Quaternionenalgebra A mit Diskriminante D_1. Dann gilt für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ von K*

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}_\mathfrak{p} &= \{a \in A_\mathfrak{p} \mid \operatorname{nrd}(a) \in R_\mathfrak{p}\} && \text{für } \mathfrak{p} \mid D_1, \\ \mathfrak{O}_\mathfrak{p} &= a \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p}^k R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} a^{-1} && \text{für } \mathfrak{p} \nmid D_1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei jeweils $a \in A_\mathfrak{p}^*$ ist und k eine von $\mathfrak{p}$ abhängige Zahl mit $k \geq 0$.

Beweis. Wir denken uns die Eichler-Ordnung gegeben als $\mathfrak{O} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$. Lokal kann es passieren, daß $\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{M}_{2,\mathfrak{p}}$ zusammenfallen. In diesem Fall ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ selbst bereits maximal und muß somit bereits von der in Lemma (2.1.10) angegebenen Gestalt sein. Die Behauptung folgt für solche $\mathfrak{p}$ unmittelbar.

Sei nun $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_{1,\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{M}_{2,\mathfrak{p}}$ nicht maximal. Da wir $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ nur bis auf Konjugation mit einem Element aus $A_\mathfrak{p}^*$ beschreiben wollen und unter Berücksichtigung der möglichen Gestalt der beiden Maximalordnungen, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß es sich bei einer dieser Maximalordnungen um $M_2(R_\mathfrak{p})$ selbst handelt. Die andere schreiben wir in der Form $x^{-1}M_2(R_\mathfrak{p})x$, wobei angenommen werden kann, daß $x \in A_\mathfrak{p}^*$ in der in (2.1) beschriebenen Normalform gegeben ist. Wir unterscheiden die zwei Möglichkeiten.

Ist $b = 0$, so ist

$$x^{-1}M_2(R_\mathfrak{p})x = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{-r} & 0 \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{r} & 0 \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & \pi_\mathfrak{p}^{s-r} R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p}^{r-s} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix}.$$

Ist hingegen $b = u\pi_\mathfrak{p}^t \neq 0$ mit $u \in R_\mathfrak{p}^*$ und $t < s$, so hat man mit $t' := t - s - r < -r$

$$\begin{aligned} x^{-1}M_2(R_\mathfrak{p})x &= \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{-r} & -u\pi_\mathfrak{p}^{t'} \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{r} & u\pi_\mathfrak{p}^{t} \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^{s} \end{pmatrix} \\ &\overset{t' \leq -r}{=} \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{t'} R_\mathfrak{p} & \pi_\mathfrak{p}^{t'} R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p}^{-s} R_\mathfrak{p} & \pi_\mathfrak{p}^{-s} R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{r} & u\pi_\mathfrak{p}^{t} \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^{s} \end{pmatrix} \overset{t \leq s}{=} \pi_\mathfrak{p}^{t-s} \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & \pi_\mathfrak{p}^{t-r} R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p}^{r-t} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In beiden Fällen entspricht also $x^{-1}M_2(R_\mathfrak{p})x$ im wesentlichen (d.h. bis auf den Vorfaktor $\pi_\mathfrak{p}^{t-s}$ im zweiten Fall) dem Matrizenring

$$\begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & \pi_\mathfrak{p}^{-k'} R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p}^{k'} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit } k' = r - s \text{ bzw. } k' = r - t.$$

Bildet man den Durchschnitt hiervon mit $M_2(R_\mathfrak{p})$, so verschwindet (mindestens) einer der Faktoren $\pi_\mathfrak{p}^{-k'}$ oder $\pi_\mathfrak{p}^{k'}$, je nachdem ob $k' \geq 0$ oder $k' \leq 0$ ist. Auch der Vorfaktor $\pi_\mathfrak{p}^{t-s}$ aus dem zweiten Fall von oben wird im Durchschnitt mit $M_2(R_\mathfrak{p})$ nicht mehr auftauchen, da $t - s < 0$ ist. Insgesamt erhalten wir also

$$x^{-1}M_2(R_\mathfrak{p})x \,\cap\, M_2(R_\mathfrak{p}) = y \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p}^{k} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} y^{-1},$$

dabei ist $k = |k'|$ und $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, falls $k = k'$, bzw. $y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, falls $k = -k'$. Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ von der behaupteten Gestalt ist. □

Im Beweis wurden Fälle unterschieden, je nachdem ob $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ maximal ist oder nicht. Man kann sich leicht überlegen, daß es nur endlich viele Primideale geben kann, an denen $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ nicht maximal ist. Dazu brauchen wir jedoch einen weiteren bekannten Satz.

Satz 2.2.4 (Elementarteilersatz). *In einem K-Vektorraum V der Dimension n seien $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ endlich erzeugte R-Moduln mit $K\mathfrak{M}_1 = K\mathfrak{M}_2 = V$. Dann existieren eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und gebrochene Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n$ von K, so daß sich $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$ darstellen lassen als*

$$\begin{array}{rclcccc} \mathfrak{M}_1 & = & \mathfrak{a}_1 v_1 & + & \ldots & + & \mathfrak{a}_n v_n, \\ \mathfrak{M}_2 & = & \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 v_1 & + & \ldots & + & \mathfrak{c}_n\mathfrak{a}_n v_n, \end{array} \tag{2.3}$$

wobei die $\mathfrak{c}_i$ die Bedingung

$$\mathfrak{c}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{c}_n$$

erfüllen. Die Ideale $\mathfrak{c}_i$ mit dieser Eigenschaft sind eindeutig bestimmt. Ist sogar $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$, so sind die $\mathfrak{c}_i$ ganze Ideale.

Beweis. Den Beweis des Elementarteilersatzes in der ein oder anderen Gestalt findet man in vielen Büchern zur Linearen Algebra oder Algebra. In obiger Form wird er zum Beispiel auch im Buch [16, Theorem 81:11] von O. T. O'Meara bewiesen. $\square$

Wir betrachten nun also die Lokalisierung $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ einer Eichler-Ordnung $\mathfrak{O} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ nach einem Primideal $\mathfrak{p}$ von K. Die beiden Maximalordnungen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ können nach dem Elementarteilersatz auf die Gestalt (2.3) gebracht werden. Die auftretenden $\mathfrak{c}_i$ sind gebrochene Ideale von K, also von der Form

$$\mathfrak{c}_i = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{c}_i)}, \qquad \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{c}_i) \in \mathbb{Z}, \quad \text{fast alle } \nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{c}_i) = 0.$$

Die Lokalisierungen $\mathfrak{M}_{1,\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{M}_{2,\mathfrak{p}}$ sind genau dann identisch, wenn nach einem $\mathfrak{p}$ lokalisiert wird, das in keinem der $\mathfrak{c}_i$ vorkommt, also wenn $\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{c}_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Insbesondere folgt sofort, daß in einem solchen Fall $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_{1,\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}_{2,\mathfrak{p}}$ ist. Demzufolge ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ genau dann nicht maximal, wenn $\mathfrak{p}$ eines der endlich vielen in den $\mathfrak{c}_i$ vorkommenden Primideale von K ist.

Sofort einsichtig ist auch, daß $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ maximal ist, wenn $\mathfrak{p}$ die Diskriminante D_1 teilt, denn in diesem Fall hat $A_\mathfrak{p}$ nur eine einzige Maximalordnung, so daß die Schnittbildung offensichtlich nichts bewirkt.

Zusammen mit dem zuletzt bewiesenen Korollar gibt dies Anlaß zu folgender Definition.

Definition 2.2.5. Eine Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ heißt *von der Stufe* (D_1, D_2), wenn D_1 die Diskriminante von A ist und D_2 ein zu D_1 teilerfremdes Ideal mit den beiden Eigenschaften

(i) für alle $\mathfrak{p} \nmid D_2$ ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ maximal,

(ii) für alle $\mathfrak{p} \mid D_2$ ist der in (2.2) auftretende Exponent k genau $v_\mathfrak{p}(D_2)$.

Die Potenz, mit der ein $\mathfrak{p}$ in D_2 aufgeht, beschreibt also die Gestalt der Ordnung im Lokalen.

Um die nachfolgenden Beweise und Berechnungen übersichtlich zu halten, werden wir nicht den allgemeinen Fall betrachten und beliebige $\mathfrak{p}$-Potenzen in D_2 zulassen. Stattdessen beschränken wir uns auf den Fall, daß D_2 quadratfrei ist. Für den allgemeinen Fall sei auf die Ausführungen im Buch [21, S. 39ff] von M.-F. Vignéras verwiesen.

Vereinbarung 2.2.6. Wir betrachten nur diejenigen Eichler-Ordnungen $\mathfrak{O}$, für die der im Fall $\mathfrak{p} \mid D_2$ auftretende Exponent k den Wert $k = 1$ hat. Mit anderen Worten: Es sei D_2 stets quadratfrei. Wir sagen daher in diesem Fall auch, die Ordnung $\mathfrak{O}$ sei *von quadratfreier Stufe.*

Die Situation, mit der wir uns beschäftigen, sieht demnach wie folgt aus.

Korollar 2.2.7. *Sei $\mathfrak{O}$ eine Eichler-Ordnung der Quaternionenalgebra A von quadratfreier Stufe (D_1, D_2). Dann gilt für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ von K*

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}_\mathfrak{p} &= \{a \in A_\mathfrak{p} \mid \mathrm{nrd}(a) \in R_\mathfrak{p}\} && \text{für } \mathfrak{p} \mid D_1, \\ \mathfrak{O}_\mathfrak{p} &= a \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} a^{-1} && \text{für } \mathfrak{p} \mid D_2, \\ \mathfrak{O}_\mathfrak{p} &= a \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} a^{-1} && \text{für } \mathfrak{p} \nmid D_1 D_2, \end{aligned}$$

mit geeigneten $a \in A_\mathfrak{p}^*$. □

2.3 Ordnungen in Zahlkörpern

Wir wollen nun die Überlegungen aus dem Abschnitt 1.3 wieder aufgreifen und uns noch einmal den quadratischen Zwischenerweiterungen L der positiv definiten Quaternionenalgebra A widmen. Es stellt sich hier insbesondere die Frage, welche Information man aus der Kenntnis der Ordnungen von L über die Eigenschaften der Eichler-Ordnungen von A gewinnen kann.

Im folgenden seien also neben der positiv definiten Quaternionenalgebra A wieder ein Element $a \in A^*$, $a \notin K$ und der von a erzeugte total imaginäre Zwischenkörper $L := K(a)$ fixiert. Alle vorkommenden Eichler-Ordnungen seien von quadratfreier Stufe.

Lemma 2.3.1. *Ist $\mathfrak{O}$ eine beliebige Ordnung von A, so ist*

$$O := \mathfrak{O} \cap L$$

eine Ordnung des Zahlkörpers L, d. h. ein Teilring von R_L, der als $\mathbb{Z}$-Modul maximalen Rang hat.

Beweis. Es ist offensichtlich O ein Ring, und jedes Element $x \in O$ ist ganz über R_K, liegt also in R_L. Für die freien $\mathbb{Z}$-Moduln O und R_L gilt demnach

$$\mathrm{rang}(O) \leq \mathrm{rang}(R_L) = [L : \mathbb{Q}],$$

und es muß nur noch gezeigt werden, daß Gleichheit gilt. Sei $\eta \in A$ ein Element mit $L = \mathbb{Q}(\eta)$. Es gilt einerseits die Beziehung $A = K\mathfrak{O}$, andererseits $K = \mathbb{Q}R_K$. Da zudem $R_K\mathfrak{O} = \mathfrak{O}$ ist, können wir A auch schreiben als $A = \mathbb{Q}\mathfrak{O}$, und somit kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß η bereits in $\mathfrak{O}$ und damit in O liegt. Es gelten die Inklusionen

$$\mathbb{Z}[\eta] \subseteq O \subseteq R_L,$$

und da auch $\mathbb{Z}[\eta]$ maximalen Rang hat, gilt $\mathrm{rang}(O) = [L : \mathbb{Q}]$, und die Behauptung ist gezeigt. □

Bemerkung. Man beachte, daß eine beliebige Ordnung von L den Ganzheitsring R_K von K nicht notwendigerweise enthalten muß. Ist beispielsweise $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $L = K(\sqrt{-1})$, so sind die zugehörigen Ganzheitsbasen

$$R_K = \left\langle 1, \sqrt{2} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \qquad \text{und} \qquad R_L = \left\langle 1, \eta, \frac{1}{2}(\eta^2+1), \frac{1}{12}(\eta^3+3\eta^2-5\eta-3) \right\rangle_{\mathbb{Z}},$$

wobei $\eta := \sqrt{2}+\sqrt{-1}$ ein primitives Element von $L \mid \mathbb{Q}$ ist. Wählen wir als Ordnung in L etwa den Ring $O = \mathbb{Z}[\eta] = \langle 1, \eta, \eta^2, \eta^3 \rangle_{\mathbb{Z}}$, so hat das Element $\sqrt{2} \in R_K$ bezüglich dieser Basis über $\mathbb{Q}$ die eindeutige Darstellung

$$\sqrt{2} = -\frac{1}{6}\eta^3 + \frac{5}{6}\eta$$

und liegt damit offensichtlich nicht in O.

Für diejenigen Ordnungen von L hingegen, die wie in Lemma (2.3.1) von einer Eichler-Ordnung herkommen, wissen wir wegen $R_K \subseteq \mathfrak{O}$ sehr wohl, daß

$$R_K \subseteq \mathfrak{O} \cap L = O$$

ist, und diese Tatsache werden wir im folgenden oft benutzen. □

Nach dieser Bemerkung stellt sich nun die Frage, wie man entscheiden kann, ob eine gegebene Ordnung O von L von einer Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ von A herkommt. Um dies zu beantworten, brauchen wir den Begriff des Führers.

Definition 2.3.2. Sei O eine beliebige Ordnung von L. Der *Führer* $\mathfrak{f}(O)$ ist das größte ganze Ideal $\mathfrak{f}$ von K, das

$$\mathfrak{f}R_L \subseteq O$$

erfüllt. Wir setzen außerdem

$$\mathfrak{F}(O) = \mathfrak{f}(O)R_L.$$

Wenn klar ist, auf welche Ordnung wir uns beziehen, schreiben wir auch einfach $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ anstelle von $\mathfrak{f}(O)$ bzw. $\mathfrak{F}(O)$.

Bemerkung. Oft bezeichnet man nicht $\mathfrak{f}(O)$, sondern das R_L-Ideal $\mathfrak{F}(O) = \mathfrak{f}(O)R_L$ als den Führer von O. Dieses ist das größte Ideal von L, das in O enthalten ist.

Man kann zeigen, daß es zu jedem ganzen Ideal $\mathfrak{f}$ von K eine eindeutig bestimmte Ordnung O von L gibt mit $\mathfrak{f}(O) = \mathfrak{f}$. □

Lemma 2.3.3. *Sind O und O' zwei Ordnungen von L. Dann gilt*

$$O \subseteq O' \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{f}(O) \subseteq \mathfrak{f}(O').$$

Eine Ordnung ist genau dann maximal, wenn ihr Führer trivial ist, also wenn $\mathfrak{f}(O) = R_K$ gilt.

Beweis. Beide Behauptungen folgen unmittelbar aus der Definition und der nachfolgenden Bemerkung. □

Lemma 2.3.4. *Sei $L := K(a)$ wie oben imaginärquadratisch. Dann gibt es nur endlich viele Ordnungen O von L mit $R_K \subseteq O$, die a enthalten.*

Beweis. Ist $a \notin R_L$, so ist a nicht ganz, und es kann überhaupt keine Ordnung geben, die a enthält. Andernfalls ist $R_K[a]$ selbst eine Ordnung von L, und jede Ordnung O, die sowohl R_K als auch a enthält, umfaßt offensichtlich schon ganz $R_K[a]$. Damit gilt nach Lemma (2.3.3) für die zugehörigen Führer die Beziehung

$$\mathfrak{f}(R_K[a]) \subseteq \mathfrak{f}(O).$$

Als ganzes Ideal von K hat $\mathfrak{f}(R_K[a])$ aber nur endlich viele Teiler, und diese entsprechen eineindeutig den — folglich ebenfalls endlich vielen — über $R_K[a]$ liegenden Ordnungen O. □

Bemerkung. Der Beweis ist konstruktiv. Um alle Ordnung zu finden, in denen neben R_K auch a enthalten ist, berechne man den Führer $\mathfrak{f}(R_K[a])$ und bestimme sämtliche Teiler hiervon. Zu jedem Teiler $\mathfrak{c}$ ist dann $\mathfrak{c}R_L$ eine Ordnung mit den gewünschten Eigenschaften, und sämtliche derartigen Ordnungen werden auf diese Weise erreicht. □

Satz 2.3.5. *Sei O eine Ordnung vom Führer $\mathfrak{f}$ von L. Es gibt genau dann eine Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ der Stufe (D_1, D_2) in A, so daß $O = \mathfrak{O} \cap L$ ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind*

(i) $\mathfrak{p} \mid D_1 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$,

(ii) $\mathfrak{p} \mid D_2 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$ *oder* $\mathfrak{p}$ *ist nicht träge in* L.

Beweis. M. Eichler beweist diesen Satz in [6, Satz 6]. □

Definition 2.3.6. Für eine Ordnung O von L mit Führer $\mathfrak{f}$ setzen wir

$$E_{(D_1,D_2)}(O) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right).$$

Dabei ist $\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\}$ das *Eichler-Symbol* und ist definiert durch

$$\left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}, \\ \left(\frac{L}{\mathfrak{p}}\right), & \text{falls } \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f} \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad \left(\frac{L}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} -1, & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ in } L \text{ träge ist,} \\ 0, & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ in } L \text{ verzweigt ist,} \\ 1, & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ in } L \text{ zerlegt ist.} \end{cases}$$

Mit dieser Definition läßt sich Satz (2.3.5) bequem in der folgenden kompakten Form zusammenfassen:

Korollar 2.3.7. *Sei L eine imaginärquadratische Zwischenerweiterung in A, und sei O eine Ordnung von L. Dann gilt*

$$\begin{array}{c}\textit{Es gibt in } A \textit{ eine Eichler-Ordnung } \mathfrak{O} \\ \textit{der Stufe } (D_1, D_2) \textit{ mit } O = \mathfrak{O} \cap L\end{array} \iff E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0.$$

Beweis. Das einzige, was hier nicht direkt offensichtlich ist, ist, daß im Fall $\mathfrak{p} \mid D_1$ das Primideal $\mathfrak{p}$ in L niemals zerlegt sein kann. Dies hatten wir aber bereits früher in Korollar (1.4.10) festgehalten. $\square$

Bemerkung. Sei $L \mid K$ eine imaginärquadratische Erweiterung, wobei jetzt nicht unbedingt $L \subseteq A$ gelte, und sei O eine Ordnung von L. Auch für diese Ordnung läßt sich der Wert $E_{(D_1,D_2)}(O)$ formal berechnen; eine Interpretation im Sinne von Korollar (2.3.7) ist jedoch mit Vorsicht zu genießen. Ist nämlich $L \not\subseteq A$, so ist für jede Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ von A immer

$$\mathfrak{O} \cap L = R_K \neq O$$

und zwar unabhängig von dem Wert, den $E_{(D_1,D_2)}(O)$ liefert. $\square$

Lemma 2.3.8. *Sei $L \mid K$ eine imaginärquadratische Erweiterung, nicht notwendig $L \subseteq A$, und sei O eine Ordnung von L. Ist $E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0$, so läßt L sich K-isomorph nach A einbetten.*

Beweis. Nach einem Satz, den man bei F. Lorenz in [13, § 29*, 29.10] findet, läßt L sich K-isomorph nach A einbetten, wenn L ein Zerfällungskörper von A ist und $[A : K] = [L : K]^2$ gilt. Die Dimensionsbedingung macht hier keine Schwierigkeiten, und es bleibt zu zeigen, daß L ein Zerfällungskörper für A ist. In Lemma (1.4.8) hatten wir gesehen, daß es genügt zu überprüfen, ob

$$s(A_\mathfrak{p}) \mid [L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}] \qquad \text{an jeder Stelle } \mathfrak{P} \mid \mathfrak{p} \tag{2.4}$$

gilt. Wir erinnern uns, daß der Schurindex $s(A_\mathfrak{p})$ den Wert 1 annimmt, falls $A_\mathfrak{p} \cong M_2(K_\mathfrak{p})$ ist, und 2 andernfalls. Die Bedingung (2.4) kann daher nur in den Fällen $\mathfrak{p} \mid \infty$ oder $\mathfrak{p} \mid D_1$ verletzt sein, wo $A_\mathfrak{p}$ eine Divisionsalgebra ist.

Sind $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ archimedische Stellen, so ist aber $[L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}] = 2$, da $L \mid K$ als imaginärquadratisch vorausgesetzt war.

Ist $\mathfrak{p} \mid D_1$, so ist das Eichler-Symbol

$$\left\{ \frac{O}{\mathfrak{p}} \right\} \neq 1,$$

denn ebenfalls nach Voraussetzung ist $E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0$. Damit kann aber $\mathfrak{p}$ in L nicht zerfallen. Somit ist auch in diesem Fall $[L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}] = 2$, und die Bedingung (2.4) ist überall erfüllt. $\square$

Korollar 2.3.9. *Sei $L \mid K$ eine imaginärquadratische Erweiterung, nicht notwendig $L \subseteq A$, und sei O eine Ordnung von L. Dann gilt*

$$\begin{array}{c} \textit{Es gibt in } A \textit{ eine Eichler-Ordnung } \mathfrak{O} \textit{ der Stufe } (D_1, D_2) \\ \textit{und eine zu } O \textit{ isomorphe Ordnung } O' \\ \textit{mit } O' = \mathfrak{O} \cap \mathrm{Quot}(O') \end{array} \iff E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0.$$

Beweis. Entweder ist $E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0$, dann finden wir nach dem soeben gezeigten Lemma eine Ordnung O' innerhalb von A, die K-isomorph zu O ist. Es ist

$$E_{(D_1,D_2)}(O') = E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0,$$

und Anwenden von Korollar (2.3.7) liefert die Behauptung.

Ist hingegen $E_{(D_1,D_2)}(O) = 0$, so wissen wir nicht, ob es überhaupt eine zu O isomorphe Ordnung in A gibt. Falls ja, folgt wie im ersten Fall die Behauptung aus Korollar (2.3.7). Falls nein, gilt aber $\mathfrak{O} \cap \mathrm{Quot}(\mathrm{O}') = R_K \neq O'$ für alle zu O isomorphen Ordnungen O', und dies beweist die Aussage. □

Liegt über einer gegebenen Ordnung O von L eine Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ von A, so ist letztere jedoch im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr gilt folgender Satz.

Satz 2.3.10. *Sei wie immer $\mathfrak{O}$ eine Eichler-Ordnung von A, $L \mid K$ ein imaginärquadratischer Zwischenkörper und O die durch $O = \mathfrak{O} \cap L$ gegebene Ordnung von L.*

(i) Ist $\mathfrak{O}'$ eine weitere Eichler-Ordnung mit denselben Invarianten (D_1, D_2) wie $\mathfrak{O}$, für die $\mathfrak{O}' \cap L = O = \mathfrak{O} \cap L$ gilt, dann existiert ein invertierbares O-Ideal $\mathfrak{A}$ mit

$$\mathfrak{O}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}\mathfrak{A}.$$

(ii) Ist $\mathfrak{A}$ ein invertierbares O-Ideal, so gilt

$$\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{A}) \cap L = O.$$

Beweis. Der Beweis wird lokal geführt, wo man wieder die Fälle zu unterscheiden hat, in denen das zu betrachtende Primideal D_1, D_2 oder keines von beiden teilt. Man findet ihn bei M. Eichler in [6, Satz 7]. □

Im Hinblick auf dieses Lemma wollen wir also zum Schluß dieses Abschnitts auf O-Ideale in L näher eingehen. Details und Beweise der folgenden Sätze schlage man bei J. Neukirch [14, Kapitel I, § 12] nach.

Sei in dem algebraischen Zahlkörper L eine beliebige Ordnung O gegeben. Analog zu den gewöhnlichen gebrochenen Idealen von L definiert man ein *gebrochenes O-Ideal* als einen endlich erzeugten O-Modul in L.

