2 Konvergenz und Stetigkeit

2.1 Konvergenz von Folgen

Im vorigen Abschnitt haben wir eine Intervallschachtelung konstruiert, mit der wir die Eulersche Zahl e bestimmen. Das war etwas aufwendig, aber für diese Zahl lohnt sich die Mühe. Die Intervallschachtelung hat den Vorteil, daß sie die gesuchte Zahl **nach unten und oben** immer genauer **abschätzt**.

Vielfach hat man zur Bestimmung einer Zahl – z.B. der Lösung einer Gleichung – nur eine Folge von approximativen Wert a_n $(n \in \mathbb{N})$ zur Verfügung.

Die Folge wird am Anfang vielleicht wild schwanken und sich **schließlich** mit **immer kleineren Abweichungen** einem festen Wert c **nähern.**

Man sagt, die Folge $(a_n)_n$ konvergiert gegen den Grenzwert c.

Wir wollen dieses anschauliche Bild präziser definieren.

Definition 2.1.1 *Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ heißt **konvergent** gegen einen **Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$, wenn folgendes gilt:*

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß aus $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, stets

$$|a_n - c| < \varepsilon.$$

*folgt. Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.*

Bemerkung 2.1.2

1. **Konvergiert** eine Folge nicht, so sagt man, sie **divergiert**.
2. Eine Folge, die gegen Null konvergiert, heißt **Nullfolge**.
3. Man sagt, eine Eigenschaft gilt für **fast alle** $n \in \mathbb{N}$, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, daß die Eigenschaft für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, gilt.

Feststellung 2.1.3 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)
Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ hat höchstens einen Grenzwert.

D.h., Wenn c und $\tilde{c}$ Grenzwerte einer Folge $(a_n)_n$ sind, dann ist $c = \tilde{c}$.

Bezeichnung 2.1.4 (Grenzwert)

1. Wenn die Folge $(a_n)_n$ konvergent gegen den (eindeutigen) Grenzwert c ist, so bezeichnen wir den Grenzwert mit:

   $$\lim_{n\to\infty} a_n := c.$$

   Das obige Symbol besagt, daß die Folge $(a_n)_n$ konvergiert.

2. Eine andere praktische Kurzschreibweise ist:

$$a_n \to c \quad \Leftrightarrow \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

3. Bindung: $\cdots = \mathit{Formel}_n \to c$ aber $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathit{Formel}_n)$.

Die beiden folgenden Konvergenzkriterien sind oftmals handlicher als die Definition 2.1.1. Der freiwählbare konstante Faktor C und „$\leqslant$“ statt des „$<$“ erleichtern das Abschätzen.

Feststellung 2.1.5 *Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen $c \in \mathbb{R}$, wenn es ein $C > 0$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:*

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß aus $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ stets

$$|a_n - c| \leqslant C \cdot \varepsilon$$

folgt.

Die folgende Formulierung kommt ohne ganz „*Epsilontik*“ aus:

Feststellung 2.1.6 *Für eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$a_n \to c \quad \Longleftrightarrow \quad a_n - c \to 0.$$

2.1.1 Archimedisches Axiom

Bemerkung. Wir können leicht Beispiele von divergenten Folgen finden: $(a_n)_n := 1, -1, 1, -1, \ldots$ ist sicher divergent.

Konstante Folgen sind konvergent.

Wenn man interessante Beispiele sucht, stößt man auf ein Problem, daß wir am Beispiel der Folge $(\frac{1}{n})_n$ aufzeigen wollen.

1. Wenn ε eine rationale Zahle $\varepsilon = \frac{p}{q}$, $(p, q \in \mathbb{N})$, ist, so setze man $n_0 := q$ und erhält:

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| = \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{n_0} \leq \tfrac{p}{q} = \varepsilon.$$

2. Um die Konvergenz der Folge $(\frac{1}{n})_n$ zu zeigen, muß man die Grenzwertdefinition 2.1.1 aber wir für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nachweisen.

   Man vergleiche dazu aber die Folgerung 2.1.10 aus dem Archimedischen Axiom **(A)**.

Anmerkung: Die Definition des Grenzwertes 2.1.1 ist nicht nur für $\mathbb{R}$, sondern für jeden geordneten Körper (vgl. Def. 1.3.15Komposition von AbbildungenSATZ.1.3.15) anwendbar. Die Folge $(a_n)_n$ und der Grenzwert c liegen dann in diesem geordnetem Körper.

Man beachte, daß man in diesem Fall auch die Vergleichswerte $\varepsilon > 0$ aus diesem Körper wählen muß.

Das folgende Lemma gilt für jeden geordneten Körper.

Lemma 2.1.7 *Wenn die Folge $(\frac{1}{n})_n$ konvergiert, dann ist der Grenzwert Null.*

Beweisidee: Wenn $\frac{1}{n} \to c$ dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = c \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{c}{2}.$$

Also ist $c = \frac{c}{2}$ und somit $c = 0$.

