UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Gerd Wittstock
Michael Didas

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

(Sommersemester 2003)

Blatt 6 Abgabetermin: Mittwoch, 4.06.2003, vor Beginn der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Jürgen schlägt seinem Freund Zlatko folgendes Spiel vor: „Du wirfst viermal eine faire Münze, und wir notieren, wie oft „Zahl“ fällt. Dann werfe ich ebenfalls viermal. Wenn ich genau so oft wie du „Zahl“ werfe, zahlst du mir drei Euro, wenn nicht, zahle ich dir einen Euro.“

„Hm“, meint Zlatko, der schnell nachgerechnet hat, „mir wäre lieber, wenn jeder von uns bei ansonsten gleichen Bedingungen fünfmal werfen würde!“

Führen Sie schriftlich aus, was Zlatko schnell im Kopf nachgerechnet hat!

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(G_n)$ der n-ten geometrischen Verteilung G_n zum Parameter $p \in (0, 1)$ (siehe Blatt 4, Aufgabe 3) und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} E(G_n)$.

(b) Herr K. füllt jede Woche einen Lottoschein (also alle 12 Kästchen) komplett aus (Samstagslotto „6 aus 49“). Von dieser Gewohnheit lässt er sich nur durch zwei Umstände abbringen:

(i) Er erzielt einen Lottosechser (und setzt sich mit den gewonnenen Millionen zur Ruhe).

(ii) Er erzielt 80 Jahre lang keinen Sechser (weshalb er frustriert aufgibt).

Geben Sie die Verteilung A der Anzahl der von Herrn K. ausgefüllten Lottoscheine an (gehen Sie von 52 Ziehungen im Jahr aus) und berechnen Sie den Erwartungswert $E(A)$. Wie wahrscheinlich ist das Eintreten von (ii)?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $N \geq 1$ eine natürliche Zahl. Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\{1, \cdots, N\}$ bestätige man die Formeln

$$E(X) = \sum_{n=1}^{N} P(\{X \geq n\}) \qquad \text{und} \qquad E(X^2) = \sum_{n=1}^{N} (2n-1)P(\{X \geq n\}).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es wird mit zwei fairen Würfeln gleichzeitig gewürfelt und die Augensumme notiert. Die Zufallsvariable S_n beschreibe die maximale auftretende Augensumme bei n unabhängigen Wiederholungen dieses Experimentes. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} E(S_n) = 12.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Seien (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, \cdots, X_n : \Omega \to (0, \infty)$ unabhängige positive Zufallsvariable, die auf (Ω, P) die gleiche Verteilung erzeugen. Man berechne

$$E(X_1/(X_1 + \cdots + X_n)).$$