Nun sind beliebige Ordnungen eines Zahlkörpers keine Dedekindringe mehr, da sie nicht ganz abgeschlossen zu sein brauchen. Man stellt fest, daß dies bereits zur Konsequenz hat, daß die gebrochenen O-Ideale keine Gruppe mehr bilden. Um wieder eine Gruppenstruktur zu erhalten, muß man die Menge der zu betrachtenden O-Ideale weiter einschränken, nämlich auf die invertierbaren O-Ideale. Dabei heißt ein gebrochenes O-Ideal $\mathfrak{A}$ naheliegenderweise *invertierbar*, wenn es ein weiteres gebrochenes O-Ideal $\mathfrak{B}$ mit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = O$$

gibt.

Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von L. Unter der *Lokalisierung* eines O-Ideals $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{P}$ verstehen wir

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}} = O_{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}.$$

Es gilt der folgende Satz.

Satz 2.3.11. *Ein O-Ideal $\mathfrak{A}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathfrak{A}$ lokal an jeder endlichen Primstelle von L ein Hauptideal ist.*

Beweis. Diesen Satz mit Beweis findet man bei J. Neukirch [14, § I.12, Satz (12.4)]. □

Es sei abschließend erwähnt, daß man analog zur Idealklassengruppe von L auch die Picardgruppe von L bezüglich der Ordnung O definieren kann. Der wesentliche Unterschied ist, daß man anstelle der gewöhnlichen gebrochenen Ideale invertierbare O-Ideale betrachtet.

Wir bezeichnen also mit $J(O)$ die Gruppe der invertierbaren O-Ideale und mit $P(O)$ die darin enthaltene Untergruppe der gebrochenen O-Hauptideale.

Definition und Lemma 2.3.12. Die *Picardgruppe* $Pic(O)$ von O ist definiert als

$$Pic(O) = J(O)\big/P(O) \,.$$

Die Picardgruppe ist endlich, und wir bezeichnen mit

$$h(O) = \#Pic(O)$$

ihre Mächtigkeit.

Satz 2.3.13. *Für eine Ordnung O mit Führer $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F} = R_L\mathfrak{f}$ gilt*

$$h(O) = \frac{h_L}{[R_L^* : O^*]} \frac{\#(R_L/\mathfrak{F})^*}{\#(O/\mathfrak{F})^*},$$

dabei bezeichne wie üblich h_L die Idealklassenzahl von L bezüglich der Maximalordnung R_L.

Beweis. Den Beweis dieser Formel, die auch die Endlichkeit von $Pic(O)$ impliziert, findet man beispielsweise bei J. Neukirch [14, § I.12, Theorem (12.12)]. □

2.4 Die Einheitenindizes

Für die konkrete Auswertung der Klassenzahlformel, die in Kapitel 3 hergeleitet wird, wird es nötig werden, für eine gegebene Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ den Index $[\mathfrak{O}^* : R_K^*]$ zu berechnen. Wir wollen in diesem Abschnitt dieses Problem etwas vereinfachen, indem wir es auf die Berechnung von Indizes der Form $[O^* : R_K^*]$ reduzieren, wo jetzt O gewisse Ordnungen von quadratischen Zwischenerweiterungen durchläuft.

Wir fixieren wie immer die imaginärquadratische Erweiterung $L \mid K$ in A und beweisen zur Vorbereitung folgende zwei Lemmata.

Lemma 2.4.1. *Seien O und O' zwei Ordnungen in L, die beide R_K enthalten. Falls O und O' zueinander K-isomorph sind, so gilt bereits $O = O'$.*

Beweis. Der K-Isomorphismus $\psi : O \to O'$ setzt sich zu einem K-Automorphismus von $L = \mathrm{Quot}(O)$ fort, den wir ebenfalls mit ψ bezeichnen. Die Erweiterung $L \,|\, K$ ist vom Grad 2, also galoissch, etwa mit Galoisgruppe $G = \{\mathrm{id}, \tau\}$.

Ist $\psi = \mathrm{id}$, so ist nichts zu zeigen.

Andernfalls ist $\psi = \tau$, und wir müssen uns überlegen, daß auch der Automorphismus τ die Ordnung O wieder in sich überführt. Wir wenden Lemma (1.3.6) auf die Inklusionsabbildung $\sigma : L \to \bar{L}$ an. Für ein Element $x \in O$ gilt demnach

$$\tau(x) = \bar{x} = \mathrm{tr}(x) - x \in O,$$

da $\mathrm{tr}(x) \in R_K \subseteq O$ ist. Also folgt $\tau(O) \subseteq O$. Umgekehrt ist $O = \tau(\tau(O)) \subseteq \tau(O)$, da wir dieselbe Argumentation auch auf $\tau(O) = O'$ anwenden können. □

Lemma 2.4.2. *Es sei eine Ordnung O von L gegeben mit $R_K \subseteq O$. Sei $x \in O^*$. Dann ist $x(\bar{x})^{-1}$ eine in O gelegene Einheitswurzel.*

Beweis. Die Menge der Einheitswurzeln in L wird beschrieben durch

$$W(L) := \{y \in L^* \mid |y|_w = 1 \text{ für alle Bewertungen } |\cdot|_w \text{ auf } L\}$$

(siehe beispielsweise O. T. O'Meara [16, § 33F]). Daß ein Element y unter allen Bewertungen, die zu nichtarchimedischen Primstellen gehören, den Wert 1 annehmen soll, heißt gerade, daß y in R_L^* liegt. Weiter ist in unserem Fall L total imaginär, und somit sind alle archimedischen Stellen komplex. Insgesamt können wir $W(L)$ also in der folgenden Form schreiben

$$W(L) = \{y \in R_L^* \mid |\sigma(y)|^2 = 1 \text{ für alle Einbettungen } \sigma : L \to \mathbb{C}\},$$

und wir müssen zeigen, daß $y := \frac{x}{\bar{x}}$ in $W(L) \cap O$ liegt.

Zunächst ist $x \in O^*$ ganz über R_K und somit ist auch $\mathrm{nrd}(x) = N_K^L(x) \in R_K^* \subseteq O^*$, und demzufolge $(\bar{x})^{-1} = (\mathrm{nrd}(x))^{-1}x \in O^*$. Das Element $y = \frac{x}{\bar{x}}$ liegt also in O^*.

Sei nun $\sigma : L \to \mathbb{C}$ eine Einbettung mit der Einschränkung $\sigma|_K : K \to \mathbb{R}$ auf den total reellen Teilkörper K. Wir sind damit in der Situation des Lemmas (1.3.6) mit $F = \mathbb{C}$, und der nichttriviale $\sigma(K)$-Automorphismus τ ist hier die gewöhnliche komplexe Konjugation. Dies ergibt

$$|\sigma(y)|^2 = \sigma(y)\tau\sigma(y) = \sigma(y\bar{y}) = \sigma\left(\frac{x}{\bar{x}}\frac{\bar{x}}{x}\right) = \sigma(1) = 1,$$

und y ist wie behauptet eine Einheitswurzel. □

Für die Berechnung der Indizes $[\mathfrak{O}^* : R_K^*]$ bzw. $[O^* : R_K^*]$ wird der sogenannte Einheitenindex von O eine tragende Rolle spielen.

Definition 2.4.3. Es seien O eine Ordnung von L mit $R_K \subseteq O$ und $W(O)$ die Menge der in O enthaltenen Einheitswurzeln. Der Index

$$Q(O) := [O^* : W(O)R_K^*]$$

heißt der *Einheitenindex* von O. Ist $O = R_L$ die Hauptordnung von L, so schreiben wir auch Q_L anstelle von $Q(R_L)$.

Proposition 2.4.4. *In der Situation von Definition (2.4.3) gilt:*

(i) $Q(O) = 1$ *oder* $Q(O) = 2$.

(ii) $[O^* : R_K^*] = \frac{Q(O)}{2}\#W(O)$

Beweis. Nach den Isomorphiesätzen gilt zunächst

$$O^*\Big/W(O)R_K^* \cong \left(O^*\Big/R_K^*\right)\Big/\left(W(O)R_K^*\Big/R_K^*\right)$$

und für den hinteren Faktor

$$\begin{aligned} W(O)R_K^*\Big/R_K^* &\cong W(O)\Big/(W(O)\cap R_K^*) \\ &\cong W(O)\Big/\{\pm 1\} \\ &\cong (W(O))^2. \end{aligned}$$

Für den Gruppenindex gilt daher die Beziehung

$$[W(O)R_K^* : R_K^*] = \frac{1}{2}\#W(O). \tag{2.5}$$

Untersuchen wir nun den anderen Faktor O^*/R_K^* näher. Der Homomorphismus

$$\varphi : O^* \to W(O), \quad \eta \mapsto \frac{\eta}{\bar{\eta}}$$

ist nach Lemma (2.4.2) wohldefiniert und hat den Kern

$$\ker\varphi = \{\eta \in O^* \mid \eta = \bar{\eta}\} = O^* \cap K = R_K^*.$$

Da ein Element η, das selbst bereits eine Einheitswurzel in O^* ist, auf η^2 abgebildet wird, liegt $(W(O))^2$ im Bild von φ. Genauer gelten die folgenden Inklusionen

$$(W(O))^2 \subseteq \operatorname{Im}\varphi \cong O^*\Big/R_K^* \subseteq W(O).$$

Nun sind $W(O)$ und $(W(O))^2$ zyklische Gruppen mit Index $[W(O) : (W(O))^2] = 2$. Es bleiben daher für O^*/R_K^* nur die beiden Möglichkeiten

$$O^*\Big/R_K^* \cong W(O) \qquad \text{oder} \qquad O^*\Big/R_K^* \cong (W(O))^2, \tag{2.6}$$

und entsprechend gilt für den Einheitenindex unter Benutzung von (2.5)

$$Q(O) = \frac{[O^* : R_K^*]}{[W(O)R_K^* : R_K^*]} = \begin{cases} 2, & \text{falls } O^*/R_K^* \cong W(O) \\ 1, & \text{falls } O^*/R_K^* \cong (W(O))^2 \end{cases},$$

und andere Fälle treten nach (2.6) nicht auf, womit Teil (i) bewiesen ist. Offensichtlich lassen sich die beiden Fälle direkt in der in Teil (ii) behaupteten Formel zusammenfassen. □

Für den Fall, daß L ein abelscher Zahlkörper ist, findet man bei H. Hasse in [9, Kapitel III.20 ff.] Kriterien, nach denen zu entscheiden ist, ob Q_L den Wert 1 oder 2 annimmt. Demselben Buch ist auch obiger Beweis entnommen, verallgemeinert auf den nichtabelschen Fall und für beliebige Ordnungen von L. Die weiteren Sätze zur Bestimmung von Q_L, die man bei H. Hasse findet, lassen sich jedoch im allgemeinen nicht auf nichtabelsche Zahlkörper übertragen und sind auf unsere Situation daher nur bedingt anwendbar.

Wir haben aber die folgende Proposition.

Proposition 2.4.5. *Es sei $n = [K : \mathbb{Q}]$, und wir bezeichnen mit Reg_K bzw. Reg_L den Regulator von K bzw. L. Dann gilt*

$$Q_L = \frac{\mathrm{Reg}_K}{\mathrm{Reg}_L}\, 2^{n-1}. \tag{2.7}$$

Beweis. Diese Proposition findet man mit Beweis bei L. C. Washington [22, Proposition 4.16]. □

Bemerkung. Die Kenntnis der Regulatoren Reg_K und Reg_L setzt implizit Informationen über die Fundamentaleinheiten in K bzw. L voraus. Kennt man überdies sogar Elemente in L, die die Einheitengruppe O^* der Ordnung O erzeugen, so kann man in diesen Fällen mit einer ähnlichen Formel wie (2.7) auch den Einheitenindex $Q(O)$ berechnen. Diese Formel ist ebenfalls im Buch von L. C. Washington zu finden [22, Lemma 4.15], sie wird uns aber zur konkreten Berechnung von $Q(O)$ nicht viel helfen, da wir die Fundamentaleinheiten in O^* im allgemeinen nicht kennen. □

Satz 2.4.6. *Sei A eine positiv definite Quaternionenalgebra über einem total reellen Zahlkörper K, und sei $\mathfrak{O}$ eine Ordnung von A. Dann ist*

$$e := [\mathfrak{O}^* : R_K^*]$$

endlich.

Beweis. Der Beweis steht bei M. Eichler [6, § 1, Satz 2]. □

Sei $\bar{K}$ ein beliebiger, aber fest gewählter algebraischer Abschluß von K. Ein Element $a \in \mathfrak{O}^*$, $a \notin K$ sei gegeben. Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

(i) $\varphi_a : K(a) \to \bar{K}$ sei eine K-Einbettung,

(ii) $K_a := \varphi_a(K(a))$ das Bild von $K(a)$ unter φ_a,

(iii) $O_a := \varphi_a(\mathfrak{O} \cap K(a))$, dies ist eine Ordnung von K_a,

(iv) $Y_{\mathfrak{O}} := \{O_b \mid b \in \mathfrak{O}^*,\, b \notin K\}$,

(v) Für eine beliebige Ordnung O eines Körpers L sei

$$g_{\mathfrak{O}}(O) := \#\{O' \mid O' = \mathfrak{O} \cap L' \text{ für einen Körper } L' \text{ und } O' \cong O\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \bar{K} \arrow[dd, dash] \\
\mathfrak{O} \arrow[ddr, dash] & & & \\
 & & K(a) \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[dl, dash] & K_a \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
 & \mathfrak{O} \cap K(a) \arrow[r, "\varphi_a"] & O_a & \\
 & & & K
\end{tikzcd}$$

Damit können wir folgendes Lemma formulieren.

Lemma 2.4.7. *Es gilt für den in Satz (2.4.6) definierten Index $e = [\mathfrak{O}^* : R_K^*]$*

$$e = 1 + \sum_{O \in Y_{\mathfrak{O}}} g_{\mathfrak{O}}(O)\big([O^* : R_K^*] - 1\big).$$

Beweis. Innerhalb dieses Beweises werden wir außer $\mathfrak{O}$ keine weiteren Eichler-Ordnungen betrachten und schreiben deshalb kurz $g(O)$ für $g_{\mathfrak{O}}(O)$ und Y für $Y_{\mathfrak{O}}$.

Wir fixieren zunächst ein $a \in \mathfrak{O}^*$, $a \notin K$ wie oben. Es seien $X_1^{(a)}, \ldots, X_{g(O_a)}^{(a)}$ alle diejenigen Ordnungen von der Form $\mathfrak{O} \cap L$ mit geeignetem Körper L, die zu O_a isomorph sind, also

$$X_i^{(a)} = \mathfrak{O} \cap L_i \cong O_a \cong \mathfrak{O} \cap K(a) \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, g(O_a).$$

Die $X_i^{(a)}$ seien paarweise verschieden.

Sei $b \in \mathfrak{O}^*$, $b \notin K$ beliebig. Auch für dieses Element betrachten wir $\mathfrak{O} \cap K(b)$ und O_b. Wir zeigen folgende Äquivalenz

$$O_b = O_a \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{O} \cap K(b) = X_i^{(a)} \text{ für genau ein } i \in \{1, \ldots, g(O_a)\}. \tag{2.8}$$

Die Implikation von links nach rechts ist direkt klar, denn mit $O_b = O_a$ folgt offensichtlich $\mathfrak{O} \cap K(b) \cong O_a$. Nach Konstruktion muß daher $\mathfrak{O} \cap K(b)$ in der Menge $\{X_1^{(a)}, \ldots, X_{g(O_a)}^{(a)}\}$ enthalten sein.

Haben wir umgekehrt $\mathfrak{O} \cap K(b) = X_i^{(a)}$ für ein geeignetes $i \in \{1, \ldots, g(O_a)\}$, so ist $\mathfrak{O} \cap K(b) \cong \mathfrak{O} \cap K(a)$. Diese Isomorphie überträgt sich auf die Quotientenkörper $K(b)$ und $K(a)$ und auf die Ordnungen O_b und O_a. Somit gilt

$$O_b \cong O_a \qquad \text{und} \qquad K_b \cong K(b) \cong K(a) \cong K_a.$$

Die beiden Körper K_a und K_b liegen aber nach Konstruktion im selben algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K und sind über K quadratisch, also normal. Sie müssen somit bereits übereinstimmen. Nach Lemma (2.4.1) folgt $O_b = O_a$ wie gefordert.

Wir erhalten unter Verwendung von (2.8) und der Tatsache, daß $(\mathfrak{O} \cap K(b))^* = \mathfrak{O}^* \cap K(b)$ ist, folgende disjunkte Zerlegung

$$\begin{aligned}
\mathfrak{O}^* \smallsetminus R_K^* &= \bigcup_{O_a \in Y} \{b \in \mathfrak{O}^*,\, b \notin K \mid O_b = O_a\} \\
&= \bigcup_{O_a \in Y} \bigcup_{i=1}^{g(O_a)} \{b \in \mathfrak{O}^*,\, b \notin K \mid \mathfrak{O} \cap K(b) = X_i^{(a)}\} \\
&= \bigcup_{O_a \in Y} \bigcup_{i=1}^{g(O_a)} \Big((X_i^{(a)})^* \smallsetminus R_K^*\Big).
\end{aligned}$$

Da $X_i^{(a)} \cong O_a$ für alle $i = 1, \ldots, g(O_a)$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\#\Big(\mathfrak{O}^* \big/ R_K^*\Big) &= 1 + \sum_{O_a \in Y} \sum_{i=1}^{g(O_a)} \left(\#\Big((X_i^{(a)})^* \big/ R_K^*\Big) - 1\right) \\
&= 1 + \sum_{O_a \in Y} g(O_a)\big([O_a^* : R_K^*] - 1\big)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

und damit die Behauptung. □

Bemerkung. Obwohl die Notation in der Argumentation bereits suggeriert, daß die Zahlen $g_{\mathfrak{O}}(O)$ endlich sind, kann der Beweis auch ohne dieses Wissen bis einschließlich zur Gleichung (2.9) geführt werden. Die Endlichkeit der $g_{\mathfrak{O}}(O)$ erhalten wir dann aus dieser Gleichung und der in Satz (2.4.6) erwähnten Endlichkeit von e. □

2.5 Quasi-normale Ideale

Nachdem wir die Eichler-Ordnungen soweit studiert haben, wollen wir uns nun den Idealen zuwenden, die mit ihnen in direktem Zusammenhang stehen, nämlich den sogenannten quasi-normalen Idealen. Es sei nach wie vor A eine positiv definite Quaternionenalgebra über dem Zahlkörper K, und alle Eichler-Ordnungen, die wir betrachten, seien von quadratfreier Stufe.

Definition 2.5.1. Ein Ideal der Quaternionenalgebra A heißt *quasi-normal*, wenn seine Linksordnung eine Eichler-Ordnung ist.

Bemerkung. Wir werden gleich sehen, daß die Linksordnung eines Ideals von A genau dann eine Eichler-Ordnung ist, wenn dies für seine Rechtsordnung ebenfalls gilt. Definition (2.5.1) ist also nur auf den ersten Blick eine unsymmetrische Bedingung. □

Quasi-normale Ideale spielen in der Quaternionenalgebra A eine ähnliche Rolle wie die invertierbaren Ideale $\mathfrak{A}$ einer (nicht notwendig maximalen) Ordnung O eines algebraischen Zahlkörpers. Diese zeichnen sich wie früher erwähnt dadurch aus, daß für sie ein inverses Ideal $\mathfrak{A}^{-1}$ gebildet werden kann, so daß die Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = O$ gilt, und sich dadurch auf der Menge aller invertierbaren Ideale eine kommutative Gruppenstruktur definieren läßt.

In einer Quaternionenalgebra A ist das Ergebnis wegen der fehlenden Kommutativität etwas schlechter. Man muß, um eine entsprechende Gruppenstruktur zu erreichen, die Menge der zu betrachtenden Ideale noch weiter — nämlich auf die gleichseitigen quasi-normalen Ideale — einschränken, wie wir später sehen werden.

Als erstes Analogon zum Zahlkörper-Fall wollen wir jedoch festhalten, daß quasi-normale Ideale in obigem Sinne invertierbar sind. Dazu benötigen wir die folgende Proposition.

Proposition 2.5.2. *Ist $\mathcal{I}$ ein quasi-normales Ideal, so ist $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ an jeder endlichen Primstelle ein Hauptideal, also von der Form $\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p}$ mit $a_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}^*$.*

Beweis (Beweisidee von Tamagawa). Sei $\mathfrak{O}$ die Linksordnung von $\mathcal{I}$, insbesondere ist sie also eine Eichler-Ordnung.

Ist $\mathfrak{p}$ eine Primstelle mit $\mathfrak{p} \not| D_2$, so ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ sogar eine Maximalordnung von $A_\mathfrak{p}$. Die Behauptung folgt in diesem Fall direkt aus Korollar (2.1.11).

Betrachte nun $\mathfrak{p} \mid D_2$. Es ist $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ von der in Korollar (2.2.7) beschriebenen Form. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ sogar gleich der Ordnung

$$\begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

ist. Denn falls $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ nur konjugiert zu dieser Ordnung ist, etwa durch ein Element $y \in A_\mathfrak{p}^*$, so betrachte man im folgenden statt $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ das Ideal $\mathcal{I}'_\mathfrak{p} := y^{-1}\mathcal{I}_\mathfrak{p}$, das die in (2.10) angegebene Linksordnung besitzt. Kann die Behauptung für das Ideal $\mathcal{I}'_\mathfrak{p}$ gezeigt werden, ist also etwa $\mathcal{I}'_\mathfrak{p} = (y^{-1}\mathfrak{O}_\mathfrak{p} y)a_\mathfrak{p}$, so ist offensichtlich $\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} y a_\mathfrak{p}$.

Den Matrizenring $M_2(R_\mathfrak{p})$ bezeichnen wir abkürzend mit $M_\mathfrak{p}$. Durch Linksmultiplikation mit $M_\mathfrak{p}$ wird aus dem $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$-Linksideal $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ das $M_\mathfrak{p}$-Linksideal $M_\mathfrak{p}\mathcal{I}_\mathfrak{p}$. Da $M_\mathfrak{p}$ eine Maximalordnung von $A_\mathfrak{p}$ ist, muß dieses Ideal ein Hauptideal sein, das heißt, es gibt ein $x \in A_\mathfrak{p}^*$ mit

$$M_\mathfrak{p}\mathcal{I}_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} x. \tag{2.11}$$

Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Inklusionen

$$\pi_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} \subseteq M_{\mathfrak{p}} \tag{2.12}$$

gelten. Denn sonst betrachte man im folgenden anstelle von $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ das Ideal $\mathcal{I}''_{\mathfrak{p}} := \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} x^{-1}$. Dieses ist ebenfalls ein $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$-Linksideal, und deshalb gilt unter Berücksichtigung von (2.11)

$$\pi_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} x^{-1} \subseteq \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} \mathcal{I}''_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{I}''_{\mathfrak{p}} = \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} x^{-1} \subseteq M_{\mathfrak{p}} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} x^{-1} = M_{\mathfrak{p}}.$$

Nachdem die Behauptung nun auf diese Spezialfälle zurückgeführt wurde, betrachte man als nächstes die Reduktionsabbildung modulo $\pi_{\mathfrak{p}}$. Diese werde komponentenweise auf $M_2(R_{\mathfrak{p}})$ fortgesetzt, also

$$M_2(R_{\mathfrak{p}}) \to M_2(R_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix},$$

und es sei

$$Z_1 := \left\{ (\bar{a}, \bar{b}) \mid \text{es gibt } c, d \in R_{\mathfrak{p}} \text{ mit } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} \right\}$$

die Menge aller ersten Zeilen, die im Bild von $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ unter dieser Abbildung auftreten. Wegen (2.12) ist $(\bar{0}, \bar{0}) \in Z_1$, und da für alle $\lambda \in R_{\mathfrak{p}}$ auch

$$\begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} + \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$$

ist, ist auch $\bar{\lambda}(\bar{a}_1, \bar{b}_1) + (\bar{a}_2, \bar{b}_2) \in Z_1$. Mit anderen Worten: Z_1 ist ein $R_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}$-Vektorraum. Entsprechendes gilt für Z_2, die Menge der zweiten Zeilen von Matrizen aus $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ unter der Reduktionsabbildung modulo $\pi_{\mathfrak{p}}$.

