UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

(Sommersemester 2003)

Blatt 4 Abgabetermin: Mittwoch, 21.05.2003, vor Beginn der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim gleichzeitigen Werfen von 12 Würfeln jede Augenzahl genau zweimal?

(b) Eine Fußballmannschaft bestehe aus 4 Stürmern, 2 Mittelfeldspielern, 4 Verteidigern und 1 Torwart. Man wähle aus sechs solcher Mannschaften jeweils einen Spieler aus. Wie wahrscheinlich sind folgende Konstellationen:

(i) 2 Stürmer, 1 Mittelfeldspieler, 2 Verteidiger, 1 Torwart;

(ii) 3 Stürmer und 3 Verteidiger?

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Eine Urne enthält eine weiße und zwei schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Für $k = 1, 2, 3$ habe die Zufallsvariable X_k den Wert $X_k = 0$, wenn die k-te gezogene Kugel weiß ist, andernfalls gelte $X_k = 1$. Man bestimme explizit

(a) die gemeinsame Verteilung von X_1, X_2 und X_3;

(b) die Verteilung von $X_1 + X_2 + X_3$;

(c) die gemeinsame Verteilung von X_2 und X_3.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Sei $\Omega = \{0, 1\}$ und $0 \leq p \leq 1$. Es bezeichne $P : 2^\Omega \to [0, 1]$ das W-Maß auf Ω mit $P(\{0\}) = 1 - p$ und $P(\{1\}) = p$. Für $n \geq 1$ ist bekanntlich die n-te Bernoulli-Verteilung (mit „Trefferwahrscheinlichkeit“ p) definiert als $P^{\otimes n} : 2^{(\Omega^n)} \to [0, 1]$. Die Zufallsvariable

$$E : \Omega^n \to \{1, \cdots, n+1\} \quad \text{mit} \quad (a_1, \cdots, a_n) \mapsto k, \quad \text{falls } a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0 \text{ und } a_k = 1$$

sowie $E((0, \cdots, 0)) = n+1$ gibt an, wann zum ersten mal in der durch das Tupel $(a_1, \cdots, n) \in \Omega^n$ dargestellten Reihe von n Versuchen ein „Treffer“ (d.h. „1“) auftritt. (Bleiben Treffer ganz aus, liefert E den Wert $n + 1$ zurück.)

Rechnen Sie unter Rückzug auf die Definitionen der Begriffe „Produktmaß“ und „Verteilung“ nach, dass für die Verteilung $G_n = (P^{\otimes n})_E$ von E auf $\{1, \cdots, n+1\}$ folgendes gilt:

$$G_n(\{k\}) = (1-p)^{k-1}p \qquad (k = 1, \cdots, n) \qquad \text{und} \qquad G_n(\{n+1\}) = (1-p)^n.$$

(G_n heißt die *n-te geometrische Verteilung.*)

(b) Ein Überraschungseier-Sammler ist bereits stolzer Besitzer von 9 der 10 aktuellen Figuren. Wie viele Ü-Eier muss er noch kaufen, um mit 95% Wahrscheinlichkeit die fehlende Figur zu erhalten, wenn derzeit 120 verschiedene Inhalte mit gleichen relativen Häufigkeiten auf alle Ü-Eier im Handel verteilt sind? (**Hinweis:** Verwenden Sie die Verteilung G_n aus Teil (a) mit $n =$ Anzahl aller im Handel erhältlichen Ü-Eier.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Seien $N \geq 1$ und $0 \leq n, K \leq N$ natürliche Zahlen. Es bezeichne $(\Omega_{\text{perm}}, P)$ den mit der Gleichverteilung ausgestatteten W-Raum aller N-Tupel, die sich als Permutation des Tupels $(1, \cdots, N)$ ergeben. Die Zufallsvariable $X_{\text{perm}} : \Omega_{\text{perm}} \to \mathbb{N}_0$ werde wie folgt definiert: Für $\sigma \in \Omega_{\text{perm}}$ soll $X_{\text{perm}}(\sigma)$ die Anzahl derjenigen Zahlen in den ersten n-Komponenten von σ angeben, die zwischen 1 und K liegen (1 und K eingeschlossen).

(i) Der Wertebereich von X_{perm} ist $\Omega = \{k \in \mathbb{N}_0 : \max(0, n - (N - K)) \leq k \leq \min(K, n)\}$.

(ii) Berechnen Sie auf kombinatorischem Wege $P(\{X_{\text{perm}} = k\})$ für $k \in \Omega$.

(iii) Bestätigen Sie das Ergebnis aus Teil (ii), indem Sie $X_{\text{perm}} : \Omega_{\text{perm}} \to \Omega$ über die in der Vorlesung definierte Zufallsvariable $X_{\text{ord}} : \Omega_{\text{ord}} \to \Omega$ (vgl. Skript, Abschnitt 1.7) faktorisieren (d.h. für X_{perm} eine Darstellung der Form $X_{\text{perm}} = X_{\text{ord}} \circ Y$ angeben).

(b) Eine Warenlieferung enthält 170 intakte und 15 defekte Stücke. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass man bei einer 17 Stücke umfassenden Stichprobe 3 oder mehr defekte Stücke „erwischt“.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Es sei $\Omega = \{0,1\}^2$. Für den Parameter $\alpha \in [-1,1]$ sei das W-Maß $P^\alpha : 2^\Omega \to [0,1]$ definiert durch

$$P^\alpha(\{(0,0)\}) = P^\alpha(\{(1,1)\}) = \frac{1}{4}(1+\alpha) \quad \text{und} \quad P^\alpha(\{(0,1)\}) = P^\alpha(\{(1,0)\}) = \frac{1}{4}(1-\alpha).$$

Geben Sie die Randverteilungen von P^α an! Für welche Werte von α ist P^α ein Produktmaß?