Nach Konstruktion liegt also die i-te Zeile einer Matrix aus $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ in Z_i. Es gilt aber auch umgekehrt, daß beliebige Zeilen $(\bar{a}, \bar{b}) \in Z_1$ und $(\bar{c}, \bar{d}) \in Z_2$ vorgegeben werden können und die aus den Repräsentanten a, b, c, d zusammengesetzte Matrix wieder in $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ liegt. Man sieht dies leicht ein, wenn man sich überlegt, daß es zu den vorgegebenen Zeilen Urbilder gibt, die sich schreiben lassen als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11}\pi_{\mathfrak{p}} & k_{12}\pi_{\mathfrak{p}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_{21}\pi_{\mathfrak{p}} & k_{22}\pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$$

mit $a_2, b_2, c_1, d_1, k_{ij} \in R_{\mathfrak{p}}$. Da nun aber wegen (2.12) jeweils der rechte Summand in $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ liegt, muß dies auch für die linken Summanden gelten, und wir können die gesuchte Matrix schreiben als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}} \mathcal{I}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathfrak{p}}.$$

Zusammenfassend bedeutet dies für unser Ideal:

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{p}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in Z_1, (\bar{c}, \bar{d}) \in Z_2 \right\}$$

Wir werden Aussagen über die Gestalt von $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ machen können, wenn wir Z_1 und Z_2 bzw. die verschiedenen Möglichkeiten für ihre jeweilige Dimension als $R_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}$-Vektorraum genauer untersuchen.

Ist $(\bar{c}, \bar{d}) \in Z_2$ mit einer Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{I}_\mathfrak{p}$, so ist auch

$$\begin{pmatrix} c & d \\ \pi_\mathfrak{p} a & \pi_\mathfrak{p} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \mathcal{I}_\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{I}_\mathfrak{p},$$

also $(\bar{c}, \bar{d}) \in Z_1$. Das heißt, es gilt $Z_2 \subseteq Z_1$.

Damit ist klar, daß Z_1 und Z_2 nicht dieselbe Dimension haben können. Denn sonst wären sie wegen $Z_2 \subseteq Z_1$ bereits gleich, und das Element $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, das von links an eine Matrix multipliziert lediglich deren Zeilen vertauscht, müßte in der Linksordnung von $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ enthalten sein. Dies ist aber nicht der Fall, denn das Element $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ liegt offensichtlich nicht in $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$. Es bleibt, die folgenden Fälle zu untersuchen:

Fall 1: $\dim Z_1 = 1$ und $\dim Z_2 = 0$

Sei etwa $Z_1 = \langle(\bar{\alpha}, \bar{\beta})\rangle$. Falls $\bar{\alpha} = \bar{0}$ ist, können wir den Basisvektor skalieren und Z_1 schreiben als $Z_1 = \langle(\bar{0}, \bar{1})\rangle$. Dann enthält $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ genau die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} k_{11}\pi_\mathfrak{p} & m + k_{12}\pi_\mathfrak{p} \\ k_{21}\pi_\mathfrak{p} & k_{22}\pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + k_{12}\pi_\mathfrak{p} & k_{11} \\ \pi_\mathfrak{p} k_{22} & k_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } m, k_{ij} \in R_\mathfrak{p}.$$

In dem Fall, daß $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$ ist, skalieren wir den Basisvektor derart, daß wir $\bar{\alpha} = \bar{1}$ annehmen können. Dann sind die Elemente von $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} m + k_{11}\pi_\mathfrak{p} & m\beta + k_{12}\pi_\mathfrak{p} \\ k_{21}\pi_\mathfrak{p} & k_{22}\pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + k_{11}\pi_\mathfrak{p} & k_{12} - k_{11}\beta \\ k_{21}\pi_\mathfrak{p} & k_{22} - k_{21}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix}.$$

Insgesamt gilt für Fall 1 also

$$\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix},$$

wobei β modulo $\pi_\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt ist.

Fall 2: $\dim Z_1 = 2$ und $\dim Z_2 = 0$

Es ist dann

$$\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \pi_\mathfrak{p} c & \pi_\mathfrak{p} d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R_\mathfrak{p} \right\}.$$

Multipliziert man eine beliebige Matrix dieser Gestalt von links mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \pi_\mathfrak{p}^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, so liegt das Produkt wieder in $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$. Das kann aber nicht sein, da $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \pi_\mathfrak{p}^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ nicht in der Linksordnung $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ von $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ enthalten ist. Dieser Fall kann daher nicht auftreten.

Fall 3: $\dim Z_1 = 2$ und $\dim Z_2 = 1$

Sei etwa $Z_2 = \langle(\bar{\gamma}, \bar{\delta})\rangle$. Wieder betrachten wir $\bar{\gamma} = \bar{0}$ und $\bar{\gamma} \neq \bar{0}$ separat und denken uns den Basisvektor geeignet skaliert. Im ersten Fall besteht $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ dann genau aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ k_{21}\pi_\mathfrak{p} & m + k_{22}\pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a, b, k_{ij}, m \in R_\mathfrak{p}.$$

Im zweiten Fall haben die Elemente von $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ m + k_{21}\pi_\mathfrak{p} & m\delta + k_{22}\pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a\delta & a \\ (k_{22} - k_{21}\delta)\pi_\mathfrak{p} & m + k_{21}\pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}.$$

Für Fall 3 ergibt sich damit insgesamt:

$$\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix},$$

wo δ modulo $\pi_\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt ist.

□

Es ist offensichtlich, daß die vorangegangene Proposition ein gutes Werkzeug für die Untersuchung der quasi-normalen Ideale liefert, denn deren Eigenschaften lassen sich nun durch Lokalisieren direkt auf entsprechende Eigenschaften von Hauptidealen zurückführen. Bevor wir also die nächste Proposition beweisen können, bietet es sich an, zunächst einen Blick auf Hauptideale zu werfen.

Lemma 2.5.3. *Sei $\mathcal{I} = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})a = a\mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ mit $a \in A^*$ ein Hauptideal der Quaternionenalgebra A. Dann gelten:*

(i) $\mathcal{I}^{-1} = a^{-1}\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})a^{-1}$.

(ii) $\mathcal{I}\mathcal{I}^{-1} = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ *und* $\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I} = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$.

(iii) $1 \in \mathcal{I}\mathcal{I}^{-1}$ *und* $1 \in \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}$.

Beweis. Der zweite Teil ergibt sich unmittelbar aus (i), und da Ordnungen mit R insbesondere auch das Element 1 enthalten, folgt sofort (iii). Es bleibt, den ersten Teil zu verifizieren, dies ist jedoch nicht mehr als eine triviale Rechnung. □

Wie angekündigt können wir im Falle von quasi-normalen Idealen sofort eine ähnliche Proposition beweisen, die im folgenden häufig zur Anwendung kommen wird.

Proposition 2.5.4. *Seien $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ quasi-normale Ideale der Quaternionenalgebra A. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $1 \in \mathcal{I}\mathcal{I}^{-1}$ *und* $1 \in \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}$.

(ii) $\mathcal{I}\mathcal{I}^{-1} = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ *und* $\mathcal{I}^{-1}\mathcal{I} = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$.

(iii) Ist $\mathfrak{o}_l(\mathcal{J}) = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$, *so ist* $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}\mathcal{J}) = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$ *und* $\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}\mathcal{J}) = \mathfrak{o}_r(\mathcal{J})$.

(iv) $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}^{-1}) = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ *und analog* $\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}^{-1}) = \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$.

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Dann ist nach Proposition (2.5.2) die Lokalisierung $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ ein Hauptideal. Weiter gilt nach Lemma (2.5.3) also $1 \in \mathcal{I}_\mathfrak{p}(\mathcal{I}_\mathfrak{p})^{-1}$ und damit

$$1 \in \bigcap_{\mathfrak{p}<\infty} \mathcal{I}_\mathfrak{p}(\mathcal{I}_\mathfrak{p})^{-1} = \bigcap_{\mathfrak{p}<\infty} (\mathcal{I}\mathcal{I}^{-1})_\mathfrak{p} = \mathcal{I}\mathcal{I}^{-1}.$$

(ii) Die eine Inklusion haben wir bereits in Lemma (2.1.4) gesehen. Die andere Richtung folgt nun aus Teil (i), denn ist beispielsweise $x \in \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$, so ist

$$x = x \cdot 1 \in x \cdot \mathcal{I}\mathcal{I}^{-1} \subseteq \mathcal{I}\mathcal{I}^{-1}.$$

(iii) Offensichtlich gilt $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}) \subseteq \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}\mathcal{J})$. Für die umgekehrte Inklusion betrachte man ein $x \in \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}\mathcal{J})$. Es folgt dann mithilfe von (i) und (ii):

$$x\mathcal{I} \subseteq x\mathcal{I}\mathcal{J}\mathcal{J}^{-1} \subseteq \mathcal{I}\mathcal{J}\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{I}\mathfrak{o}_l(\mathcal{J}) = \mathcal{I}\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I},$$

also $x \in \mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$. Die Aussage für die Rechtsordnung beweist man analog.

(iv) Das folgt wegen $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I}^{-1}) = \mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}^{-1})^{-1} = \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I} = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ direkt aus Teil (ii).

□

Bemerkung. Obiges Lemma zeigt, daß für eine fest gewählte Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ die Menge der gleichseitigen $\mathfrak{O}$-Ideale eine Gruppe bildet. Die Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ selbst übernimmt dabei die Rolle des neutralen Elementes und das Ideal $\mathcal{I}^{-1}$ ist — wie die Bezeichnung bereits vermuten ließ — tatsächlich zu $\mathcal{I}$ invers. □

Korollar 2.5.5. *Sei $\mathcal{I}$ ein quasi-normales Ideal von A. Dann ist $\mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ eine Eichler-Ordnung von derselben Stufe wie $\mathfrak{o}_l(\mathcal{I})$.*

Beweis. Abkürzend bezeichne $\mathfrak{O}$ die Linksordnung von $\mathcal{I}$. Sie ist eine Eichler-Ordnung von gegebener Stufe (D_1, D_2). Wieder betrachten wir die Lokalisierungen von $\mathcal{I}$ und schreiben an jeder Primstelle $\mathfrak{p}$

$$\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p} \qquad \text{mit } a_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}^*.$$

Dabei können wir nach Korollar (2.1.7) fast alle $a_\mathfrak{p} = 1$ wählen. Für das Hauptideal $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ kann die Rechtsordnung nun direkt angegeben werden, sie erfüllt

$$\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = a_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{O}_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p} \qquad \text{für jedes } \mathfrak{p} \tag{2.13}$$

und unterscheidet sich somit nur an endlich vielen Stellen von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$. Nach dem Lokal-Global-Prinzip (2.1.8) gibt es ein globales Objekt $\mathfrak{O}'$, dessen Lokalisierungen genau die Gestalt (2.13) haben. Es gilt $\mathfrak{O}' = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$.

Da sich $\mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$ also lokal nur durch Konjugation von $\mathfrak{O}$ unterscheidet, übertragen sich offensichtlich die Invarianten (D_1, D_2) direkt. □

Nachdem wir nun einige grundlegende Eigenschaften der quasi-normalen Ideale gesehen haben, wollen wir uns ihrem Aussehen widmen. Wie bereits vermerkt, sind quasi-normale Ideale lokal stets Hauptideale. Die erzeugenden Elemente lassen sich konkret angeben. Genau wie beim Beweis über die Gestalt der lokalen Eichler-Ordnungen in Korollar (2.2.3) ist es hier wieder hilfreich, wenn wir die auftretenden Elemente auf eine geeignete Normalform zurückführen können. Es reicht allerdings die Hermitesche Normalform aus Satz (2.2.2) nicht aus, sondern wir brauchen noch ein weiteres Lemma.

Lemma 2.5.6. *Sei*

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix}.$$

Für eine invertierbare Matrix $x \in \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ existiert eine Matrix $v \in \mathfrak{O}_\mathfrak{p}^*$, so daß das Produkt vx von der Gestalt

$$vx = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^r & b \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{pmatrix} \quad \textit{mit } r,s \in \mathbb{Z},\ b \bmod \pi_\mathfrak{p}^s \textit{ reduziert} \tag{2.14}$$

$$\textit{oder} \quad vx = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\mathfrak{p}^r \\ \pi_\mathfrak{p}^{s+1} & d \end{pmatrix} \quad \textit{mit } r,s \in \mathbb{Z},\ d \bmod \pi_\mathfrak{p}^{r+1} \textit{ reduziert} \tag{2.15}$$

ist.

Beweis. Der Beweis ist rein technischer Natur und kann in ähnlicher Form auch bei M. Eichler in [6, § 2] nachgelesen werden.

Sei

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ \pi_\mathfrak{p} c & d \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a,b,c,d \in R_\mathfrak{p}.$$

Fall 1: $v_\mathfrak{p}(a) \leq v_\mathfrak{p}(c)$

Man wähle

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c\pi_\mathfrak{p}^{1-v_\mathfrak{p}(a)} & -a\pi_\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(a)} \end{pmatrix}.$$

Wegen der Voraussetzung $v_\mathfrak{p}(a) \leq v_\mathfrak{p}(c)$ hat $c\pi_\mathfrak{p}^{1-v_\mathfrak{p}(a)}$ Bewertung ≥ 1 und $-a\pi_\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(a)}$ Bewertung 0. Damit liegt v tatsächlich in $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}^*$, und es läßt sich

$$vx = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

durch Linksmultiplikation mit einer Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} u_1 & w \\ 0 & u_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{O}^*$ mit geeignet gewählten Einheiten $u_1, u_2 \in R_\mathfrak{p}^*$ und $w \in R_\mathfrak{p}$ auf die Gestalt (2.14) bringen.

Fall 2: $v_\mathfrak{p}(a) > v_\mathfrak{p}(c)$

Hier wählen wir

$$v = \begin{pmatrix} c\pi_\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(c)} & -a\pi_\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(c)-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch dieses v liegt in $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}^*$, und es ist

$$vx = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ \pi_\mathfrak{p} c & d \end{pmatrix},$$

welches sich durch Multiplikation mit einer geeigneten Matrix $\left(\begin{smallmatrix} u_1 & 0 \\ \pi_\mathfrak{p} w & u_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{O}^*$ auf die Gestalt (2.15) bringen läßt.

□

Bemerkung. Daß wir in obiger Situation anders als bei der Hermiteschen Normalform zwei verschiedene Normalgestalten bekommen — von denen man übrigens zeigen kann, daß sie niemals durch Linksmultiplikation mit einer Matrix aus $\mathfrak{O}^*$ ineinander überführt werden können —, liegt daran, daß die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nicht in $\mathfrak{O}^*$ liegt. Somit konnten wir Fall 2 nicht einfach durch Vertauschen der Zeilen auf Fall 1 zurückführen.

Entsprechende Normalformen für Elemente aus Eichler-Ordnungen zu finden, deren Stufe (D_1, D_2) nicht quadratfrei ist, wird noch einmal komplizierter. Man stellt nämlich fest, daß mehr als die zwei Fälle von oben unterschieden werden müssen, wenn man beliebiges

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \\ \pi_\mathfrak{p}^r R_\mathfrak{p} & R_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } r \geq 1$$

zuläßt. □

Lemma 2.5.7. *Ein gleichseitiges $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$-Ideal $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$ ist von der Form*

$$\begin{array}{lcllll} \mathcal{I}_\mathfrak{p} & = & \mathfrak{O}_\mathfrak{p}\tilde{\pi}_\mathfrak{p}^k & \textit{mit} & \mathrm{nrd}(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^k, & \textit{wenn} \quad \mathfrak{p} \mid D_1, \\ \mathcal{I}_\mathfrak{p} & = & \mathfrak{O}_\mathfrak{p}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix}^k & \textit{mit} & \mathrm{nrd}(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^k, & \textit{wenn} \quad \mathfrak{p} \mid D_2, \\ \mathcal{I}_\mathfrak{p} & = & \mathfrak{O}_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^k & \textit{mit} & \mathrm{nrd}(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{2k}, & \textit{wenn} \quad \mathfrak{p} \nmid D_1 D_2, \end{array}$$

dabei ist $\pi_\mathfrak{p}$ ein Erzeuger des maximalen Ideals $\mathfrak{p}$, $\tilde{\pi}_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{nrd}(\tilde{\pi}_\mathfrak{p}) = \pi_\mathfrak{p}$, und $k \in \mathbb{Z}$ ist abhängig von $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$.

Beweis. Jedes $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$-Ideal $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ ist von der Form $\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} a$ mit einem geeigneten $a \in A_\mathfrak{p}^*$. Es gibt nach Lemma (2.1.4) ein Element $0 \neq s \in R_\mathfrak{p}$ mit $s\mathcal{I}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$. Können wir die Behauptung für das ganze Ideal $s\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ beweisen, so folgt sie auch für $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ selbst, denn Multiplikation mit $s^{-1} \in R_\mathfrak{p}$ bewirkt bei Idealen der behaupteten Gestalt höchstens eine Verminderung des Exponenten k.

Wir nehmen daher an, daß $\mathcal{I}$ selbst bereits ein ganzes Ideal ist.

Sei zunächst $\mathfrak{p} \mid D_1$. Die Rechtsordnung $\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = a^{-1}\mathfrak{O}_\mathfrak{p} a$ ist wieder eine Eichler-Ordnung. Nun gibt es im Falle $\mathfrak{p} \mid D_1$ nur genau eine Eichler-Ordnung, nämlich die einzig existierende Maximalordnung. Also gilt bereits $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} = a^{-1}\mathfrak{O}_\mathfrak{p} a$, womit gezeigt ist, daß jedes Ideal automatisch zweiseitig ist. In Lemma (1.1.10) wurde gezeigt, daß die Uniformisierende $\tilde{\pi}_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$ Norm $\mathrm{nrd}(\tilde{\pi}_\mathfrak{p}) = \pi_\mathfrak{p}$ hat. Das Element a, das $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ erzeugt, schreiben wir in der Form $u\tilde{\pi}_\mathfrak{p}^k$ mit $u \in \mathfrak{O}_\mathfrak{p}^*$, $k \in \mathbb{Z}$. Damit hat $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ die behauptete Gestalt, und seine Norm ist durch

$$\mathrm{nrd}(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = \mathrm{nrd}(\mathfrak{O}_\mathfrak{p}\tilde{\pi}_\mathfrak{p}^k) = R_\mathfrak{p}\mathrm{nrd}(\tilde{\pi}_\mathfrak{p})^k = R_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^k = \mathfrak{p}^k$$

gegeben.

Für $\mathfrak{p} \nmid D_1 D_2$ ist $A_\mathfrak{p} \cong M_2(K_\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \cong M_2(R_\mathfrak{p})$. Es kann angenommen werden, daß das Element a in Hermitescher Normalform (2.1) vorliegt. Ist $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ zweiseitig, so erfüllt a die Gleichung $a^{-1}M_2(R_\mathfrak{p})a = M_2(R_\mathfrak{p})$. Mit den Bezeichnungen

$$a = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^k & b \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^l \end{pmatrix} \quad \text{mit } b = 0 \text{ oder } v_\mathfrak{p}(b) < l \qquad \text{und} \qquad y = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in M_2(R_\mathfrak{p})$$

gilt

$$a^{-1}ya = \begin{pmatrix} u - wb\pi_\mathfrak{p}^{-l} & b^2\pi_\mathfrak{p}^{-k-l}w + b\pi_\mathfrak{p}^{-k}(u-x) + v\pi_\mathfrak{p}^{l-k} \\ w\pi_\mathfrak{p}^{k-l} & wb\pi_\mathfrak{p}^{-l} + x \end{pmatrix}.$$

Durchläuft y ganz $M_2(R_\mathfrak{p})$, so durchlaufen die Produkte $a^{-1}ya$ genau dann ebenfalls den gesamten Matrizenring, wenn $k = l$ und $v_\mathfrak{p}(b) \geq l$ gilt. Letzteres impliziert sofort, daß $b = 0$

sein muß. Also ist a eine Skalarmatrix und kann wie behauptet als $a = \pi_\mathfrak{p}^k \in R_\mathfrak{p}$ angenommen werden. Für die Norm ergibt sich sofort

$$\mathrm{nrd}(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = \mathrm{nrd}(\mathfrak{O}_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^k) = R_\mathfrak{p}\mathrm{nrd}(\pi_\mathfrak{p})^k = R_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{2k} = \mathfrak{p}^{2k}.$$

Es bleibt der Fall $\mathfrak{p} \mid D_2$. Hier ist wieder $A_\mathfrak{p} \cong M_2(K_\mathfrak{p})$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat a aber diesmal die Normalgestalt (2.14) oder (2.15). Zunächst betrachten wir

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\mathfrak{p}^k \\ \pi_\mathfrak{p}^{l+1} & d \end{pmatrix} \quad \text{mit } d = 0 \text{ oder } v_\mathfrak{p}(d) \leq k \qquad \text{und} \qquad y = \begin{pmatrix} u & v \\ \pi_\mathfrak{p} w & x \end{pmatrix} \in \mathfrak{O}_\mathfrak{p}.$$

Ähnlich wie oben gilt, daß

$$a^{-1}ya = \begin{pmatrix} x - dv\pi_\mathfrak{p}^{-k} & -d^2\pi_\mathfrak{p}^{-k-l-1}v + d\pi_\mathfrak{p}^{-l-1}(x-u) + w\pi_\mathfrak{p}^{k-l} \\ v\pi_\mathfrak{p}^{l-k+1} & u + dv\pi_\mathfrak{p}^{-r} \end{pmatrix}$$

genau dann ganz $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ durchläuft, wenn $k = l$ und außerdem $v_\mathfrak{p}(d) \geq k+1$ ist. Wieder folgt, daß $d = 0$ sein muß, und für a bedeutet dies

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\mathfrak{p}^k \\ \pi_\mathfrak{p}^{k+1} & 0 \end{pmatrix} = \pi_\mathfrak{p}^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix}^{2k+1}.$$

Liegt hingegen a in der Normalgestalt (2.14) vor, so betrachten wir stattdessen

$$a' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix}^{-1} a = \begin{pmatrix} 0 & \pi_\mathfrak{p}^{l-1} \\ \pi_\mathfrak{p}^k & b \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vertauscht mit $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, also definiert mit a auch das Element a' ein zweiseitiges $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$-Ideal. Für a' haben wir aber gerade gezeigt, daß es eine Potenz von $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist, und daher gilt dies auch für a. Da im Falle einer Matrixalgebra die Normabbildung gerade die Determinantenfunktion ist, folgt

$$\left(\mathrm{nrd}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix}^k\right)\right) = \left(\pi_\mathfrak{p}^k\right) = \mathfrak{p}^k,$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Eine wichtige Konsequenz dieses Lemmas wollen wir in der nächsten Proposition festhalten.

Korollar 2.5.8. *Sei $\mathfrak{O}$ eine Eichler-Ordnung. Dann sind gleichseitige $\mathfrak{O}$-Ideale durch ihre reduzierte Norm eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ zwei gleichseitige $\mathfrak{O}$-Ideale mit $\mathrm{nrd}(\mathcal{I}) = \mathrm{nrd}(\mathcal{J}) = \mathfrak{n}$. Dann ist $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ ein zweiseitiges $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$-Ideal mit der Norm $\mathrm{nrd}(\mathcal{I}_\mathfrak{p}) = (\mathrm{nrd}(\mathcal{I}))_\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_\mathfrak{p}$. Nach Lemma (2.5.7) sind dann aber die $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt, denn sie sind von der im Lemma angegebenen Gestalt mit $k = k_\mathfrak{p} = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{n})$, $v_\mathfrak{p}$ die $\mathfrak{p}$-adische Bewertung. Da dieselben Überlegungen auch auf $\mathcal{J}$ zutreffen, gilt also $\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathcal{J}_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} < \infty$. Daraus folgt wie behauptet $\mathcal{I} = \mathcal{J}$. □

2.6 Eindeutige Primidealzerlegung

Es wird später nötig werden, ein vorgegebenes ganzes $\mathfrak{O}$-Ideal $\mathcal{I}$ in geeigneter Weise in ein Produkt anderer Ideale zu zerlegen, deren Eigenschaften wie Norm und Verzweigungsverhalten man besser kontrollieren kann. Ein unabdingbares Werkzeug hierbei wird die eindeutige Primidealzerlegung sein, die jetzt untersucht werden soll.

Im wesentlichen lauten die folgenden Definitionen und Sätze über Ideale der Quaternionenalgebra A genauso wie die entsprechenden Sätze im Fall eines Zahlkörpers, und auch die Beweise unterscheiden sich nur geringfügig. Der Vollständigkeit halber wollen wir trotzdem alle Aussagen noch einmal anführen. Zu diesem Abschnitt sei auch auf das Buch von M.-F. Vignéras [21, S. 22f] verwiesen.

Da wir in diesem Abschnitt fast ausschließlich mit *gleichseitigen* Idealen zu tun haben werden, wollen wir diese Eigenschaft — anders als bisher — nicht an jeder Stelle noch einmal explizit erwähnen. Es sei aber daran erinnert, daß die Bezeichnung „$\mathfrak{O}$-Ideal“ ohnehin stets die Gleichseitigkeit impliziert, so daß keine Mißverständnisse entstehen sollten.

Die Stufe (D_1, D_2) aller Eichler-Ordnungen sei auch in diesem Abschnitt quadratfrei.

Definition 2.6.1. Unter einem $\mathfrak{O}$-*Primideal* von A verstehen wir ein von $\mathfrak{O}$ verschiedenes, ganzes $\mathfrak{O}$-Ideal $\mathcal{P}$, das sich nicht in ein nichttriviales Produkt zweier ganzer $\mathfrak{O}$-Ideale zerlegen läßt. Mit anderen Worten: $\mathcal{P}$ ist ein Primideal, wenn für alle ganzen $\mathfrak{O}$-Ideale $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ gilt

$$\mathcal{I}\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \quad \text{oder} \quad \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}.$$

Lemma 2.6.2. *Die $\mathfrak{O}$-Primideale von A sind genau die maximalen ganzen $\mathfrak{O}$-Ideale von A.*

Bemerkung. Wie in diesem Zusammenhang üblich bedeute es für ein ganzes Ideal $\mathcal{P}$, „maximal“ zu sein, daß es kein ganzes und von $\mathfrak{O}$-verschiedenes $\mathfrak{O}$-Ideal gibt, daß $\mathcal{P}$ echt enthält. □

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ ein $\mathfrak{O}$-Primideal. Wir nehmen an, $\mathcal{I}$ wäre ein ganzes $\mathfrak{O}$-Ideal mit $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{I} \subsetneq \mathfrak{O}$. Da sowohl $\mathcal{I}$ als auch $\mathcal{P}$ zweiseitige $\mathfrak{O}$-Ideale sind, gilt die Beziehung $\mathcal{I}(\mathcal{I}^{-1}\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$, die wegen der Primalität von $\mathcal{P}$ wiederum impliziert, daß wir

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{I}^{-1}\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$$

haben. Ersteres ist nicht möglich, da sonst bereits $\mathcal{I} = \mathcal{P}$ wäre. Also ist $\mathcal{I}^{-1}\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$, was bedeutet, daß $\mathcal{I}^{-1}$ in der Linksordnung von $\mathcal{P}$ enthalten ist. Nach Proposition (2.5.4) folgt

$$\mathfrak{O} = \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{O}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}.$$

Es ist weiter nach Voraussetzung $\mathcal{I}$ ein ganzes Ideal, also $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{O}$, und damit $\mathcal{I} = \mathfrak{O}$, was einen Widerspruch darstellt.

Sei umgekehrt $\mathcal{I}$ ein maximales Ideal. Ist für zwei ganze $\mathfrak{O}$-Ideale $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ das Produkt $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ in $\mathcal{I}$ enthalten, nicht aber $\mathcal{J}_1$, so muß gezeigt werden, daß $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}$ gilt. Wegen $\mathcal{J}_1 \not\subseteq \mathcal{I}$ ist das Ideal $\mathcal{I} + \mathcal{J}_1$, welches ebenfalls ein ganzes $\mathfrak{O}$-Ideal ist, echt größer als $\mathcal{I}$ und wegen dessen Maximalität also bereits ganz $\mathfrak{O}$. Es folgt

$$\mathcal{J}_2 = \mathfrak{O}\mathcal{J}_2 = (\mathcal{I} + \mathcal{J}_1)\mathcal{J}_2 = \mathcal{I}\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{I}\mathfrak{O} + \mathcal{I} = \mathcal{I}.$$

Also ist $\mathcal{I}$ tatsächlich prim. □

Eine Quaternionenalgebra A über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ ist wegen der geltenden Relation $ij = -ji$ für die Basiselemente i, j niemals kommutativ. Zunächst muß man daher davon ausgehen, daß auch Ideale von A nicht miteinander kommutieren. Erfreulicherweise gilt aber das folgende Lemma.

Lemma 2.6.3. *Sind $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ zwei $\mathfrak{O}$-Primideale, so gilt*

$$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1.$$

Beweis. Falls $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ ist, ist nichts zu zeigen. Andernfalls können wir wegen der Maximalität der Primideale aber bereits schließen, daß $\mathcal{P}_1 \not\subseteq \mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_2 \not\subseteq \mathcal{P}_1$ gelten muß.

Sei $\mathcal{I} := \mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1$. Dies ist offensichtlich ein $\mathfrak{O}$-Ideal, und wegen $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}_1^{-1}\mathfrak{O}\mathcal{P}_1 = \mathfrak{O}$ ist $\mathcal{I}$ sogar ganz. Das Produkt $\mathcal{P}_1\mathcal{I}$ liegt in dem Primideal $\mathcal{P}_2$. Wie bereits vermerkt, ist aber $\mathcal{P}_1 \not\subseteq \mathcal{P}_2$, also folgt $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}_2$, was gleichbedeutend mit $\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ ist.

Mit vertauschten Rollen von $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ folgt in analoger Weise die umgekehrte Inklusion. □

Satz 2.6.4. *Ein ganzes $\mathfrak{O}$-Ideal hat eine bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutige Zerlegung in $\mathfrak{O}$-Primideale.*

Beweis. Sei also $\mathcal{I}$ ein ganzes $\mathfrak{O}$-Ideal. Falls $\mathcal{I}$ bereits selbst maximal ist, ist es nach Lemma (2.6.2) ein Primideal, und wir haben die triviale Zerlegung.

Andernfalls existiert ein weiteres ganzes $\mathfrak{O}$-Ideal $\mathcal{J}$ mit

$$\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J} \subsetneq \mathfrak{O}.$$

Wir betrachten das Ideal $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}$. Dieses ist offensichtlich ebenfalls gleichseitig, es ist wegen $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}^{-1}\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{O}$ ganz und enthält $\mathcal{I}$, denn

$$\mathcal{I} = \mathcal{J}(\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}) \subsetneq \mathfrak{O}(\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}.$$

Wir haben also $\mathcal{I}$ zerlegt in das Produkt zweier ganzer $\mathfrak{O}$-Ideale $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}$, die echt größer sind als $\mathcal{I}$. Diese können wir nach derselben Methoden selbst wieder zerlegen und so fort.

Das Verfahren wird nach einer gewissen Anzahl von Schritten abbrechen, denn $\mathfrak{O}$ ist als endlich erzeugter Modul über dem noetherschen Ring R_K selbst noethersch und jede aufsteigende Kette von $\mathfrak{O}$-Idealen, also $\mathfrak{O}$-Moduln, endet irgendwann bei einem maximalen Element. Dieses ist nach Lemma (2.6.2) aber gerade ein Primideal, so daß wir die gewünschte Zerlegung erhalten.

Es bleibt, die Eindeutigkeit zu beweisen. Sei also

$$\mathcal{I} = \mathcal{P}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{P}_r = \mathcal{Q}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{Q}_s \tag{2.16}$$

mit $\mathfrak{O}$-Primidealen $\mathcal{P}_i$ und $\mathcal{Q}_j$. Da $\mathcal{P}_1$ prim ist, muß es ein $\mathcal{Q}_j$ geben, das in $\mathcal{P}_1$ enthalten ist. In Lemma (2.6.3) haben wir gesehen, daß Primideale miteinander kommutieren, wir können daher die Reihenfolge der $\mathcal{Q}_j$ so ändern, daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann, daß $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathcal{P}_1$ ist. Da nun $\mathcal{Q}_1$ als Primideal maximal ist, folgt bereits $\mathcal{P}_1 = \mathcal{Q}_1$. Linksmultiplikation mit $\mathcal{P}_1^{-1}$ eliminiert $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{Q}_1$ in (2.16), und induktiv folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Die erste weitreichende Konsequenz aus der Primidealzerlegung ist, daß alle ganzen $\mathfrak{O}$-Ideale miteinander kommutieren, denn die entsprechende Eigenschaft der $\mathfrak{O}$-Primideale überträgt sich natürlich direkt. □

So wie man im Fall von Körpererweiterungen das Verzweigungsverhalten von Primidealen untersucht, wollen wir uns auch in unserer Situation überlegen, wie sich Primideale von K und solche von $\mathfrak{O}$ zueinander verhalten. Folgendes Lemma zeigt, daß das Verzweigungsverhalten bereits durch die Stufe (D_1, D_2) der Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ festgelegt ist und insbesondere der Fall, daß ein Primideal zerfällt, niemals auftreten kann.

Lemma 2.6.5. *Sei $\mathcal{P}$ ein $\mathfrak{O}$-Primideal von A und $\mathfrak{p} = \mathcal{P} \cap R$. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K, und es gilt*

$$\mathfrak{O}\mathfrak{p} = \begin{cases} \mathcal{P}^2, & \textit{falls } \mathfrak{p} \mid D_1 D_2 \\ \mathcal{P}, & \textit{falls } \mathfrak{p} \nmid D_1 D_2 \end{cases} \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{nrd}(\mathcal{P}) = \begin{cases} \mathfrak{p}, & \textit{falls } \mathfrak{p} \mid D_1 D_2 \\ \mathfrak{p}^2, & \textit{falls } \mathfrak{p} \nmid D_1 D_2 \end{cases} .$$

Beweis. Daß $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K ist, rechnet man direkt nach.

Für die anderen Behauptungen überlegen wir uns zunächst, daß $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{O}$ nicht zerfallen kann. Denn wäre $\mathfrak{O}\mathfrak{p}$ zerlegt, so müßte wegen $\operatorname{nrd}(\mathfrak{O}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^2$ und der Multiplikativität der Norm folgen, daß

$$\mathfrak{O}\mathfrak{p} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \qquad \text{mit} \qquad \operatorname{nrd}(\mathcal{P}_1) = \operatorname{nrd}(\mathcal{P}_2) = \mathfrak{p}$$

gilt, wo $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ verschiedene $\mathfrak{O}$-Primideale sind. In Korollar (2.5.8) war aber gezeigt worden, daß $\mathfrak{O}$-Ideale durch ihre Norm eindeutig bestimmt sind. Wir hätten also einen Widerspruch.

Wegen $\mathfrak{O}\mathfrak{p} = \mathfrak{O}(\mathcal{P} \cap R) \subseteq \mathcal{P}$ ist also $\mathcal{P}$ tatsächlich das einzige über $\mathfrak{p}$ liegende $\mathfrak{O}$-Primideal von A. Wir lokalisieren nach $\mathfrak{p}$ und erhalten wie üblich die folgenden drei Fälle.

Falls $\mathfrak{p} \mid D_1$, dann hatten wir bereits in Lemma (1.1.10) gesehen, daß

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \pi_\mathfrak{p} = (\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \tilde{\pi}_\mathfrak{p})^2$$

für eine Uniformisierende $\tilde{\pi}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ gilt.

Falls $\mathfrak{p} \mid D_2$, so ist

$$\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \pi_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & \pi_\mathfrak{p} \end{pmatrix} = \left(\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{pmatrix} \right)^2 ,$$

wobei $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \pi_\mathfrak{p} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach Lemma (2.5.7) das einzige lokale Primideal ist.

Falls schließlich $\mathfrak{p} \nmid D_1 D_2$, so ist ebenfalls nach Lemma (2.5.7) $\mathfrak{O}_\mathfrak{p} \pi_\mathfrak{p}$ bereits selbst das einzige Primideal.

Damit ist die Zerlegung von $\mathfrak{O}\mathfrak{p}$ bewiesen, und die Behauptung über die Normen folgt unmittelbar. □

Wir fixieren wie früher einen imaginärquadratischen Zwischenkörper L von $A \,|\, K$ und darin eine Ordnung O vom Führer $\mathfrak{f}(O)$.

Lemma 2.6.6. *Seien zwei Eichler-Ordnungen $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ von A mit denselben Invarianten (D_1, D_2) gegeben, die*

$$\mathfrak{O} \cap L = O = \mathfrak{O}' \cap L$$

erfüllen. Weiter sei $\mathcal{I}$ ein Ideal von A mit Linksordnung $\mathfrak{O}$ und Rechtsordnung $\mathfrak{O}'$. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$\mathcal{I} = \mathcal{J}\mathfrak{B}$$

mit einem invertierbaren O-Ideal $\mathfrak{B}$ und einem gleichseitigen $\mathfrak{O}$-Ideal $\mathcal{J}$, dessen reduzierte Norm den beiden Bedingungen

(i) $\mathrm{nrd}(\mathcal{J}) \mid D_1 D_2$,

(ii) $\mathfrak{p} \mid \mathrm{nrd}(\mathcal{J}) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p}$ *ist unverzweigt in L oder* $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}(O)$

genügt.

Beweis. Nach Satz (2.3.10) gibt es ein invertierbares O-Ideal $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{O}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}\mathfrak{A}$. Wir betrachten anstelle von $\mathcal{I}$ das Ideal

$$\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I}\mathfrak{A}^{-1},$$

das nach Konstruktion ein gleichseitiges $\mathfrak{O}$-Ideal ist.

Wir können uns außerdem auf den Fall beschränken, daß $\tilde{\mathcal{I}}$ ein ganzes $\mathfrak{O}$-Ideal ist. Denn andernfalls wählen wir gemäß Lemma (2.1.4) ein Element $s \in R_K$ mit $s\tilde{\mathcal{I}} \subseteq \mathfrak{O}$. Das Ideal $s\tilde{\mathcal{I}}$ ist also ganz, und wenn wir seine Zerlegung $s\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{J}\mathfrak{B}$ gefunden haben, so ist $\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{J}(s^{-1}\mathfrak{B})$ diejenige von $\tilde{\mathcal{I}}$.

Für $\tilde{\mathcal{I}}$ existiert also eine eindeutige Zerlegung

$$\tilde{\mathcal{I}} = \prod_{i=1}^{s} \mathcal{P}_i^{r_i}, \qquad r_i > 0 \text{ für alle } i$$

in $\mathfrak{O}$-Primideale $\mathcal{P}_i$. Wir wählen für $i = 1, \ldots, s$ die naheliegende Bezeichnung $\mathfrak{p}_i = \mathcal{P}_i \cap R_K$ und unterteilen der Übersichtlichkeit halber die Primideale $\mathfrak{p}_i$, die $D_1 D_2$ teilen, in folgende Mengen

- $U := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ teilt $D_1 D_2$, und es ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt in L oder $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}(O)\}$,
- $V := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ teilt $D_1 D_2$, und es ist $\mathfrak{p}$ verzweigt in L und $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}(O)\}$.

Die gesuchten Ideale $\mathcal{J}$ und $\mathfrak{B}$ konstruieren wir nun wie folgt

$$\mathcal{J} = \prod_{\substack{i=1 \\ \mathfrak{p}_i \in U}}^{s} \mathcal{P}_i^{r_i \bmod 2}, \qquad \tilde{\mathfrak{B}} = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ \mathfrak{p}_i \nmid D_1 D_2}}^{s} \mathfrak{p}_i^{r_i} \prod_{\substack{i=1 \\ \mathfrak{p}_i \in U}}^{s} \mathfrak{p}_i^{\lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor} \prod_{\substack{i=1 \\ \mathfrak{p}_i \in V}}^{s} \mathfrak{P}_i^{r_i} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{B} = \tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{A},$$

wo $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gauß-Klammer bezeichnet. Zusätzlich sei im verzweigten Falle $\mathfrak{P}_i$ dasjenige Ideal von L, für das $R_L \mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i^2$ ist.

Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{J}\mathfrak{B} = \mathcal{I}$ oder äquivalent $\mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}} = \tilde{\mathcal{I}}$ gilt, daß $\tilde{\mathfrak{B}}$ und damit auch $\mathfrak{B}$ ein invertierbares O-Ideal ist und daß $\mathcal{J}$ die behaupteten Eigenschaften (i) und (ii) hat. Letzteres ist wegen

$$\mathrm{nrd}(\mathcal{J}) = \prod_{\substack{i=1 \\ \mathfrak{p}_i \in U}}^{s} \mathfrak{p}_i^{r_i \bmod 2}$$

nach Lemma (2.6.5) direkt klar. Die anderen Behauptungen werden lokal bewiesen. Für die Invertierbarkeit von $\tilde{\mathfrak{B}}$ ziehen wir Satz (2.3.11) heran, wonach wir zeigen müssen, daß $\tilde{\mathfrak{B}}$ lokal überall ein Hauptideal ist.

Wir werden zunächst die Lokalisierungen von $\tilde{\mathfrak{B}}$ angeben. Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von L und $\mathcal{P}$ ein $\mathfrak{O}$-Primideal mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R_K = \mathcal{P} \cap R_K$. Ist $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$, so sind $\tilde{\mathcal{I}}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{J}_\mathfrak{p}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_\mathfrak{P}$ trivial, und es ist nichts zu zeigen. Andernfalls, wenn also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, s\}$ ist, schreiben wir abkürzend $r = r_i$ für den Exponenten von $\mathfrak{p}$ in der Primidealzerlegung von $\tilde{\mathcal{I}}$ und erhalten

$$\tilde{\mathfrak{B}}_\mathfrak{P} = O_\mathfrak{P}\tilde{\mathfrak{B}} = \begin{cases} O_\mathfrak{P}\mathfrak{p}^r & = \quad O_\mathfrak{P}\pi_\mathfrak{p}^r, \qquad \text{falls } \mathfrak{p} \nmid D_1D_2, \\ O_\mathfrak{P}\mathfrak{p}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} & = \quad O_\mathfrak{P}\pi_\mathfrak{p}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}, \qquad \text{falls } \mathfrak{p} \in U, \\ O_\mathfrak{P}\mathfrak{P}^r, & \qquad\qquad\qquad \text{falls } \mathfrak{p} \in V. \end{cases} \tag{2.17}$$

Unterscheiden wir die drei Fälle.

Falls $\mathfrak{p} \nmid D_1D_2$, gilt wieder nach Lemma (2.6.5)

$$(\mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}})_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p}\tilde{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{O}\mathfrak{p}^r)_\mathfrak{p} = (\mathcal{P}^r)_\mathfrak{p} = \tilde{\mathcal{I}}_\mathfrak{p}.$$

Außerdem ist nach (2.17) $\mathfrak{B}$ lokal ein Hauptideal.

Analog ist im Fall $\mathfrak{p} \in U$

$$(\mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}})_\mathfrak{p} = \left(\mathcal{P}^{r \bmod 2}\right)_\mathfrak{p} \left(\mathfrak{O}\mathfrak{p}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}\right)_\mathfrak{p} = \left(\mathcal{P}^{r \bmod 2}\right)_\mathfrak{p} \left(\mathcal{P}^{2\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}\right)_\mathfrak{p} = (\mathcal{P}^r)_\mathfrak{p} = \tilde{\mathcal{I}}_\mathfrak{p},$$

und auch hier ist $\tilde{\mathfrak{B}}_\mathfrak{P}$ ein Hauptideal.

Im verbleibenden Fall, $\mathfrak{p} \in V$, ist entscheidend, daß $\mathfrak{p}$ den Führer $\mathfrak{f}(O)$ nicht teilt. Denn damit ist $R_{L\mathfrak{P}} = O_\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, was bei nichttrivialem Führer nicht gewährleistet wäre. Wir können folgern, daß

$$(\mathfrak{O}\mathfrak{P}^2)_\mathfrak{p} = \mathfrak{O}_\mathfrak{p}(R_{L\mathfrak{P}}\,\mathfrak{p}) = (\mathfrak{O}\mathfrak{p})_\mathfrak{p} = (\mathcal{P}^2)_\mathfrak{p}$$

gilt und daher

$$(\mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{O}\mathfrak{P})_\mathfrak{p}^r = (\mathcal{P}^r)_\mathfrak{p} = \tilde{\mathcal{I}}_\mathfrak{p}.$$

Wegen $R_{L\mathfrak{P}} = O_\mathfrak{P}$ ist $O_\mathfrak{P}$ ein Dedekindring, und somit ist jedes $O_\mathfrak{P}$-Ideal, insbesondere $\tilde{\mathfrak{B}}_\mathfrak{P}$, ein Hauptideal.

Damit haben wir für alle Primideale verifiziert, daß

$$(\mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}})_\mathfrak{p} = \tilde{\mathcal{I}}_\mathfrak{p}$$

gilt und daß $\tilde{\mathfrak{B}}_\mathfrak{P}$ ein Hauptideal ist. Es folgt daraus die Gleichheit $\mathcal{I} = \mathcal{J}\mathfrak{B}$ sowie die Tatsache, daß $\mathfrak{B}$ ein invertierbares O-Ideal ist.

Es bleibt, ein Wort zur Eindeutigkeit der Zerlegung zu sagen.

Betrachten wir erst $\tilde{\mathcal{I}}$ und die Ideale $\mathcal{J}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$. Die Primidealzerlegung von $\mathcal{I}$ ist eindeutig, und jedes Primideal, das in $\mathcal{I}$ aufgeht, muß natürlich $\mathcal{J}$ oder $\mathfrak{O}\tilde{\mathfrak{B}}$ teilen. Die Bedingungen, die im Lemma an die Norm von $\mathcal{J}$ gestellt werden, implizieren sofort, daß $\mathcal{J}$ *höchstens* die Primideale $\mathcal{P}_i$ mit $\mathfrak{p}_i \in U$ enthalten kann und diese zu keiner höheren als zur erstens Potenz, da D_1D_2 selbst quadratfrei ist.

Andererseits ist ein $\mathcal{P}_i$ mit $\mathfrak{p}_i \in U$ kein Ideal der Form $\mathfrak{O}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \in J(O)$, wohl aber $\mathcal{P}_i^2 = \mathfrak{O}\mathfrak{p}_i$. Geht also $\mathcal{P}_i$ in $\mathfrak{O}\mathfrak{B}$ auf, so muß es notwendigerweise zu einer geraden Potenz in $\mathfrak{O}\mathfrak{B}$ enthalten sein. Das bedeutet, daß $\mathcal{J}$ *mindestens* Faktoren $\mathcal{P}_i^k$ mit $k \equiv r_i \bmod 2$ enthalten muß.

Insgesamt sind damit $\mathcal{J}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{B}$ eindeutig festgelegt. Die Eindeutigkeit von $\mathfrak{O}\mathfrak{B}$ überträgt sich auf das O-Ideal $\mathfrak{B}$, denn ist etwa für ein weiteres O-Ideal $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{B} = \mathfrak{O}\mathfrak{C}, \qquad \text{d. h.} \qquad \mathfrak{O} = \mathfrak{O}\mathfrak{C}\mathfrak{B}^{-1},$$

so folgt
$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}^{-1} \subseteq \mathfrak{O} \cap L = O, \qquad \text{also} \quad \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}.$$
Analog erhalten wir $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, und damit Gleichheit.

Zuletzt muß verifiziert werden, daß die Eindeutigkeit der Zerlegung nicht nur für $\tilde{\mathcal{I}}$, sondern auch für das Ideal $\mathcal{I}$ gilt, von dem wir ursprünglich ausgingen.

Zunächst einmal hängt die Gestalt von $\tilde{\mathcal{I}}$ und insbesondere seine Primidealzerlegung von der Wahl des Ideals $\mathfrak{A}$ ab. Nehmen wir nun an, wir haben zwei Ideale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{O}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{O}\mathfrak{C}$, so daß wir $\mathcal{I}$ schreiben können als
$$\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}\mathfrak{A} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{I} = \mathcal{I}'\mathfrak{C}$$
mit zweiseitigen $\mathfrak{O}$-Idealen $\tilde{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{I}'$. Nach dem, was wir bisher gezeigt haben, erhalten wir für beide Ideale jeweils eine eindeutige Zerlegung
$$\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathcal{I}' = \mathcal{J}'\mathfrak{B}'.$$
Wegen $\tilde{\mathcal{I}}\mathfrak{A} = \mathcal{I} = \mathcal{I}'\mathfrak{C}$ ist
$$\mathcal{J}'\mathfrak{B}' = \mathcal{I}\mathfrak{C}^{-1} = \tilde{\mathcal{I}}\mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1} = \mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1},$$
und aufgrund der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt
$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{B}' = \tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1}.$$
Egal, ob wir $\tilde{\mathcal{I}}$ oder $\mathcal{I}'$ benutzen, um die Zerlegung von $\mathcal{I}$ zu bestimmen, ergibt sich in jedem Fall
$$\mathcal{I} = \mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{A} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathcal{I} = \mathcal{J}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C} = \mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{C} = \mathcal{J}\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}.$$
Dies beendet den Beweis. □

Bemerkung. Die Aussage des Lemmas gilt insbesondere für ein gleichseitiges $\mathfrak{O}$-Ideal $\mathcal{I}$, da in dieser Situation für jeden imaginärquadratischen Zwischenkörper L von $A\,|\,K$ mit der zugehörigen Ordnung $O = \mathfrak{O} \cap L$ die Voraussetzungen aus Satz (2.3.10) erfüllt sind. □

Lemma 2.6.7. *Sei wie immer $\mathfrak{O}$ eine Eichler-Ordnung mit den Invarianten (D_1, D_2), L ein imaginärquadratischer Zwischenkörper und $O = \mathfrak{O} \cap L$. Es sei weiter*
$$t := \#\{\mathcal{J} \mid \mathcal{J} \text{ ist ein zweiseitiges } \mathfrak{O}\text{-Ideal und genügt } (i) \text{ und } (ii) \text{ aus Lemma (2.6.6)}\}$$
die Anzahl der zweiseitigen $\mathfrak{O}$-Ideale $\mathcal{J}$, die in der Situation von Lemma (2.6.6) auftreten können.

Dann gilt
$$t = E_{(D_1,D_2)}(O).$$

Beweis. Wir hatten im Beweis des Lemmas gesehen, wie $\mathcal{J}$ aussehen muß:
$$\mathcal{J} = \prod_{\mathfrak{p} \in U'} \mathcal{P}^{r \bmod 2},$$
wobei U' eine geeignete Teilmenge von
$$U = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1 D_2, \text{ und es ist } \mathfrak{p} \text{ unverzweigt in } L \text{ oder } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}(O)\}.$$

ist, und wieder $\mathfrak{p} = \mathcal{P} \cap R_K$ gelte.

Es folgt, daß t gerade der Anzahl der Teilmengen von U entspricht, daß also

$$t = 2^{(\#U)}$$

ist.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \mid D_1$. Wegen Korollar (1.4.10) zerfällt $\mathfrak{p}$ in L nicht. Da nach Konstruktion von O außerdem $E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0$ ist, ist $\mathfrak{p}$ kein Teiler des Führers $\mathfrak{f}(O)$. Ein solches $\mathfrak{p}$ trägt daher zu $E_{(D_1,D_2)}(O)$ entweder den Faktor 1 oder 2 bei; den Faktor 2 genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ in L unverzweigt ist und damit in U liegt.

Analog kann auch im Fall $\mathfrak{p} \mid D_2$ geschlossen werden, daß $\mathfrak{p}$ genau dann den Faktor 2 zu $E_{(D_1,D_2)}(O)$ beiträgt, wenn $\mathfrak{p} \in U$ liegt, und den Faktor 1 andernfalls.

Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Kapitel 3

Die Klassenzahlformel

Im nun folgenden abschließenden Kapitel werden wir endlich die Idealklassenzahl definieren, deren Berechnung Ziel dieser Arbeit ist.

Ein wichtiges Resultat von Abschnitt 3.1 wird sein, daß für eine Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ die Zahl der Idealklassen von $\mathfrak{O}$-Linksidealen nicht direkt von der Wahl der Ordnung $\mathfrak{O}$ abhängt, sondern nur von ihren Invarianten (D_1, D_2).

Der gesamte Abschnitt 3.2 ist der Herleitung der Klassenzahlformel gewidmet, die von M.-F. Vignéras in [20, Proposition 1.3] bewiesen wurde. Im wesentlichen geht es hierbei nur noch darum, die Ergebnisse der ersten Kapitel geeignet zu kombinieren.

3.1 Idealklassen und Typen von Ordnungen

Obwohl das Hauptinteresse den Klassen von Idealen gilt, ist es zweckmäßig, zunächst einen Äquivalenzbegriff auf den Ordnungen der Quaternionenalgebra A zu definieren. Wir setzen wieder voraus, daß alle Eichler-Ordnungen von quadratfreier Stufe sind.

Definition 3.1.1. Seien $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ beliebige Ordnungen der Quaternionenalgebra A. Man nennt $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ *vom selben Typ*, falls es ein $a \in A^*$ gibt, so daß

$$\mathfrak{O}' = a\mathfrak{O}a^{-1}$$

ist. Wir schreiben dann $\mathfrak{O} \sim \mathfrak{O}'$. Sind $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ sogar Eichler-Ordnungen der Stufe (D_1, D_2), so bezeichnet man mit

$$T_{(D_1,D_2)}$$

die Anzahl der auftretenden Äquivalenzklassen.

Bemerkung. A. K. Pizer hat sich mit der Typenzahl $T_{(D_1,D_2)}$ beschäftigt und gibt in [18, Theorem A und B] konkrete Formeln, wie sie zu berechnen ist. Für uns ist im Moment nur wichtig, daß $T_{(D_1,D_2)}$ für beliebige Invarianten (D_1, D_2) immer eine endliche Zahl ist. Wenn klar ist, um welche Invarianten es sich handelt, wollen wir diese Zahl schlicht mit T bezeichnen. $\square$

Zwei Ordnungen sind genau dann vom selben Typ, wenn sie isomorph sind. Dies gilt, da jeder Isomorphismus $\mathfrak{O} \to \mathfrak{O}'$ einen Automorphismus $A \to A$ induziert und dieser nach dem folgenden bekannten Satz von Skolem-Noether bereits ein innerer Automorphismus sein muß.

Satz 3.1.2 (Skolem-Noether). *Seien A und B zwei endlichdimensionale K-Algebren, B einfach, A sogar zentraleinfach, und seien $f, g : B \to A$ zwei K-Algebrenhomomorphismen. Dann gibt es ein Element $a \in A^*$ mit*

$$f(x) = ag(x)a^{-1} \qquad \textit{für alle } x \in B.$$

Beweis. In einer leicht allgemeineren Version wird dieser Satz beispielsweise bei F. Lorenz [13, § 29.6, Satz 20] bewiesen. □

Korollar 3.1.3. *Jeder Automorphismus f einer Quaternionenalgebra A ist ein innerer Automorphimus, das heißt von der Form*

$$f : A \to A, \quad x \mapsto axa^{-1} \qquad \textit{für ein geeignetes } a \in A^*.$$

Beweis. Man wende den Satz von Skolem-Noether auf $B = A$ und $g = \mathrm{id}_A$ an. □

Korollar 3.1.4. *Seien A eine Quaternionenalgebra über K und L ein imaginärquadratischer Zwischenkörper. Dann setzt sich jeder K-Automorphismus $f : L \to L$ zu einem inneren Automorphismus von A fort.*

Beweis. Der Körper L ist insbesondere eine endlichdimensionale einfache K-Algebra. Sei $g : L \to A$ die Inklusionsabbildung, dann gibt es wieder nach Skolem-Noether ein $a \in A^*$ mit

$$f(x) = axa^{-1} \qquad \text{für alle } x \in L.$$

Damit ist der innere Automorphismus $A \to A$, $x \mapsto axa^{-1}$ die Fortsetzung von f auf ganz A. □

Definition 3.1.5. Sei $\mathfrak{O}$ eine beliebige Ordnung von A. Zwei $\mathfrak{O}$-Linksideale $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ heißen *zur selben Klasse gehörig*, falls es ein $a \in A^*$ gibt, so daß

$$\mathcal{J} = \mathcal{I}a$$

ist. Wir schreiben dann $\mathcal{I} \sim \mathcal{J}$.

Bemerkung. Es sei darauf hingewiesen, daß die Ordnung $\mathfrak{O}$ in dieser Definition nicht notwendigerweise eine Eichler-Ordnung sein muß. Wir werden allerdings im folgenden nach wie vor ausschließlich Eichler-Ordnungen betrachten. □

Lemma 3.1.6. *Sei $\mathfrak{O}$ eine Eichler-Ordnung von A, und seien $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ zwei $\mathfrak{O}$-Linksideale. Dann haben wir die Äquivalenz*

$$\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}) \sim \mathfrak{o}_r(\mathcal{J}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{J} = \mathcal{I}\mathcal{B}a \textit{ mit } a \in A^* \textit{ und einem gleichseitigen } \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})\textit{-Ideal } \mathcal{B}.$$

Insbesondere gilt

$$\mathcal{I} \sim \mathcal{J} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}) \sim \mathfrak{o}_r(\mathcal{J}).$$

Beweis. Abkürzend schreiben wir $\mathfrak{O}' = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})$. Sei zunächst $\mathfrak{o}_r(\mathcal{J}) = a^{-1}\mathfrak{O}'a$ mit einem Element $a \in A^*$. Das Ideal $\mathcal{J}$ läßt sich schreiben als $\mathcal{J} = \mathcal{I}(\mathcal{I}^{-1}\mathcal{J}a^{-1})a$, und das dabei auftretende Ideal $\mathcal{I}^{-1}\mathcal{J}a^{-1}$ ist tatsächlich ein zweiseitiges $\mathfrak{O}'$-Ideal, denn mit den Rechenregeln (iii) und (iv) aus Proposition (2.5.4) gilt

$$\begin{array}{rrcccl} & \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}^{-1}\mathcal{J}a^{-1}) & = & \mathfrak{o}_l(\mathcal{I}^{-1}) & = & \mathfrak{O}' \\ \text{und} & \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}^{-1}\mathcal{J}a^{-1}) & = & \mathfrak{o}_r(\mathcal{J}a^{-1}) & = & a\mathfrak{o}_r(\mathcal{J})a^{-1} = \mathfrak{O}'. \end{array}$$

Ist umgekehrt $\mathcal{J}$ von der angegebenen Form $\mathcal{J} = \mathcal{I}\mathcal{B}a = \mathcal{I}\mathcal{B}(\mathfrak{O}'a)$, so gilt nach derselben Proposition:

$$\mathfrak{o}_r(\mathcal{J}) = \mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}'a) = a^{-1}\mathfrak{O}'a.$$

Der Zusatz folgt direkt mit $\mathcal{B} = \mathfrak{O}'$. □

Wir wollen untersuchen, in welchem Zusammenhang die Idealklassen verschiedener Ordnungen derselben Stufe (D_1, D_2) stehen.

Lemma 3.1.7. *Sind $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ zwei Eichler-Ordnungen derselben Stufe (D_1, D_2), so stehen die Idealklassen im Sinne von Definition (3.1.5) von $\mathfrak{O}$ in Bijektion mit denen von $\mathfrak{O}'$.*

Beweis. Wir werden die Bijektion zwischen den Idealklassen konkret angeben. Da $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ von derselben Stufe sind, gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von K die Beziehung $\mathfrak{O}'_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}a_{\mathfrak{p}}$ für ein geeignetes Element $a_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}}^*$, dabei können wir nach Korollar (2.1.7) fast alle $a_{\mathfrak{p}} = 1$ wählen.

Nach der Lokal-Global-Korrespondenz (2.1.8) wird durch

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}a_{\mathfrak{p}} \qquad \text{für alle } \mathfrak{p}$$

ein eindeutiges Ideal $\mathcal{J}$ von A bestimmmt. Offensichtlich ist $\mathfrak{o}_l(\mathcal{J}) = \mathfrak{O}$ und $\mathfrak{o}_r(\mathcal{J}) = \mathfrak{O}'$. Damit ist nach Proposition (2.5.4) folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{array}{rcl} \{\mathfrak{O}'\text{-Linksideale}\} & \rightarrow & \{\mathfrak{O}\text{-Linksideale}\} \\ \mathcal{I} & \mapsto & \mathcal{J}\mathcal{I} \end{array}$$

Mit vertauschten Rollen von $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ erhalten wir die Umkehrabbildung. Es ist klar, daß diese Abbildungen eine Bijektion auf den Idealklassen induzieren, denn offensichtlich ist mit $\mathcal{I} \sim \mathcal{I}'$ auch $\mathcal{J}\mathcal{I} \sim \mathcal{J}\mathcal{I}'$. Damit ist alles gezeigt. □

Das Lemma bedeutet also, daß die Anzahl der Idealklassen nicht unmittelbar von der Wahl der Eichler-Ordnung abhängt, sondern für alle Eichler-Ordnungen mit denselben Invarianten (D_1, D_2) identisch ist. Der Begriff der Klassenzahl $H_{(D_1,D_2)}$, den wir jetzt einführen wollen, ist demnach wohldefiniert.

Definition 3.1.8. Unter der *Klassenzahl*

$$H_{(D_1,D_2)}$$

einer Quaternionenalgebra A verstehen wir die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{O}$-Linksidealen unter der in (3.1.5) definierten Relation, wobei $\mathfrak{O}$ eine beliebige Eichler-Ordnung von A mit den Invarianten (D_1, D_2) ist.

Wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, schreiben wir auch einfach H anstelle von $H_{(D_1,D_2)}$.

Bemerkung. Natürlich kann man anstelle von $\mathfrak{O}$-Linksidealen auch $\mathfrak{O}$-Rechtsideale betrachten und Idealklassen in analoger Weise durch die Relation

$$\mathcal{I} \sim \mathcal{J} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{J} = a\mathcal{I} \quad \text{für ein } a \in A^* \tag{3.1}$$

definieren. Die daraus resultierende Klassenzahl ist jedoch identisch mit derjenigen für die $\mathfrak{O}$-Linksideale, denn die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \{\mathfrak{O}\text{-Linksideale}\} & \to & \{\mathfrak{O}\text{-Rechtsideale}\} \\ \mathcal{I} & \mapsto & \mathcal{I}^{-1} \end{array}$$

induziert eine Bijektion zwischen den Klassen von $\mathfrak{O}$-Linksidealen gemäß Definition (3.1.5) einerseits und den Klassen von $\mathfrak{O}$-Rechtsidealen bezüglich der Relation (3.1) andererseits.

Es ist daher keine Einschränkung, wenn wir uns nur mit Idealklassen von $\mathfrak{O}$-Linksidealen auseinandersetzen. □

Korollar 3.1.9. *Seien $\mathfrak{O}$ eine Eichler-Ordnung der Stufe (D_1, D_2) und $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_H$ ein vollständiges Repräsentantensystem der $\mathfrak{O}$-Linksideale. Dann sind in der Menge*

$$\{\mathfrak{o}_r(\mathcal{I}_1), \ldots, \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}_H)\}$$

der zugehörigen Rechtsordnungen sämtliche Typen von Eichler-Ordnungen derselben Stufe (D_1, D_2) vertreten.

Beweis. Wir geben uns eine beliebige Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}'$ mit Invarianten (D_1, D_2) vor. Im Beweis von Lemma (3.1.7) hatten wir ein Ideal $\mathcal{J}$ konstruiert mit

$$\mathfrak{o}_l(\mathcal{J}) = \mathfrak{O} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{o}_r(\mathcal{J}) = \mathfrak{O}'.$$

Da die Ideale $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_H$ ein vollständiges Repräsentantensystem aller $\mathfrak{O}$-Linksideale bilden, gibt es ein $j \in \{1, \ldots, H\}$, so daß $\mathcal{J} \sim \mathcal{I}_j$ ist. Nach Lemma (3.1.6) gilt dann für die Rechtsordnungen

$$\mathfrak{O}' = \mathfrak{o}_r(\mathcal{J}) \sim \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}_j) = \mathfrak{O}_j,$$

und die Aussage ist verifiziert. □

3.2 Herleitung der Klassenzahlformel

Um die Klassenzahlformel zu erhalten, die M.-F. Vignéras in ihrem Artikel [20] vorgestellt hat, müssen wir im wesentlichen nur noch die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel zusammenfügen. Zur Erinnerung seien noch einmal die früher eingeführten Bezeichnungen aufgelistet, die wir dazu benötigen werden.

- $n = [K : \mathbb{Q}]$ — Körpergrad von K
- $E_{(D_1,D_2)}(O) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} \left(1 - \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} \left(1 + \left\{\frac{O}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$ — (vgl. Definition (2.3.6))
- $J(O),\ P(O),\ Pic(O) = J(O) \big/ P(O)$ — invertierbare O-Ideale, O-Hauptideale und Picardgruppe von O (vgl. Definition (2.3.12))
- $h(O) = \# Pic(O)$ — (vgl. Definition (2.3.12))
- $e = [\mathfrak{O}^* : R_K^*]$ — (vgl. Satz (2.4.6))
- $Y_{\mathfrak{O}} := \{O_b \mid b \in \mathfrak{O}^*,\, b \notin K\}$ — (vgl. Lemma (2.4.7))
- $g_{\mathfrak{O}}(O) := \#\{O' \mid O \cong O' = \mathfrak{O} \cap \mathrm{Quot}(O')\}$ — (vgl. Lemma (2.4.7))

Außerdem führen wir folgende Bezeichnungen neu ein:

- $h_K,\ \zeta_K,\ D_K$ — Klassenzahl, Zetafunktion, Diskriminante von K
- $\Phi_K(D_1, D_2) = \prod_{\mathfrak{p} \mid D_1} (1 - N\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{p} \mid D_2} (1 + N\mathfrak{p})$

Satz 3.2.1 (Klassenzahlformel). *Sei (D_1, D_2) quadratfrei. Für die Klassenzahl $H_{(D_1,D_2)}$ einer positiv definiten Quaternionenalgebra A über einem total reellen algebraischen Zahlkörper K gilt*

$$H_{(D_1,D_2)} = \frac{h_K\, \zeta_K(-1)\, \Phi_K(D_1, D_2)}{2^{n-1}} + \sum_L \sum_O \frac{[O^* : R_K^*] - 1}{2[O^* : R_K^*]} E_{(D_1,D_2)}(O) h(O), \qquad (3.2)$$

dabei läuft die erste Summe über alle imaginärquadratischen Erweiterungen L von K mit

- $L = K(a) \subseteq \bar{K}$ *für einen fest gewählten algebraischen Abschluß $\bar{K}$,*
- $\mathrm{nrd}(a) \in R_K^*$ *und* $\mathrm{tr}(a) \in R_K$.

Die zweite Summe läuft über sämtliche Ordnungen von L, die ein a mit obigen Eigenschaften enthalten.

Beweis. Wenn $\mathfrak{O}$ eine Eichler-Ordnung mit den Invarianten (D_1, D_2) bezeichnet, so gilt es also zu zählen, in wieviele verschiedene Klassen die $\mathfrak{O}$-Linksideale zerfallen.

Man wähle ein vollständiges Repräsentantensystem

$$\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_H$$

der Idealklassen, und für jeden Repräsentanten $\mathcal{I}_j$ bezeichne $\mathfrak{O}_j$ seine Rechtsordnung; diese hat dieselben Invarianten (D_1, D_2). Da wir in Korollar (3.1.9) gesehen hatten, daß unter diesen Rechtsordnungen sämtliche Typen von Eichler-Ordnungen der Stufe (D_1, D_2) vertreten sind, können wir uns die Repräsentanten $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_H$ derart numeriert denken, daß die Rechtsordnungen

$$\mathfrak{O}_1, \ldots, \mathfrak{O}_T$$

bereits ein vollständiges Repräsentantensystem der Eichler-Ordnungen im Sinne von Definition (3.1.1) bilden. Wegen Lemma (3.1.6) ist die Äquivalenzklasse jeder dieser Rechtsordnungen auch bei anderer Wahl der Repräsentanten $\mathcal{I}_j$ eindeutig festgelegt. Wir können daher die Idealklassen repräsentantenunabhängig nach dem Typ ihrer Rechtsordnung zusammenfassen und nennen

$$H_j := \#\{k \in \{1, \ldots, H\} \mid \mathfrak{O}_k \sim \mathfrak{O}_j\} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, T$$

die Anzahl der Idealklassen, deren Rechtsordnung vom selben Typ ist wie $\mathfrak{O}_j$. Für die gesuchte Klassenzahl H gilt nun offensichtlich die Beziehung

$$H = \sum_{j=1}^{T} H_j. \tag{3.3}$$

Wir bestimmen also die Anzahl H_j derjenigen Idealklassen, die $\mathfrak{O}$ als Links- und $a\mathfrak{O}_j a^{-1}$ mit geeignetem $a \in A^*$ als Rechtsordnung haben. Nach Konstruktion ist $\mathcal{I}_j$ der Repräsentant einer solchen Klasse, und nach Lemma (3.1.6) sind daher alle weiteren Ideale $\mathcal{J}$ mit dieser Eigenschaft von der Form

$$\mathcal{J} = \mathcal{I}_j \mathcal{B} c \quad \text{ mit } c \in A^* \text{ und einem gleichseitigen } \mathfrak{O}_j\text{-Ideal } \mathcal{B}\ .$$

Nun sind zwei Ideale $\mathcal{I}_j\mathcal{B}c$ und $\mathcal{I}_j\tilde{\mathcal{B}}\tilde{c}$ genau dann äquivalent im Sinne von Definition (3.1.5), wenn $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ es sind. Die eine Richtung dieser Aussage ist trivial, für die andere Implikation überlege man sich, daß wegen $\mathcal{I}_j^{-1}\mathcal{I}_j = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}_j) = \mathfrak{O}_j = \mathfrak{o}_l(\mathcal{B}) = \mathfrak{o}_l(\tilde{\mathcal{B}})$ aus $\mathcal{I}_j\mathcal{B}cx = \mathcal{I}_j\tilde{\mathcal{B}}\tilde{c}$ folgt, daß

$$\mathcal{B} = \mathcal{I}_j^{-1}(\mathcal{I}_j\mathcal{B}cx)x^{-1}c^{-1} = \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{c}x^{-1}c^{-1})$$

gilt. Insgesamt haben wir also

$$H_j = \#\{\text{Idealklassen von zweiseitigen } \mathfrak{O}_j\text{-Idealen}\}.$$

Wir fixieren für ein $j \in \{1, \ldots, T\}$ die Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}_j$ und wie üblich einen imaginärquadratischen Zwischenkörper L über K sowie die Ordnung $O = \mathfrak{O}_j \cap L$ von L.

In Lemma (2.6.6) hatten wir eine Zerlegung eines zweiseitigen $\mathfrak{O}_j$-Ideals $\mathcal{I}$ in ein Produkt zweier Ideale $\mathcal{J}$ und $\mathfrak{B}$ angegeben. Es wird sich als zweckmäßig erweisen, wenn wir diese Zerlegung verwenden, um die Zahlen H_j zu ermitteln. Zum einen hatten wir bereits festgestellt, daß sich die Anzahl der möglichen Faktoren $\mathcal{J}$ konkret durch $E_{(D_1,D_2)}(O)$ angeben läßt. Zum anderen hoffen wir die Klassen der auftretenden O-Ideale $\mathfrak{B}$ mithilfe der Picardgruppe $Pic(O)$ beschreiben zu können.

Die folgenden Lemmata werden hilfreich sein.

Lemma 3.2.2. *Sei L wie immer ein imaginärquadratischer Zwischenkörper über K und O die durch $O = \mathfrak{O}_j \cap L$ bestimmte Ordnung in demselben. Dann gibt es ein Element $a_0 \in A^*$, so daß*

$$Fix(O) := \{a \in A^* \mid aOa^{-1} = O\} = L^* \cup a_0 L^*$$

ist. Die Vereinigung ist disjunkt.

Beweis. Um die Behauptung einzusehen, betrachten wir zu einem beliebigen $a \in A^*$ den inneren Automorphismus
$$\varphi_a : A \to A, \qquad x \mapsto axa^{-1}.$$
Ist $a \in Fix(O)$, dann bildet φ_a die Ordnung O auf sich selbst ab, und daher ist die Einschränkung $\varphi_a|_L$ von φ_a auf $L = \mathrm{Quot}(O)$ ein K-Automorphismus von L. Es liegt also $\varphi_a \in \mathrm{Gal}(L\,|\,K) = \{\mathrm{id}_L, \tau\}$. Ist umgekehrt $a \in A^*$, so daß $\varphi_a|_L$ ein Galois-Automorphismus von $L\,|\,K$ ist, so ist in jedem Fall $\varphi_a|_L(O) = O$, wie wir im Beweis von Lemma (2.4.1) gesehen hatten. Es gilt also
$$Fix(O) = \{a \in A^* \mid \varphi_a \in \mathrm{Gal}(L\,|\,K)\}.$$
Tatsächlich kommen auch beide Fälle $\varphi_a|_L = \mathrm{id}_L$ und $\varphi_a|_L = \tau$ vor, denn nach Korollar (3.1.4) zum Satz von Skolem-Noether gibt es zu jedem K-Automorphismus f von L einen inneren Automorphismus von A, der f fortsetzt. Wir wählen ein $a_0 \in A^*$ mit $\varphi_{a_0}|_L = \tau$. Dann ist
$$a_0xa_0^{-1} = \bar{x} \qquad \text{für alle } x \in L. \tag{3.4}$$
Weiter gilt für beliebiges $a \in Fix(O)$
$$x = \begin{cases} a^{-1}xa, & & \text{falls } \varphi_a|_L = \mathrm{id}_L, \\ a^{-1}\bar{x}a & = \;(a_0^{-1}a)^{-1}x(a_0^{-1}a), & \text{falls } \varphi_a|_L = \tau \end{cases} \qquad \text{für alle } x \in L.$$
Mit anderen Worten: Die Elemente a bzw. $a_0^{-1}a$ kommutieren elementweise mit L. Da aber L bereits ein maximaler kommutativer Teilkörper von A ist, haben wir für jedes $a \in A^*$
$$a \in L^* \qquad \text{oder} \qquad a_0^{-1}a \in L^*.$$
Die beiden Fälle schließen sich gegenseitig aus, da andernfalls auch a_0 in L^* liegen müßte, was wegen (3.4) nicht sein kann. Damit gilt $Fix(O) \subseteq L^* \cup a_0L^*$.

Ist umgekehrt $a \in L^* \cup a_0L^*$, so ist $aOa^{-1} = O$, da Elemente aus L^* natürlich mit O vertauschen und a_0 so gewählt war, daß es ebenfalls O in sich selbst überführt.

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Lemma 3.2.3. *Seien wieder $O = \mathfrak{O}_j \cap L$, $Fix(O)$ wie im vorigen Lemma und*
$$S(O) := \{a \in A^* \mid a^{-1}\mathfrak{O}_ja \cap L = O\}.$$
Dann ist $Fix(O)$ eine Gruppe, die durch Rechtsmultiplikation auf $S(O)$ operiert, und $g_{\mathfrak{O}_j}(O)$ ist die Anzahl der auftretenden Bahnen.

Beweis. Daß $Fix(O)$ eine Gruppe ist, bedarf keines weiteren Kommentares.

Seien $a \in S(O)$ und $x \in Fix(O)$. Wegen $x^{-1}Ox = O$ ist O sowohl eine Ordnung von L als auch von $x^{-1}Lx$. Diese Quotientenkörper müssen notwendigerweise übereinstimmen, und es folgt
$$(ax)^{-1}\mathfrak{O}_j(ax) \cap L = x^{-1}(a^{-1}\mathfrak{O}_ja \cap L)x = x^{-1}Ox = O,$$
wonach $ax \in S(O)$ ist. Also operiert $Fix(O)$ von rechts auf $S(O)$.

Per definitionem ist
$$g_{\mathfrak{O}_j}(O) = \#\{O' \mid O' = \mathfrak{O}_j \cap L' \text{ für einen Körper } L', \text{ und } O' \cong O\}.$$

Wir wollen diese Menge anders beschreiben. Sei dazu O' ein Element dieser Menge. Die Isomorphie $O' \cong O$ setzt sich zu einer Isomorphie der Quotientenkörper fort, also $L' \cong L$. Nach Korollar (3.1.4) aus dem Satz von Skolem-Noether ist daher $L' = aLa^{-1}$ mit einem $a \in A^*$. Wir können also $O' = \mathfrak{O}_j \cap aLa^{-1}$ schreiben und erhalten außerdem

$$O = a^{-1}O'a = a^{-1}\mathfrak{O}_j a \cap L.$$

Ist umgekehrt eine Ordnung $O' = \mathfrak{O}_j \cap aLa^{-1}$ mit einem solchen $a \in A^*$ gegeben, daß $a^{-1}\mathfrak{O}_j a \cap L = O$ erfüllt ist, so folgt $O' = a(a^{-1}\mathfrak{O}_j a \cap L)a^{-1} = aOa^{-1} \cong O$. Damit ist

$$\{O' \mid O' = \mathfrak{O}_j \cap L' \text{ für einen Körper } L', \text{ und } O' \cong O\} = \{\mathfrak{O}_j \cap aLa^{-1} \mid a^{-1}\mathfrak{O}_j a \cap L = O\},$$

also

$$\begin{aligned} g_{\mathfrak{O}_j}(O) &= \#\{\mathfrak{O}_j \cap aLa^{-1} \mid a^{-1}\mathfrak{O}_j a \cap L = O\} \\ &= \#\{\mathfrak{O}_j \cap aLa^{-1} \mid a \in S(O)\}. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Lemmas ist bewiesen, sobald wir für $a, b \in S(O)$ die Äquivalenz

$$\mathfrak{O}_j \cap aLa^{-1} = \mathfrak{O}_j \cap bLb^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad b \in aFix(O)$$

gezeigt haben. Es gelte also die linke Seite. Das bedeutet, $\mathfrak{O}_j \cap aLa^{-1}$ ist eine Ordnung sowohl von aLa^{-1} als auch von bLb^{-1}, so daß diese Körper übereinstimmen müssen. Genauer haben wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}_j \cap aLa^{-1} = \mathfrak{O}_j \cap bLb^{-1} &\Longleftrightarrow aLa^{-1} = bLb^{-1} \\ &\Longleftrightarrow aOa^{-1} = bOb^{-1} \\ &\Longleftrightarrow a^{-1}b \in Fix(O), \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Lemma 3.2.4. *Seien wieder L ein imaginärquadratischer Zwischenkörper und O eine Ordnung in demselben. Weiter sei $\mathfrak{O}$ eine beliebige Eichler-Ordnung der Stufe (D_1, D_2) mit $\mathfrak{O} \cap L = O$. Dann sind die Zahlen*

$$h_j := \#\{\bar{\mathfrak{B}} \in Pic(O) \mid \mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{B}) \sim \mathfrak{O}_j\} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, T$$

unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{O}$, und es gilt

$$\sum_{j=1}^{T} h_j = h(O). \tag{3.5}$$

Beweis. Zunächst einmal ist klar, daß

$$M_j(\mathfrak{O}) := \{\bar{\mathfrak{B}} \in Pic(O) \mid \mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{B}) \sim \mathfrak{O}_j\}$$

eine wohldefinierte Menge ist, denn wenn man $\mathfrak{B}$ um ein O-Hauptideal abändert, ändert sich der Typ der Rechtsordnung $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{B})$ nicht.

Auch die Aussage (3.5) ist klar. Zu zeigen ist nur die behauptete Unabhängigkeit der Definition von der Wahl der Ordnung $\mathfrak{O}$.

Wir betrachten also zwei Ordnungen $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{O} \cap L = O$ und $\mathfrak{O}' \cap L = O$. Nach Satz (2.3.10) gibt es dann ein Ideal $\mathfrak{A} \in J(O)$ mit

$$\mathfrak{O}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}\mathfrak{A}.$$

Wir benutzen dieses Ideal, um eine Abbildung

$$\varphi : J(O) \to J(O), \qquad \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$$

zu definieren. Diese ist offensichtlich wohldefiniert und bijektiv. Ferner induziert φ auf kanonische Weise auch eine Bijektion $\bar{\varphi} : Pic(O) \to Pic(O)$, denn wie man wegen der Kommutativität von L leicht einsieht, ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}a \quad \text{mit } a \in L^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-1}a \quad \text{mit } a \in L^*.$$

Gezeigt werden muß, daß $\bar{\varphi}$ die Menge $M_j(\mathfrak{O})$ auf $M_j(\mathfrak{O}')$ abbildet. Dies erhält man jedoch leicht aus folgender Rechnung. Sei $\bar{\mathfrak{B}} \in M_j(\mathfrak{O})$, also $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{B}) \sim \mathfrak{O}_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}'\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}) &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{O}'\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} \\
&= \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{O}\mathfrak{B} \qquad \text{(da } \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B} \text{ kommutieren)} \\
&= \mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{B}) \sim \mathfrak{O}_j,
\end{aligned}$$

also ist $\bar{\varphi}(\bar{\mathfrak{B}}) = \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}} \in M_j(\mathfrak{O}')$ und damit $\bar{\varphi}(M_j(\mathfrak{O})) \subseteq M_j(\mathfrak{O}')$. Die umgekehrte Inklusion $M_j(\mathfrak{O}') \subseteq \bar{\varphi}(M_j(\mathfrak{O}))$ folgt ganz analog.

Insgesamt ergibt sich also

$$\#M_j(\mathfrak{O}) = \#M_j(\mathfrak{O}'),$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Lemma 3.2.5. *In der Situation von Lemma (3.2.2) gilt für die oben definierten Klassenzahlen H_j von zweiseitigen $\mathfrak{O}_j$-Idealen*

$$H_j = \frac{h_j\, E_{(D_1,D_2)}(O)\, e_j}{2g_j\, [O^* : R_K^*]}$$

mit $e_j = [\mathfrak{O}_j^* : R_K^*]$, $g_j = g_{\mathfrak{O}_j}(O)$ und h_j wie in Lemma (3.2.4).

Beweis. Die Menge aller zweiseitigen $\mathfrak{O}_j$-Ideale $\mathcal{J}$, die den Bedingungen

(i) $\mathrm{nrd}(\mathcal{J}) \mid D_1D_2$,

(ii) $\mathfrak{p} \mid \mathrm{nrd}(\mathcal{J}) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{p}$ ist unverzweigt in L oder $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}(O)$

genügen, bezeichnen wir vorübergehend mit J. In Lemma (2.6.7) hatten wir gesehen, daß $\#J = E_{(D_1,D_2)}(O)$ ist.

Weiter seien $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{h_j} \in J(O)$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Idealklassen $\bar{\mathfrak{B}}$ in $Pic(O)$ — also modulo L^*, nicht modulo A^* —, für die zusätzlich $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}_j\mathfrak{B}) \sim \mathfrak{O}_j$ ist. Wir setzen

$$X := \{\mathcal{J}\mathfrak{B}_i \mid \mathcal{J} \in J,\ i \in \{1, \ldots, h_j\}\}$$

Nach Konstruktion ist die Menge X endlich. Ihre Mächtigkeit ist wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung $\mathcal{J}\mathfrak{B}$, die wir in Lemma (2.6.6) gesehen hatten, genau

$$\#X = h_j\, E_{(D_1,D_2)}(O).$$

Sei nun $\mathcal{I}$ ein beliebiges zweiseitiges $\mathfrak{O}_j$-Ideal. Es läßt sich als

$$\mathcal{I} = \mathcal{J}\mathfrak{B} \qquad \text{mit } \mathcal{J} \in J \text{ und } \mathfrak{B} \in J(O)$$

schreiben. Ein Vergleich der Rechtsordnungen liefert zusätzlich $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}_j\mathfrak{B}) = \mathfrak{o}_r(\mathcal{I}) = \mathfrak{O}_j$. Nach Konstruktion der Repräsentanten $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{h_j}$ gibt es ein $x \in L^*$, so daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_i x$ ist. Es folgt

$$\mathcal{I} = \mathcal{J}\mathfrak{B} \sim \mathcal{J}\mathfrak{B}_i \in X.$$

Mit anderen Worten: Jede Idealklasse von zweiseitigen $\mathfrak{O}_j$-Idealen ist auch unter den Klassen der Ideale aus X vertreten.

Umgekehrt gibt es aber auch zu jedem Ideal $\mathcal{J}\mathfrak{B}_i \in X$ ein zweiseitiges $\mathfrak{O}_j$-Ideal $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{J}\mathfrak{B}_i \sim \mathcal{I}$. Ist nämlich etwa $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}_j\mathfrak{B}_i) = b^{-1}\mathfrak{O}_j b$ mit einem $b \in A^*$, so setze $\mathcal{I} = \mathcal{J}\mathfrak{B}_i b^{-1}$. Insgesamt ergibt sich daher

$$H_j = \#\left(\{\text{zweiseitige } \mathfrak{O}_j\text{-Ideale}\}/_{\text{„}\sim\text{“}}\right) = \#\left(X/_{\text{„}\sim\text{“}}\right) \tag{3.6}$$

Sei von jetzt an $\mathcal{I}$ ein fest gewähltes zweiseitiges $\mathfrak{O}_j$-Ideal. In Hinblick auf (3.6) werden wir zunächst

$$\#\{\mathcal{I}a \in X \mid a \in A^*\}$$

bestimmen. Ist $X \ni \mathcal{J}\mathfrak{B}_i = \mathcal{I}a$ mit $a \in A^*$, dann stimmen auch die Rechtsordnungen beider Ideale überein, also $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}_j\mathfrak{B}_i) = a^{-1}\mathfrak{O}_j a$. Wir wenden Teil (ii) von Satz (2.3.10) an und erhalten $a^{-1}\mathfrak{O}_j a \cap L = O$, also gilt notwendigerweise schon $a \in S(O)$, und damit

$$\#\{\mathcal{I}a \in X \mid a \in A^*\} = \#\{\mathcal{I}a \in X \mid a \in S(O)\}.$$

Auf $S(O)$ operiert die Gruppe L^* durch Rechtsmultiplikation; denn ist $a \in S(O)$ und $x \in L^*$, so ist ganz offensichtlich

$$(ax)^{-1}\mathfrak{O}_j(ax) \cap L = x^{-1}(a^{-1}\mathfrak{O}_j a \cap L)x = x^{-1}Ox = O,$$

also $ax \in S(O)$. Die Anzahl der Bahnen ist wegen der in Lemma (3.2.2) gezeigten Zerlegung $Fix(O) = L^* \cup a_0 L^*$ gleich

$$\#\left(S(O)/L^*\right) = 2 \cdot \#\left(S(O)\big/Fix(O)\right) = 2g_j.$$

Da die $\mathfrak{B}_i$ als Repräsentantensystem modulo L^* gewählt waren, ist klar, daß es in jeder der auftretenden Bahnen nur genau ein Element a geben kann, für das $\mathcal{I}a$ in X liegt. Sei $a_1, \ldots, a_{2g_j} \in S(O)$ ein Repräsentantensystem von $S(O)/L^*$. Wir haben dann

$$\#\{\mathcal{I}a \in X \mid a \in A^*\} = \#\{\mathcal{I}a_1, \ldots, \mathcal{I}a_{2g_j}\}.$$

Allgemein stimmen zwei Ideale $\mathcal{I}a$ und $\mathcal{I}b$ mit Elementen $a, b \in A^*$ genau dann überein, wenn $ab^{-1} \in \mathfrak{o}_r(\mathcal{I})^*$ ist, wenn also $a \in \mathfrak{O}_j^* b$ gilt. Nun operiert die Gruppe $\mathfrak{O}_j^*$ durch Linksmultiplikation auf der Menge $\{a_1L^*, \ldots, a_{2g_j}L^*\}$. Denn ist $y \in \mathfrak{O}_j^*$, so ist mit $a_i \in S(O)$ auch $ya_i \in S(O)$, wie man leicht verifiziert, also ist $(ya_i)L^*$ eine der Bahnen von $S(O)/L^*$.

Wir haben daher

$$\#\{\mathcal{I}a \in X \mid a \in A^*\} = \#\left(\mathfrak{O}_j^* \setminus S(O)/L^*\right).$$

Der Stabilisator von einem a_iL^* unter der Operation von $\mathfrak{O}_j^*$ ist

$$\{y \in \mathfrak{O}_j^* \mid ya_iL^* = a_iL^*\} = \{y \in \mathfrak{O}_j^* \mid y \in a_iL^*a_i^{-1}\} = a_iO^*a_i^{-1}.$$

Damit ist seine Bahnlänge $[\mathfrak{O}_j^* : a_i O^* a_i^{-1}] = [\mathfrak{O}_j^* : O^*]$, und diese Länge ist unabhängig von a_i. Es folgt, daß $S(O)/L^*$ unter Linksmultiplikation mit $\mathfrak{O}_j^*$ in gleichgroße Doppelnebenklassen zerfällt, deren Anzahl genau

$$\#\left(\mathfrak{O}_j^* \setminus {S(O)}/{L^*}\right) = \frac{2g_j}{[\mathfrak{O}_j^* : O^*]}$$

ist.

Diese Anzahl wiederum ist unabhängig von dem eingangs gewählten Ideal $\mathcal{I}$ und wird für alle zweiseitigen $\mathfrak{O}_j$-Ideale dieselbe sein. Für die Klassenzahl H_j ergibt sich daher unter Berücksichtigung von (3.6)

$$\begin{aligned} H_j &= \frac{\#X}{\#(\mathfrak{O}_j^* \setminus S(O)/L^*)} \\ &= \frac{h_j\, E_{(D_1,D_2)}(O)\, e_j}{2g_j\, [O^* : R_K^*]} \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Wenn wir von der Beziehung (3.3) Gebrauch machen wollen und die H_j aufsummieren, um H zu erhalten, stehen wir zunächst vor dem Problem, daß wir die Typenzahl T der Ordnungen nicht kennen. Dennoch werden wir in der Lage sein, das unbekannte T aus der Gleichung zu eliminieren, indem wir folgende Formel von M. Eichler verwenden.

Satz 3.2.6. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{T} \frac{H_j}{e_j} &= \frac{2h_K\, \zeta_K(2) D_K^{3/2}}{(2\pi)^{2n}} \prod_{\mathfrak{p}\,\mid\, D_1} (N\mathfrak{p} - 1) \prod_{\mathfrak{p}\,\mid\, D_2} (N\mathfrak{p} + 1) \\ &= \frac{h_K\, \zeta_K(-1)}{2^{n-1}} \prod_{\mathfrak{p}\,\mid\, D_1} (1 - N\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{p}\,\mid\, D_2} (1 + N\mathfrak{p}), \end{aligned} \tag{3.7}$$

dabei verwenden wir die zu Beginn des Abschnitts angegebenen Bezeichnungen und zusätzlich $e_j = [\mathfrak{O}_j^* : R_K^*]$.

Beweis. Den Beweis der ersten Gleichheit findet man bei M. Eichler in [6, § 4].

Um dieses Ergebnis in den etwas weniger komplizierten zweiten Ausdruck umzuformen, verwendet man die für Dedekindsche Zeta-Funktionen bekannte Funktionalgleichung. Diese ist beispielsweise bei J. Neukirch in [14, § VII.5, Korollar (5.11)] nachzulesen und lautet für die hier interessierenden Argumente -1 und 2 wie folgt

$$\begin{aligned} \zeta_K(-1) &= \left| D_K^{3/2} \right| (-1)^n \frac{1}{\pi^{2n}}\, \zeta_K(2) \\ &= \frac{2\,\zeta_K(2)\, D_K^{3/2}}{(2\pi)^{2n}}\, 2^{n-1}(-1)^n \end{aligned}$$

Man beachte dabei, daß K ein total reeller Zahlkörper ist und daher seine Diskriminante D_K als Quadrat der Determinante einer reellen Matrix nicht negativ sein kann.

Der scheinbar noch störende Faktor $(-1)^n$ verschwindet, denn wir multiplizieren in (3.7) für $\mathfrak{p} \mid D_1$ nicht mehr über Terme der Form $(N\mathfrak{p} - 1)$, sondern über $(1 - N\mathfrak{p})$. Dies liefert für jedes solche $\mathfrak{p}$ einen weiteren Faktor (-1), und da nach Satz (1.4.1)

$$n \equiv \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \bmod 2$$

gilt, heben sich die Vorzeichen insgesamt auf. □

Die Gleichungen (3.3) und (3.7) sowie Lemma (2.4.7) setzen sich nun wie folgt zusammen

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^{T} H_j \\ &= \sum_{j=1}^{T} \frac{H_j}{e_j} \left(1 + \sum_{O \in Y_j} g_j \big([O^* : R_K^*] - 1 \big) \right) \\ &= \frac{h_K \zeta_K(-1)}{2^{n-1}} \Phi_K(D_1, D_2) + \sum_{j=1}^{T} \sum_{O \in Y_j} \frac{H_j g_j \left([O^* : R_K^*] - 1 \right)}{e_j} \\ &= \frac{h_K \zeta_K(-1)}{2^{n-1}} \Phi_K(D_1, D_2) + \sum_{j=1}^{T} \sum_{O \in Y_j} \frac{h_j \, E_{(D_1,D_2)}(O) \left([O^* : R_K^*] - 1 \right)}{2[O^* : R_K^*]}. \end{aligned}$$

Zuletzt müssen wir uns überlegen, daß wir in dieser Gleichung die Summation geeignet vertauschen können, um zu der Doppelsumme in der Behauptung des Satzes zu gelangen.

Es ist aber klar, daß es keinen Unterschied macht, ob man zuerst über alle Eichler-Ordnungen $\mathfrak{O}_j$ summiert und für jede sämtliche Ordnungen betrachtet, die durch Herunterschneiden von $\mathfrak{O}_j$ auf geeignete Zwischenkörper entstehen, oder ob man andererseits zuerst alle diese Zwischenkörper und sämtliche in ihnen enthaltenen Ordnungen O durchläuft und dann für jede dieser Ordnungen all diejenigen $\mathfrak{O}_j$ betrachtet, die über ihr liegen.

Mit anderen Worten: Wir haben

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{h_K \zeta_K(-1)}{2^{n-1}} \Phi_K(D_1, D_2) \\ & + \sum_{L} \sum_{O} \sum_{\substack{j=1 \\ O \cong O' \text{ mit} \\ O' = \mathfrak{O}_j \cap \mathrm{Quot}(O')}}^{T} \frac{h_j \, E_{(D_1,D_2)}(O) \left([O^* : R_K^*] - 1 \right)}{2[O^* : R_K^*]}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dabei laufen die mit „L“ bzw. mit „O“ gekennzeichneten Summen gerade über alle imaginärquadratischen Körpererweiterungen L von K mit

- $L = K(a) \subseteq \bar{K}$ für einen fest gewählten algebraischen Abschluß $\bar{K}$,
- $\mathrm{nrd}(a) \in R_K^*$ und $\mathrm{tr}(a) \in R_K$,

bzw. über sämtliche Ordnungen von L, die ein a mit obigen Eigenschaften enthalten.

Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 3.2.7. *Seien $\mathfrak{O}_j \in \{\mathfrak{O}_1, \ldots, \mathfrak{O}_T\}$ eine Eichler-Ordnung und L eine imaginärquadratische Körpererweiterung von K, nicht notwendig $L \subseteq A$. Dann gilt für eine Ordnung O von L*

Es gibt eine Ordnung O' innerhalb von A mit $O \cong O'$ und $O' = \mathfrak{O}_j \cap \mathrm{Quot}(O')$ $\iff$ $E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0$ *und* $h_j \neq 0$.

Beweis. Die Implikation von links nach rechts ist klar. Denn daß $E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0$ ist, ist gerade die Aussage von Korollar (2.3.9), und daß $h_j \neq 0$ ist, folgt, weil $\mathfrak{B} := \bar{1}$ in der Menge $M_j(\mathfrak{O}_j)$ aus dem Beweis von Lemma (3.2.4) enthalten ist.

Nehmen wir umgekehrt an, daß $E_{(D_1,D_2)}(O) \neq 0$ sowie $h_j \neq 0$ ist. Wieder nach Korollar (2.3.9) folgt die Existenz einer zu O isomorphen Ordnung O' in A und einer Eichler-Ordnung $\mathfrak{O}$ mit

$$\mathfrak{O} \cap L' = O',$$

wo $L' = \mathrm{Quot}(O')$ sei.

Da also $\mathfrak{O}$ über O' liegt gibt es wegen $h_j \neq 0$ ein $\mathfrak{B} \in J(O')$ mit $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{B}) \sim \mathfrak{O}_j$, also etwa $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{B}) = a^{-1}\mathfrak{O}_j a$ mit einem $a \in A^*$. Satz (2.3.10) besagt, daß mit $\mathfrak{O}$ auch $\mathfrak{o}_r(\mathfrak{O}\mathfrak{B})$ über O' liegen muß, also

$$a^{-1}\mathfrak{O}_j a \cap L' = O'.$$

Damit haben wir

$$\mathfrak{O}_j \cap aL'a^{-1} = aO'a^{-1} \cong O' \cong O,$$

und $aO'a^{-1}$ ist die Ordnung, die es zu konstruieren galt. □

Das Lemma besagt also, daß in (3.8) in der innersten Summe die Zusatzbedingung, daß $\mathfrak{O}_j$ über $O' \cong O$ liegen soll, nicht nötig ist, da andernfalls der Summand ohnehin den Wert 0 hat. Dies berücksichtigend haben wir also schließlich

$$\begin{aligned} H &= \frac{h_K \zeta_K(-1)}{2^{n-1}} \Phi_K(D_1, D_2) + \sum_L \sum_O \sum_{j=1}^{T} h_j \, \frac{E_{(D_1,D_2)}(O)\big([O^* : R_K^*] - 1\big)}{2[O^* : R_K^*]} \\ &= \frac{h_K \zeta_K(-1)}{2^{n-1}} \Phi_K(D_1, D_2) + \sum_L \sum_O \frac{\big([O^* : R_K^*] - 1\big)}{2[O^* : R_K^*]} \, h(O) \, E_{(D_1,D_2)}(O). \end{aligned}$$

Dies ist genau die Formel für die Klassenzahl $H = H_{(D_1,D_2)}$, die zu zeigen war, und der Beweis ist damit beendet. □

Anhang A

Klassenzahlen für verschiedene Grundkörper

Zum Abschluß dieser Arbeit sollen einige Ergebnisse angegeben werden, die durch die Implementierung der Klassenzahlformel aus Kapitel 3 erzielt werden konnten. Alle Berechnungen wurden mithilfe von PARI, Version 2.1.0, durchgeführt. Nähere Informationen zu PARI/GP findet man in [17]. Beschreibungen der meisten dort implementierten Algorithmen stehen bei H. Cohen [1] und [2].

A.1 Ein ausführliches Beispiel

Wir beginnen mit einem Beispiel. Anhand von

$$K = \mathbb{Q}[t] \big/ (t^2 - 5) \qquad \text{und} \qquad (D_1, D_2) = (1, 1)$$

soll kurz veranschaulicht werden, wie die Berechnungen vorgenommen wurden.

Wir haben für K die Daten

$$D_K = 5, \quad h_K = 1, \quad \mathrm{Reg}_K \approx 0.481211825, \quad \zeta_K(-1) = \frac{1}{30}$$

für Diskriminante, Klassenzahl, Regulator und Zetafunktion an der Stelle -1. Diese Daten können direkt mithilfe von PARI bestimmt werden.

Die Summe in der Klassenzahlformel läuft über Körpererweiterungen $L \mid K$ der Form

$$L = K[x] \big/ (x^2 - \mathrm{tr}(a)x + \mathrm{nrd}(a)) \quad \text{mit} \begin{cases} \mathrm{tr}(a) \in R_K, \ \ \mathrm{nrd}(a) \in R_K^*, \\ \sigma(4\mathrm{tr}(a) - \mathrm{nrd}(a)) < 0 \text{ für alle } \sigma : K \to \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nach Lemma (1.3.8) sind dies endlich viele, und mit dem Verfahren, das in der dem Lemma folgenden Bemerkung beschrieben ist, wurden diese Erweiterungen ermittelt; es sind

$$\begin{aligned} L_1 &= K[x] \big/ (x^2 + 1) &&= \mathbb{Q}[x] \big/ (x^4 + 3x^2 + 1)\ , \\ L_2 &= K[x] \Big/ (x^2 + \frac{t+1}{2}x + 1) &&= \mathbb{Q}[x] \big/ (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)\ , \\ L_3 &= K[x] \big/ (x^2 + x + 1) &&= \mathbb{Q}[x] \big/ (x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\ . \end{aligned}$$

Die Klassenzahlen h_{L_i}, die Zahlen $\#W_{L_i}$ der Einheitswurzeln und die Einheitenindizes Q_{L_i}, die mithilfe der Regulatoren gemäß Proposition (2.4.5) ermittelt wurden, sind in den drei Fällen

$$\begin{array}{rclrclr} h_{L_1} &=& 1, & h_{L_2} &=& 1, & h_{L_3} = 1, \\ \#W_{L_1} &=& 4, & \#W_{L_2} &=& 10, & \#W_{L_3} = 6, \\ Q_{L_1} &=& 1, & Q_{L_2} &=& 1, & Q_{L_3} = 1. \end{array}$$

In L_1 hat die Ordnung $R_K[i]$ mit einer Nullstelle i des Polynoms $x^2 + 1$ bereits den Führer 1, also liegen keine Ordnungen echt oberhalb von $R_K[i]$. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Körper L_2 und L_3. In Proposition (2.4.4) hatten wir gesehen, daß

$$[R^*_{L_i} : R^*_K] = \frac{1}{2} Q_{L_i} \#W_{L_i} \qquad \text{für alle } i = 1, 2, 3$$

gilt.

Die Klassenzahl $H_{(1,1)}$ setzt sich also aus folgenden vier Summanden zusammen:

$$\begin{array}{rclcl} \dfrac{h_K\, \zeta_K(-1)\, \Phi_K(1,1)}{2^{n-1}} &=& \dfrac{1 \cdot \frac{1}{30} \cdot 1}{2} &=& \dfrac{1}{60}, \\ \dfrac{[R^*_{L_1} : R^*_K] - 1}{2[R^*_{L_1} : R^*_K]} E_{(1,1)}(R_{L_1}) h_{L_1} &=& \dfrac{2-1}{2 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 1 &=& \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{[R^*_{L_2} : R^*_K] - 1}{2[R^*_{L_2} : R^*_K]} E_{(1,1)}(R_{L_2}) h_{L_2} &=& \dfrac{5-1}{2 \cdot 5} \cdot 1 \cdot 1 &=& \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{[R^*_{L_3} : R^*_K] - 1}{2[R^*_{L_3} : R^*_K]} E_{(1,1)}(R_{L_3}) h_{L_3} &=& \dfrac{3-1}{2 \cdot 3} \cdot 1 \cdot 1 &=& \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Also ergibt sich

$$H_{(1,1)} = \frac{1}{60} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = 1.$$

□

Für jeden Körper K, den wir im folgenden untersuchen, sind zwei Tabellen angegeben. Die erste listet Eigenschaften derjenigen imaginärquadratischen Erweiterungen $L_i \mid K$ auf, die wir für die Berechnung der Klassenzahl benötigen. Diese Tabelle ist wie folgt zu lesen:

1. Spalte: Hier stehen die quadratischen Körpererweiterungen L_i von K, die von einem Element $a \in A$ mit $\mathrm{nrd}(a) \in R^*_K$ und $\mathrm{tr}(a) \in R_K$ erzeugt werden. Sie wurden gemäß Lemma (1.3.8) und der nachfolgenden Bemerkung ermittelt. Angegeben ist jeweils ein Polynom f, das L_i über $\mathbb{Q}$ erzeugt, also $L_i = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$.

2.–4. Spalte: Sie enthalten in dieser Reihenfolge die Klassenzahl, eine Approximation des Regulators und die Anzahl der Einheitswurzeln von dem jeweiligen Körper L_i.

5. Spalte: Diese Spalte gibt den in Definition (2.4.3) definierten Einheitenindex von R_{L_i} an. Die Berechnung erfolgte nach Proposition (2.4.5).

6. Spalte: Zu jedem Körper L_i werden hier die Führer der gemäß Lemma (2.3.4) zu betrachtenden Ordnungen aufgelistet.

Die zweite Tabelle, die zu jedem K angegeben ist, enthält eine Auswahl von Idealklassenzahlen $H_{(D_1,D_2)}$. Für D_1 und D_2 wurden sämtliche ganzen Ideale von K berücksichtigt, die teilerfremd sowie quadratfrei sind und deren Norm unterhalb einer gewissen Schranke liegt. Diese Schranken sind von Fall zu Fall leicht unterschiedlich gewählt und jeweils angegeben.

Außerdem durchläuft D_1 gemäß Satz (1.4.1) nur quadratfreie ganze Ideale des jeweiligen Grundkörpers K, bei denen die Anzahl ihrer Primteiler dieselbe Parität hat wie der Körpergrad $[K : \mathbb{Q}]$.

Primideale von K, die über einer Primzahl p von $\mathbb{Z}$ liegen, sind mit $\mathfrak{p}_p, \mathfrak{q}_p, \mathfrak{r}_p, \ldots$ bezeichnet. Es kommt oft vor, daß Primideale von K, die über der gleichen Primzahl p liegen, in einer Erweiterung L_i dasselbe Verzweigungsverhalten aufweisen. Die Klassenzahl $H_{(D_1,D_2)}$ ändert sich aber nicht, wenn ein Teiler $\mathfrak{p}_p$ von D_1 (oder D_2) etwa durch ein $\mathfrak{q}_p$ ersetzt wird, das über derselben Primzahl liegt wie $\mathfrak{p}_p$, in allen L_i dasselbe Verzweigungsverhalten hat und genau dann den Führer $\mathfrak{f}(O)$ der vorkommenden Ordnungen teilt, wenn $\mathfrak{p}_p$ es tut. In solchen Fällen ist aus Gründen der Platzersparnis von den Primidealen $\mathfrak{q}_p$ und $\mathfrak{p}_p$ jeweils nur eines in die Tabelle aufgenommen.

Vereinbarung A.1.1. In den nachfolgenden Tabellen stehen $\mathfrak{p}_p, \mathfrak{q}_p, \ldots$ für eine beliebige Permutation der über der Primzahl p liegenden Primideale von K, sofern alle diese Ideale in den Erweiterungen L_i dasselbe Verzweigungsverhalten haben und somit zu derselben Klassenzahl führen.

Muß zwischen den Idealen $\mathfrak{p}_p, \mathfrak{q}_p, \ldots$ unterschieden werden, weil obige Voraussetzungen nicht gegeben sind, wird dies jeweils zu Beginn der betreffenden Tabelle explizit angegeben.

In einigen Situationen konnte die Klassenzahl $H_{(D_1,D_2)}$ nicht ermittelt werden. Das war immer dann der Fall, wenn in einer Erweiterung $L \mid K$ für eine Ordnung O mit Führer $\mathfrak{f}(O) \neq 1$ der Index $[O^* : R_K^*]$ zu berechnen war. Die Beziehung

$$[O^* : R_K^*] = \frac{1}{2} Q(O) \# W(O)$$

aus Proposition (2.4.4) führt zwar für $O = R_L$ zu einem Ergebnis; für eine beliebige Ordnung O, von der wir keine Basis aus Fundamentaleinheiten kennen, ist die Berechnung von $Q(O)$ mit den in dieser Arbeit erörterten Methoden jedoch nicht möglich. Aus obiger Gleichung ist lediglich eine gewisse Abschätzung für $[O^* : R_K^*]$ zu erhalten.

Unter Umständen ist die Berechnung von $[O^* : R_K^*]$ aber gar nicht nötig. Wenn nämlich die Invarianten (D_1, D_2) und der Führer $\mathfrak{f}(O)$ die Eigenschaft haben, daß der von ihnen abhängige Wert $E_{(D_1,D_2)}(O) = 0$ ist, wird in der Formel für $H_{(D_1,D_2)}$ der gesamte Summand für O annulliert. Dann konnte trotz unbekanntem $[O^* : R_K^*]$ ein Ergebnis erzielt werden.

Wann immer die Klassenzahl $H_{(D_1,D_2)}$ nicht berechnet werden konnte, ist dies in den Tabellen durch „...“ gekennzeichnet. Weitere theoretische Resultate und praktische Implementierungen sind nötig, um auch diese Lücken zu schließen.

A.2 Der Körper der rationalen Zahlen

Für den Grundkörper $K = \mathbb{Q}$ hat A. K. Pizer in [18, § 16] bereits eine ausführliche Tabelle von Klassenzahlen veröffentlicht. Enthalten sind alle möglichen Invarianten (D_1, D_2) mit $D_1 D_2$ quadratfrei und $D_1 D_2 \leq 210$. Seine Ergebnisse konnten verifiziert werden, einzige Ausnahme ist der Fall $(D_1, D_2) = (5, 23)$; dort sollte es $H_{(5,23)} = 8$ anstelle von $= 10$ heißen. M.-F. Vignéras hatte in [20] auf diesen Fehler bereits aufmerksam gemacht.

A.3 Zahlkörper vom Grad 2 mit Diskriminante ≤ 20

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \Big/ (t^2 - 5)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 5 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 0.481211825 \\ \zeta_K(-1) &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	$x^4 + 3x^2 + 1$	1	0.962423650	4	1	1
2	$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$	1	0.962423650	10	1	1
3	$x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$	1	0.962423650	6	1	1

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 0 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 80,$
- $N(D_2) \leq 150.$

D_1	D_2	H
1	1	1
1	$\mathfrak{p}_2$	1
1	$\mathfrak{p}_3$	1
1	$\mathfrak{p}_5$	1
1	$\mathfrak{p}_7$	2
1	$\mathfrak{p}_{11}$	1
1	$\mathfrak{p}_{19}$	1
1	$\mathfrak{p}_{29}$	1
1	$\mathfrak{p}_{31}$	2
1	$\mathfrak{p}_{41}$	2
1	$\mathfrak{p}_{59}$	1
1	$\mathfrak{p}_{61}$	3
1	$\mathfrak{p}_{71}$	2
1	$\mathfrak{p}_{79}$	2
1	$\mathfrak{p}_{89}$	2
1	$\mathfrak{p}_{101}$	3
1	$\mathfrak{p}_{109}$	3
1	$\mathfrak{p}_{131}$	3
1	$\mathfrak{p}_{139}$	3
1	$\mathfrak{p}_{149}$	3
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	2
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	1
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	1
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	3
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{29}$	3
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{31}$	4
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	2
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	2
1	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	2
1	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{19}$	2
1	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	4
1	$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{q}_{11}$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{11}$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{19}$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{29}$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{31}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{41}$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{59}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{61}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{71}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{79}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{89}$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{101}$	44
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{109}$	44
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{131}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{139}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{149}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{19}$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{q}_{11}$	64
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	1	1
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3$	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_7$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{11}$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{19}$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{29}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{31}$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{41}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{59}$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{61}$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{71}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{79}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{89}$	18
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{101}$	22
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{109}$	22
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{131}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{139}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{149}$	30
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{q}_{11}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	1	1
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_5$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_7$	26
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{q}_{11}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{19}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{29}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{31}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{41}$	22
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{59}$	30
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{61}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{71}$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{79}$	40
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{89}$	46
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{101}$	52
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{109}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{131}$	66
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{139}$	70
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{149}$	76
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{11}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{q}_{11}$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{19}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	92
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	1	3
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_5$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_7$	46
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{11}$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_{19}$	18
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{29}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{31}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{41}$	42
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{59}$	54
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{61}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{71}$	68
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{79}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{89}$	82
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{101}$	96
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{109}$	100
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{131}$	122
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{139}$	126
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{149}$	136
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	108
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	68
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{q}_{19}$	108
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	164
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{q}_{11}$	136
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	1	2
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_2$	4
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_7$	28
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{11}$	8
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{19}$	12
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{29}$	16
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{31}$	20
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{41}$	24
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{59}$	32
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{61}$	36
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{71}$	40
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{79}$	44
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{89}$	48
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{101}$	56
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{109}$	60
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{131}$	72
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{139}$	76
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{149}$	80
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	32
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	56
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{29}$	80
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{31}$	88
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{q}_{11}$	80
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	1	2
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2$	6
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3$	8
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_7$	36
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{q}_{11}$	8
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{19}$	16
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{29}$	20
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{31}$	24
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{41}$	28
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{59}$	40
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{61}$	44
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{71}$	48
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{79}$	56
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{89}$	60
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{101}$	68
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{109}$	76
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{131}$	88
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{139}$	96
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{149}$	100
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	36
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_{11}$	40
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	72
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{29}$	100
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{31}$	112
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{11}$	80

Tabelle A.1: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - 5)$

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \big/ (t^2 - 2)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 8 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 0.881373586 \\ \zeta_K(-1) &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	x^4+1	1	1.76274717	8	1	1 $\mathfrak{p}_2$
2	x^4+2x^2+4	1	1.76274717	6	1	1

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 0 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 50,$
- $N(D_2) \leq 150.$

D_1	D_2	H
1	1	...
1	$\mathfrak{p}_2$	...
1	$\mathfrak{p}_3$	...
1	$\mathfrak{p}_5$	...
1	$\mathfrak{p}_7$	1
1	$\mathfrak{p}_{11}$	...
1	$\mathfrak{p}_{17}$	...
1	$\mathfrak{p}_{23}$	1
1	$\mathfrak{p}_{31}$	2
1	$\mathfrak{p}_{41}$	...
1	$\mathfrak{p}_{47}$	2
1	$\mathfrak{p}_{71}$	3
1	$\mathfrak{p}_{73}$	...
1	$\mathfrak{p}_{79}$	4
1	$\mathfrak{p}_{89}$	...
1	$\mathfrak{p}_{97}$	...
1	$\mathfrak{p}_{103}$	5
1	$\mathfrak{p}_{113}$	...
1	$\mathfrak{p}_{127}$	6
1	$\mathfrak{p}_{137}$	...
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	...
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	...
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	1
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	...
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	3
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{31}$	4
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{41}$	...
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{47}$	6
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{71}$	9
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{73}$	...
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	10
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	8
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	4
1	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	4
1	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{17}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	1	1
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{11}$	42
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{17}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{23}$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{31}$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{41}$	14

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{47}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{71}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{73}$	26
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{79}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{89}$	30
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{97}$	34
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{103}$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{113}$	38
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{127}$	44
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{137}$	46
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{17}$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	1	1
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_7$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{11}$	122
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{17}$	18
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{23}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{31}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{41}$	42
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{47}$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{71}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{73}$	74
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{79}$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{89}$	90
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{97}$	98
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{103}$	104
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{113}$	114
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{127}$	128
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{137}$	138
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	64
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{17}$	144
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	1	1
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_3$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_5$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{q}_7$	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{11}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{17}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{23}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{31}$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{41}$	12

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{47}$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{71}$	18
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{73}$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{79}$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{89}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{97}$	26
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{103}$	26
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{113}$	30
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{127}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{137}$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_7$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{q}_7\mathfrak{p}_{17}$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_5$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_7$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{11}$	84
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_{17}$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{23}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{31}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{41}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{47}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{71}$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{73}$	52
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{79}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{89}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{97}$	68
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{103}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{113}$	76
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{127}$	88
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{137}$	92
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_{17}$	96
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	1	3
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_3$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_5$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_7$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{11}$	116
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{17}$	18
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{q}_{23}$	22
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{31}$	32

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{41}$	40
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{47}$	44
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{71}$	66
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{73}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{79}$	76
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{89}$	84
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{97}$	94
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{103}$	98
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{113}$	106
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{127}$	120
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{137}$	128
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	76
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	64
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{17}$	132
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	1	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_3$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_5$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{11}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{17}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{23}$	36
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{31}$	48
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{41}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{47}$	72
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{71}$	108
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{73}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{79}$	120
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{89}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{97}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{103}$	156
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{113}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{127}$	192
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_{137}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	108
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{31}$	144
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{41}$	...
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{47}$	216
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{71}$	324
$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{73}$	...

Tabelle A.2: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - 2)$

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \big/ (t^2 - 3)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 12 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 1.31695789 \\ \zeta_K(-1) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	$x^4 - x^2 + 1$	1	1.31695789	12	2	1 $\mathfrak{p}_2$ $\mathfrak{p}_2^2$ $\mathfrak{p}_3$
2	$x^4 + 4x^2 + 1$	2	1.31695789	2	2	1

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 0 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 50,$
- $N(D_2) \leq 120.$

D_1	D_2	H
1	1	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_2$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_3$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_5$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_7$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_{11}$	2
1	$\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_{23}$	2
1	$\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_{47}$	4
1	$\mathfrak{p}_{59}$	6
1	$\mathfrak{p}_{61}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_{71}$	6
1	$\mathfrak{p}_{73}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_{83}$	8
1	$\mathfrak{p}_{97}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_{107}$	10
1	$\mathfrak{p}_{109}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	2
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	4
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	6
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{47}$	12
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{59}$	16
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	6
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{23}$	8
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	14
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{11}$	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{13}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{23}$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{37}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{47}$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{59}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{61}$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{71}$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{73}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{83}$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{97}$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{107}$	18
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{109}$	22
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	1	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_5$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_7$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{q}_{11}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{23}$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{47}$	40
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{59}$	50
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{61}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{71}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{73}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{83}$	70
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{97}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{107}$	90
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{109}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{11}$	40
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{23}$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_5$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_7$	52
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{11}$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_{13}$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{23}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{37}$	38
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{47}$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{59}$	62
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{61}$	62
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{71}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{73}$	76
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{83}$	86
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{97}$	100
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{107}$	110
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{109}$	110
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	108
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	52
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{13}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{23}$	96
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	152
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	1	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_5$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_7$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{q}_{11}$	20
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{23}$	40
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{47}$	80
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{59}$	100
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{61}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{71}$	120
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{73}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{83}$	140
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{97}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{107}$	180
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{109}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_{11}$	60
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	120
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{47}$	240
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{59}$	300
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	1	2
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2$	6
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_5$	52
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_7$	100
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{11}$	24
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_{13}$	28
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{23}$	48
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{37}$	76
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{47}$	96
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{59}$	120
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{61}$	124
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{71}$	144
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{73}$	148
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{83}$	168
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{97}$	196
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{107}$	216
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{109}$	220
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	156
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	300
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	72
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_{13}$	84
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	144
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{37}$	228
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{47}$	288
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{59}$	360
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	1	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_3$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_5$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_7$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{11}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{q}_{23}$	44
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{47}$	88
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{59}$	112
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{61}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{71}$	132
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{73}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{83}$	156
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{97}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{107}$	200
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_{109}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	92
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{23}$	176
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	$\dots$
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_7$	100
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{11}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{13}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{23}$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{37}$	76
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{47}$	96
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{59}$	120
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{61}$	124
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{71}$	144
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{73}$	148
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{83}$	168
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{97}$	196
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{107}$	216
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{109}$	220
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{11}$	96
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	112
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{23}$	192
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	304

Tabelle A.3: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - 3)$

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \Big/ (t^2 - 13)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 13 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 1.19476321 \\ \zeta_K(-1) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	$x^4 + 7x^2 + 9$	1	2.38952643	4	1	1
2	$x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 9$	2	2.38952643	6	1	1

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 0 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 60,$
- $N(D_2) \leq 150.$

D_1	D_2	H
1	1	1
1	$\mathfrak{p}_2$	2
1	$\mathfrak{p}_3$	1
1	$\mathfrak{p}_5$	4
1	$\mathfrak{p}_7$	6
1	$\mathfrak{p}_{11}$	12
1	$\mathfrak{p}_{13}$	3
1	$\mathfrak{p}_{17}$	2
1	$\mathfrak{p}_{23}$	2
1	$\mathfrak{p}_{29}$	3
1	$\mathfrak{p}_{43}$	5
1	$\mathfrak{p}_{53}$	5
1	$\mathfrak{p}_{61}$	7
1	$\mathfrak{p}_{79}$	8
1	$\mathfrak{p}_{101}$	9
1	$\mathfrak{p}_{103}$	10
1	$\mathfrak{p}_{107}$	9
1	$\mathfrak{p}_{113}$	10
1	$\mathfrak{p}_{127}$	12
1	$\mathfrak{p}_{131}$	11
1	$\mathfrak{p}_{139}$	13
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	3
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	14
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	9
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	8
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	10
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{29}$	13
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	2
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	10
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	18
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	6
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	6
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{23}$	8
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{29}$	10
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{43}$	16
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	8
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{13}$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	1	1
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_3$	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7$	26
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{11}$	62
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{13}$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{17}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{23}$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{29}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{43}$	22
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{53}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{61}$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{79}$	40
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{101}$	52
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{103}$	52
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{107}$	54
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{113}$	58
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{127}$	64
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{131}$	66
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{139}$	70
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_5$	52
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_7$	100
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{13}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{17}$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{23}$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{29}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{43}$	88
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	1	3
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_5$	78
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_7$	150
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{11}$	366
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{17}$	54
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{23}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{29}$	90
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{43}$	132
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{53}$	162
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{61}$	186
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{79}$	240
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{101}$	306
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{103}$	312
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{107}$	324
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{113}$	342
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{127}$	384
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{131}$	396
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{139}$	420
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	48
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	312
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	600
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	216
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{23}$	288
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{29}$	360
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{43}$	528
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	1	2
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_2$	4
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_5$	12
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_7$	20
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{11}$	44
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{13}$	8
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{17}$	8
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{23}$	8
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{29}$	12
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{43}$	16
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{53}$	20
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{61}$	24
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{79}$	28
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{101}$	36
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{103}$	36
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{107}$	36
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{113}$	40
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{127}$	44
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{131}$	44
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_{139}$	48
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	48
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	28
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	32
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	40
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{29}$	52
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	1	2
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2$	10
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_3$	8
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_5$	52
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_7$	100
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{11}$	244
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{17}$	36
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{23}$	48
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{29}$	60
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{43}$	88
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{53}$	108
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{61}$	124
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{79}$	160
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{101}$	204
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{103}$	208
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{107}$	216
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{113}$	228
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{127}$	256
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{131}$	264
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{139}$	280
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_3$	40
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	260
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	180
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	240
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{29}$	300
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_5$	208
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_7$	400
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{17}$	144
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{23}$	192
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{29}$	240
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{43}$	352
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	1	4
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2$	16
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_3$	12
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_5$	72
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_7$	136
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{11}$	328
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{13}$	40
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_{17}$	48
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{23}$	64
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{29}$	80
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{43}$	120
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{53}$	144
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{61}$	168
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{79}$	216
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{101}$	272
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{103}$	280
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{107}$	288
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{113}$	304
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{127}$	344
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{131}$	352
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{139}$	376
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_3$	56
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	352
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	192
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_{17}$	240
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{23}$	320
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{29}$	400
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_5$	280
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_7$	536
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{13}$	152
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{q}_{17}$	192
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{23}$	256
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{29}$	320
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_3\mathfrak{p}_{43}$	472

Tabelle A.4: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - 13)$

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \big/ (t^2 - 17)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 17 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 2.09471254 \\ \zeta_K(-1) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	$x^4 + 9x^2 + 16$	2	4.18942509	4	1	1
2	$x^4 - x^3 + 5x^2 + 4x + 16$	1	4.18942509	6	1	1

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 0 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 50,$
- $N(D_2) \leq 120.$

D_1	D_2	H
1	1	1
1	$\mathfrak{p}_2$	1
1	$\mathfrak{p}_3$	3
1	$\mathfrak{p}_5$	6
1	$\mathfrak{p}_7$	10
1	$\mathfrak{p}_{13}$	4
1	$\mathfrak{p}_{17}$	4
1	$\mathfrak{p}_{19}$	4
1	$\mathfrak{p}_{43}$	8
1	$\mathfrak{p}_{47}$	8
1	$\mathfrak{p}_{53}$	10
1	$\mathfrak{p}_{59}$	10
1	$\mathfrak{p}_{67}$	12
1	$\mathfrak{p}_{83}$	14
1	$\mathfrak{p}_{89}$	16
1	$\mathfrak{p}_{101}$	18
1	$\mathfrak{p}_{103}$	18
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	2
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	6
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	14
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	26
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	8
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	10
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	10
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{43}$	22
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{47}$	24
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{53}$	28
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{59}$	30
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	26
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_3$	16
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_5$	40
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{13}$	22
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{17}$	28
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{19}$	30
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_3$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_5$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_7$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{13}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{17}$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{19}$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{43}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{47}$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{53}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{59}$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{67}$	14

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{83}$	14
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{89}$	16
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{101}$	18
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_{103}$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7$	68
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{13}$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{17}$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{19}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{43}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{47}$	64
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{53}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{59}$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{67}$	92
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{83}$	112
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{89}$	120
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{101}$	136
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{103}$	140
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_5$	104
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_7$	200
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{13}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{17}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{19}$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{43}$	176
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{47}$	192
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{53}$	216
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{59}$	240
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	1	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2$	12
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3$	40
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_7$	200
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{13}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{17}$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{19}$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{43}$	176
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{47}$	192
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{53}$	216
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{59}$	240
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{67}$	272
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{83}$	336
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{89}$	360
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{101}$	408
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{103}$	416

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_3$	120
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_7$	600
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{13}$	168
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{17}$	216
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{19}$	240
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{43}$	528
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{47}$	576
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{53}$	648
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{59}$	720
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	560
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2$	6
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_5$	52
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_7$	100
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_{13}$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{17}$	36
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{19}$	40
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{43}$	88
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{47}$	96
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{53}$	108
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{59}$	120
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{67}$	136
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{83}$	168
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{89}$	180
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{101}$	204
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{103}$	208
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_3$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_5$	156
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_7$	300
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_{13}$	84
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{17}$	108
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{19}$	120
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{43}$	264
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{47}$	288
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{53}$	324
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{59}$	360
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{13}$	280
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	1	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2$	8
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3$	28
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_5$	72
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_7$	136
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{13}$	40
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{19}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{43}$	120

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{47}$	128
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{53}$	144
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{59}$	160
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{67}$	184
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{83}$	224
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{89}$	240
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{101}$	272
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{103}$	280
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_3$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_5$	208
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_7$	400
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{13}$	112
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{19}$	160
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{43}$	352
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{47}$	384
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{53}$	432
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{59}$	480
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	376
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	1	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2$	10
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3$	32
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_5$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_7$	152
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{13}$	44
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{17}$	56
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_{19}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{43}$	132
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{47}$	144
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{53}$	164
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{59}$	180
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{67}$	204
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{83}$	252
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{89}$	272
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{101}$	308
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{103}$	312
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_3$	92
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_5$	236
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_7$	452
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{13}$	128
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{17}$	164
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_{19}$	180
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{43}$	396
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{47}$	432
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{53}$	488
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}_{59}$	540
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{13}$	424

Tabelle A.5: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^2 - 17)$

A.4 Zahlkörper vom Grad 3 mit Diskriminante ≤ 100

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \Big/ (t^3 - t^2 - 2t + 1)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 49 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 0.525454682 \\ \zeta_K(-1) &= -\frac{1}{21} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$	1	2.10181872	4	1	1
2	$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$	1	2.10181872	14	1	1
3	$x^6 - x^5 + 3x^4 + 5x^2 - 2x + 1$	1	2.10181872	6	1	1

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 1 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 80,$
- $N(D_2) \leq 200.$

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2$	1	1
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_3$	3
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_5$	11
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_7$	2
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{13}$	3
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{29}$	3
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{41}$	4
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{43}$	5
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{71}$	6
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{83}$	7
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{97}$	10
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{113}$	10
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{127}$	12
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{139}$	13
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{167}$	14
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{181}$	17
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{197}$	17
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	20
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{13}$	12
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{13}\mathfrak{q}_{13}$	20
$\mathfrak{p}_3$	1	2
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_2$	5
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5$	40
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7$	4
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{13}$	6
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{29}$	12
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{41}$	14
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{43}$	16
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{71}$	24
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{83}$	26
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{97}$	32
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{113}$	38
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{127}$	42
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{139}$	44
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{167}$	52
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{181}$	58
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{197}$	64
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	24
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	40
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{13}$	36
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{13}\mathfrak{q}_{13}$	64
$\mathfrak{p}_7$	1	1
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_2$	2
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_3$	2
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_5$	10
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{13}$	2
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{29}$	4
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{41}$	4
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{43}$	4
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{71}$	6
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{83}$	6
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{97}$	8
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{113}$	10
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{127}$	10
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{139}$	10
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{167}$	12
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{181}$	14
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{197}$	16
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	10
$\mathfrak{p}_7$	$\mathfrak{p}_{13}\mathfrak{q}_{13}$	16
$\mathfrak{p}_{13}$	1	1
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2$	3
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3$	4
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_5$	18
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_7$	2
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_{13}$	2
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{29}$	6
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{41}$	6
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{43}$	8
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{71}$	12
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{83}$	12
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{97}$	14
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{113}$	18
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{127}$	20
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{139}$	20
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{167}$	24
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{181}$	26
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_{197}$	30
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	12
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_{13}$	18
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	32
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_{13}$	16
$\mathfrak{p}_{13}$	$\mathfrak{q}_{13}\mathfrak{r}_{13}$	28
$\mathfrak{p}_{29}$	1	1
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_2$	3
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_3$	10
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_5$	42
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_7$	4
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{13}$	6
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{q}_{29}$	10
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{41}$	14
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{43}$	16
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{71}$	24
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{83}$	28
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{97}$	34
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{113}$	38
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{127}$	44
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{139}$	48
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{167}$	56
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{181}$	62
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{197}$	66
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	24
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	42
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	76
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{13}$	40
$\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{13}\mathfrak{q}_{13}$	68
$\mathfrak{p}_{41}$	1	2
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_2$	6
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_3$	14
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_5$	60
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_7$	6
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{13}$	8
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{29}$	16
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{q}_{41}$	20
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{43}$	24
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{71}$	36
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{83}$	40
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{97}$	48
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{113}$	56
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{127}$	64
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{139}$	68
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{167}$	80
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{181}$	88
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{197}$	96
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	36
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	60
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	108
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{13}$	56
$\mathfrak{p}_{41}$	$\mathfrak{p}_{13}\mathfrak{q}_{13}$	96
$\mathfrak{p}_{43}$	1	1
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_2$	5
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_3$	14
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_5$	64
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_7$	4
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{13}$	8
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{29}$	16
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{41}$	22
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{q}_{43}$	22
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{71}$	36
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{83}$	42
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{97}$	50
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{113}$	58
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{127}$	64
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{139}$	70
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{167}$	84
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{181}$	92
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{197}$	100
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	36
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	64
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	112
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{13}$	56
$\mathfrak{p}_{43}$	$\mathfrak{p}_{13}\mathfrak{q}_{13}$	100
$\mathfrak{p}_{71}$	1	2
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_2$	8
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_3$	24
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_5$	106
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_7$	8
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{13}$	14
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{29}$	26
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{41}$	36
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{43}$	38
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{q}_{71}$	60
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{83}$	70
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{97}$	84
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{113}$	96
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{127}$	108
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{139}$	118
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{167}$	140
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{181}$	154
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{197}$	166
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_7$	60
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{13}$	106
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_7$	188
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_7\mathfrak{p}_{13}$	96
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{13}\mathfrak{q}_{13}$	168

Tabelle A.6: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^3 - t^2 - 2t + 1)$

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \Big/ (t^3 - 3t - 1)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 81 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 0.849287450 \\ \zeta_K(-1) &= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1$	1	3.39714980	4	1	1
2	$x^6 - x^3 + 1$	1	3.39714980	18	1	1 $\mathfrak{p}_3$

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 1 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 80,$
- $N(D_2) \leq 180.$

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2$	1	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_3$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_5$	25
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{17}$	4
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{19}$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{37}$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{53}$	11
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{71}$	14
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{73}$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{89}$	18
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{107}$	21
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{109}$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{127}$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{163}$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{179}$	35
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	14
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{19}$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	...
$\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{53}$	42
$\mathfrak{p}_3$	1	1
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_2$	1
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5$	8
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{17}$	2
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{19}$	2
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{37}$	4
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{53}$	4
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{71}$	4
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{73}$	6
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{89}$	6
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{107}$	6
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{109}$	8
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{127}$	8
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{163}$	10
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{179}$	10
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	10
$\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	10
$\mathfrak{p}_{17}$	1	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2$	4
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_5$	56
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{q}_{17}$	8
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{19}$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{37}$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{53}$	24
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{71}$	32
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{73}$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{89}$	40
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{107}$	48
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{109}$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{127}$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{163}$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_{179}$	80
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	16
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_{17}$	72
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	80
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{17}$	32
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{19}$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	...
$\mathfrak{p}_{17}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{53}$	96
$\mathfrak{p}_{19}$	1	1
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_2$	5
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3$	2
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_5$	64
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{17}$	10
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_{19}$	10
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{37}$	20
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{53}$	28
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{71}$	36
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{73}$	38
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{89}$	46
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{107}$	54
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{109}$	56
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{127}$	64
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{163}$	82
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{179}$	90
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	18
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	82
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_{19}$	90
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	36
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{19}$	40
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	76
$\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{53}$	108
$\mathfrak{p}_{37}$	1	1
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_2$	9
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_3$	4
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_5$	126
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{17}$	18
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{19}$	20
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{q}_{37}$	38
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{53}$	54
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{71}$	72
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{73}$	74
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{89}$	90
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{107}$	108
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{109}$	110
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{127}$	128
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{163}$	164
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_{179}$	180
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	36
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	162
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	180
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	72
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{19}$	80
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{37}$	152
$\mathfrak{p}_{37}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{53}$	216
$\mathfrak{p}_{53}$	1	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_2$	13
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_3$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_5$	182
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{17}$	26
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{19}$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{37}$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{q}_{53}$	78
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{71}$	104
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{73}$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{89}$	130
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{107}$	156
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{109}$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{127}$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{163}$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_{179}$	260
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	52
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	234
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	260
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	104
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{19}$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	...
$\mathfrak{p}_{53}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_{53}$	312
$\mathfrak{p}_{71}$	1	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_2$	18
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_3$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_5$	246
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{17}$	36
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{19}$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{37}$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{53}$	106
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{q}_{71}$	140
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{73}$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{89}$	176
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{107}$	210
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{109}$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{127}$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{163}$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_{179}$	350
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	70
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	316
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	350
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	140
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{19}$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	...
$\mathfrak{p}_{71}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{53}$	420
$\mathfrak{p}_{73}$	1	2
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_2$	18
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_3$	8
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_5$	252
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{17}$	36
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{19}$	40
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{37}$	76
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{53}$	108
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{71}$	144
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{q}_{73}$	148
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{89}$	180
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{107}$	216
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{109}$	220
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{127}$	256
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{163}$	328
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_{179}$	360
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	72
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{17}$	324
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{19}$	360
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{17}$	144
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{19}$	160
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{37}$	304
$\mathfrak{p}_{73}$	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_{53}$	432

Tabelle A.7: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^3 - 3t - 1)$

A.5 Zahlkörper vom Grad 4 mit Diskriminante ≤ 1500

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \big/ (t^4 - t^3 - 3t^2 + t + 1)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 725 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 0.825068847 \\ \zeta_K(-1) &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	$x^8 + 7x^6 + 13x^4 + 7x^2 + 1$	1	6.60055078	4	1	1
2	$x^8 - 3x^7 + 5x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1$	1	6.60055078	10	1	1
3	$x^8 - x^7 + 4x^6 + x^5 + 9x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 1$	1	6.60055078	6	1	1

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 0 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 250,$
- $N(D_2) \leq 250.$

Die Primzahl 11 zerlegt sich in K in $\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{r}_{11}$ mit

	$e(\cdot \mid 11)$	$f(\cdot \mid 11)$
$\mathfrak{p}_{11}$	1	1
$\mathfrak{q}_{11}$	1	1
$\mathfrak{r}_{11}$	1	2

D_1	D_2	H
1	1	1
1	$\mathfrak{p}_2$	2
1	$\mathfrak{p}_3$	3
1	$\mathfrak{p}_5$	2
1	$\mathfrak{p}_7$	2
1	$\mathfrak{p}_{11}$	1
1	$\mathfrak{r}_{11}$	4
1	$\mathfrak{p}_{13}$	4
1	$\mathfrak{p}_{19}$	1
1	$\mathfrak{p}_{29}$	1
1	$\mathfrak{p}_{31}$	2
1	$\mathfrak{p}_{41}$	2
1	$\mathfrak{p}_{61}$	3
1	$\mathfrak{p}_{79}$	2
1	$\mathfrak{p}_{89}$	2
1	$\mathfrak{p}_{101}$	3
1	$\mathfrak{p}_{109}$	3
1	$\mathfrak{p}_{131}$	3
1	$\mathfrak{p}_{139}$	3
1	$\mathfrak{p}_{149}$	3
1	$\mathfrak{p}_{179}$	3
1	$\mathfrak{p}_{191}$	4
1	$\mathfrak{p}_{211}$	5
1	$\mathfrak{p}_{229}$	5
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	5
1	$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{q}_{11}$	4
1	$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	1	3
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3$	206
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_5$	66
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_7$	126
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{q}_{11}$	30
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{r}_{11}$	306
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{13}$	426

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{19}$	50
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{29}$	76
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{31}$	80
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{41}$	106
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{61}$	156
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{79}$	200
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{89}$	226
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{101}$	256
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{109}$	276
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{131}$	330
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{139}$	350
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{149}$	376
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{179}$	450
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{191}$	480
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{211}$	530
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{229}$	576
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	600
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	1	4
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_2$	32
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_3$	140
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_5$	48
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_7$	88
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{r}_{11}$	208
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{13}$	288
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{19}$	36
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{29}$	52
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{31}$	56
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{41}$	72
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{61}$	108
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{79}$	136
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{89}$	152
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{101}$	172
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{109}$	188

D_1	D_2	H
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{131}$	220
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{139}$	236
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{149}$	252
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{179}$	300
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{191}$	320
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{211}$	356
$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{p}_{11}$	$\mathfrak{p}_{229}$	388
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	1	4
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_2$	52
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_3$	248
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_5$	80
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_7$	152
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_{11}$	36
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{r}_{11}$	368
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{13}$	512
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_{19}$	60
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{29}$	92
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{31}$	96
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{41}$	128
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{61}$	188
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{79}$	240
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{89}$	272
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{101}$	308
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{109}$	332
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{131}$	396
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{139}$	420
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{149}$	452
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{179}$	540
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{191}$	576
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{211}$	636
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_{229}$	692
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_{11}$	612
$\mathfrak{p}_{11}\mathfrak{p}_{19}$	$\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{q}_{19}$	720

Tabelle A.8: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^4 - t^3 - 3t^2 + t + 1)$

Grundkörper: $K = \mathbb{Q}[t] \Big/ (t^4 - t^3 - 4t^2 + 4t + 1)$

Diskrimiante, Klassenzahl, Regulator und Zeta-Funktion von K:

$$\begin{aligned} D_K &= 1125 \\ h_K &= 1 \\ \mathrm{Reg}_K &\approx 1.16545519 \\ \zeta_K(-1) &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Zu betrachtende Körpererweiterungen und Ordnungen:

i	Erweiterung L_i	h_{L_i}	Reg_{L_i}	W_{L_i}	Q_{L_i}	Führer $\mathfrak{f}_{ij}$
1	$x^8 + 9x^6 + 26x^4 + 24x^2 + 1$	2	9.32364155	4	1	1
2	$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$	1	4.66182077	30	2	1 $\mathfrak{p}_5$ $\mathfrak{p}_3$ $\mathfrak{p}_2$

Betrachte sämtliche Invarianten (D_1, D_2) mit

- $\#\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } D_1\} \equiv 0 \bmod 2, \quad N(D_1) \leq 250,$
- $N(D_2) \leq 250.$

D_1	D_2	H
1	1	...
1	$\mathfrak{p}_2$	...
1	$\mathfrak{p}_3$	...
1	$\mathfrak{p}_5$	...
1	$\mathfrak{p}_{11}$	...
1	$\mathfrak{p}_{29}$	2
1	$\mathfrak{p}_{31}$	...
1	$\mathfrak{p}_{59}$	2
1	$\mathfrak{p}_{61}$	...
1	$\mathfrak{p}_{89}$	4
1	$\mathfrak{p}_{149}$	6
1	$\mathfrak{p}_{151}$	...
1	$\mathfrak{p}_{179}$	6
1	$\mathfrak{p}_{181}$	...
1	$\mathfrak{p}_{211}$	...
1	$\mathfrak{p}_{239}$	8
1	$\mathfrak{p}_{241}$	...
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	...
1	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	...
1	$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	4
1	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	8
1	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	...
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	1	4
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5$	24
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{11}$	488
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{29}$	120
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{31}$	128
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{59}$	240
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{61}$	248
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{89}$	360
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{149}$	600
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{151}$	608
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{179}$	720
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{181}$	728
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{211}$	848

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{239}$	960
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{241}$	968
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	720
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	768
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	1	2
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_3$	20
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{11}$	244
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{29}$	60
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{31}$	64
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{59}$	120
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{61}$	124
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{89}$	180
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{149}$	300
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{151}$	304
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{179}$	360
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{181}$	364
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{211}$	424
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{239}$	480
$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{241}$	484
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	1	...
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_2$	...
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{11}$	...
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{29}$	32
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{31}$	...
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{59}$	64
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{61}$	...
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{89}$	96
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{149}$	160
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{151}$	...
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{179}$	192
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{181}$	...
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{211}$	...
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{239}$	256
$\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_5$	$\mathfrak{p}_{241}$	...

D_1	D_2	H
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	1	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_2$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_3$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{11}$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{q}_{29}$	112
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{31}$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{59}$	224
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{61}$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{89}$	336
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{149}$	560
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{151}$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{179}$	672
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{181}$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{211}$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{239}$	896
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_{241}$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{29}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	...
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	1	4
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_2$	68
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_3$	40
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{11}$	488
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{29}$	120
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{q}_{31}$	128
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{59}$	240
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{61}$	248
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{89}$	360
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{149}$	600
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{151}$	608
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{179}$	720
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{181}$	728
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{211}$	848
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{239}$	960
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_{241}$	968
$\mathfrak{p}_5\mathfrak{p}_{31}$	$\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	680

Tabelle A.9: Grundkörper $K = \mathbb{Q}[t]/(t^4 - t^3 - 4t^2 + 4t + 1)$

Literaturverzeichnis

[1] Henri Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Graduate Texts in Mathematics 138, Springer, 1996.

[2] ______, *Advanced topics in computational number theory*, Graduate Texts in Mathematics 193, Springer, 2000.

[3] Max Deuring, *Algebren*, 2. Auflage, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 41, Springer, 1935.

[4] Martin Eichler, *Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren*, J. Reine Angew. Math. **176** (1937), 192–202.

[5] ______, *Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren*, Math. Zeitschriften **43** (1938), 102–109.

[6] ______, *Zur Zahlentheorie der Quaternionenalgebren*, J. Reine Angew. Math. **195** (1955), 127–151.

[7] ______, *The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators*, in: Modular Functions of one variable I, Lecture Notes in Mathematics 320, Springer, 1972.

[8] Ulrich Fincke, Michael Pohst, *Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis*, Math. Comp. **44** (1985), 463–471.

[9] Helmut Hasse, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Akademie Verlag, 1952.

[10] Erich Hecke, *Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen (1940)*, Mathematische Werke, 789–918, Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen, 1959.

[11] Serge Lang, *Algebra*, 3. Auflage, Addison-Wesley, 1993.

[12] Falko Lorenz, *Algebraische Zahlentheorie*, BI Wissenschaftsverlag, 1993.

[13] ______, *Einführung in die Algebra II*, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 1997.

[14] Jürgen Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, 1991.

[15] Morris Newman, *Integral matrices*, Pure and Applied Mathematics 45, Academic Press, 1972.

[16] O. T. O'Meara, *Introduction to quadratic forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 117, Springer, 1963.

[17] The PARI-Group, Bordeaux, *PARI/GP, Version 2.1.1*, 2000, erhältlich unter `http://www.parigp-home.de/`.

[18] Arnold K. Pizer, *Type numbers of Eichler orders*, J. Reine Angew. Math. **264** (1971), 67–102.

[19] ______, *An algorithm for computing modular forms on* $\Gamma_0(N)^*$, J. Algebra **64** (1980), 340–390.

[20] Marie-France Vignéras, *Nombre de classes d'un ordre d'Eichler et valeur au point* -1 *de la fonction zêta d'un corps quadratique réel*, L'Enseignement Math. **21** (1975), 69–105.

[21] ______, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lecture Notes in Mathematics 800, Springer, 1980.

[22] Lawrence C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, 2. Auflage, Graduate Texts in Mathematics 83, Springer, 1997.