Wir haben die eben benutzten Rechenregeln für Grenzwerte noch nicht bewiesen und zeigen diese Schlußweise direkt mit der Grenzwertdefinition.

Beweis. Es sei $\lim_{n\to\infty} = c$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|c - \tfrac{1}{n}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n > n_0.$$

Hieraus folgt einerseits, da $2n > n$,

$$|c - \tfrac{1}{2n}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n > n_0$$

und andererseits

$$|\tfrac{c}{2} - \tfrac{1}{2n}| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n > n_0.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt nun:

$$\begin{aligned} |\tfrac{c}{2}| &= |c - \tfrac{c}{2}| = |(c - \tfrac{1}{2n}) + (\tfrac{1}{2n} - \tfrac{c}{2})| \\ &\leq |c - \tfrac{1}{2n}| + |\tfrac{1}{2n} - \tfrac{c}{2}| < \varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$. Also gilt

$$|c| < 3\varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

und somit $c = 0$.

Anmerkung:

1. Um die Konvergenz der Folge $(\frac{1}{n})_n$ zu zeigen, muß man die Grenzwertdefinition 2.1.1 wir für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nachweisen. Dies gelingt aber mit Hilfe der bisherigen Axiomen (**K**) und (**O**) nicht.

   (**K**) und (**O**) besagen nur, daß $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper ist. Das reicht nicht aus!

2. Um zu zeigen, daß die Konvergenz der Folge $(\frac{1}{n})_n$ nicht aus den Axiomen (**K**) und (**O**) folgt, muß man einen sogenannten **nicht-archimedisch** geordneten Körper vorzeigen - dies liegt aber außerhalb der Reichweite der Vorlesung Analysis I. In einem nicht-archimedischen Körper ist die Folge $(\frac{1}{n})_n$ divergent.

Satz 2.1.8 *Die Folge* $(\frac{1}{n})_n$ *ist genau dann konvergent, wenn* $\mathbb{N}$ *unbeschränkt ist.*

In diesem Fall ist nach Lemma 2.1.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beweis.

$\boxed{\Rightarrow}$ Es sei $\lim_{n\to\infty} = 0$.

Ist nun $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ so setze man $\varepsilon := \frac{1}{a}$. Nach der Definition des Grenzwertes gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0.$$

Also ist

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon} = a.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_0.$$

Dann ist

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n > n_0.$$

Wir lösen das Problem durch ein weiteres Axiom, das *Axiom des Archimedes:*

Definition 2.1.9 (Archimedisches Axiom)

(A) *In den reellen Zahlen ist die Teilmenge* $\mathbb{N}$ *unbeschränkt.*

Archimedes von Syrakus (312-287 v. Chr.)

2.1.2 Grenzwertregeln

Feststellung 2.1.10 *Im Körper $\mathbb{R}$ reicht es, in der Grenzwertdefinition 2.1.1 als Vergleichwerte $\varepsilon > 0$ nur rationale Zahlen zu wählen.*

Inbesondere reicht es, die Grenzwertbedingung 2.1.1 nur für die Werte $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$, ($k \in \mathbb{N}$), nachzuprüfen.

Die letzte Festellung ermöglicht induktive Beweise!

Feststellung 2.1.11 (Rechenregeln für Nullfolgen)
Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $a_n \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n| \to 0.$
2. $|a_n| \leqslant |b_n|$ $(n \in \mathbb{N})$ *und* $b_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0.$
3. $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda a_n \to 0.$
4. $a_n \to 0$ *und* $(b_n)_n$ *beschränkt* $\quad \Rightarrow \quad a_n b_n \to 0.$
5. $a_n \to 0$ *und* $b_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \max\{|a_n|, |b_n|\} \to 0.$
6. $a_n \to 0$ *und* $b_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n \to 0.$

Bemerkung: In 2. reicht es, daß $|a_n| \leqslant |b_n|$ für **fast alle** $n \in \mathbb{N}$ gilt (vgl. 2.1.2(3))

Feststellung 2.1.12 *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beispiele 2.1.13

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,\ k \in \mathbb{N}.$

b) Betrachte die Folge (q^n) für $q \in \mathbb{R}$.
Für $q = 1$ gilt: $q^n \to 1$.
Für $q = -1$ ist (q^n) divergent.
Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt und somit divergent.
Für $|q| < 1$ gilt: $q^n \to 0$.

c) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $q \in (-1, 1)$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0.$

d) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Beweis (c).

$$|q| = \frac{1}{1+c} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{|q|} - 1 > 0.$$

$$(1+c)^n \geqslant \binom{n}{k+1} c^{k+1} = \frac{c^{k+1}}{(k+1)!} \prod_{l=0}^{k} (n-l)$$

Für $n \geqslant 2k$ ist jeder Faktor $n - l \geqslant \frac{n}{2}$ und somit:

$$|q|^n = \frac{1}{(1+c)^n} \leqslant \frac{(k+1)!}{c^{k+1}} \Big(\frac{2}{n}\Big)^{k+1}.$$

Für $n \geqslant 2k$ folgt:

$$n^k |q|^n \leqslant \frac{2^k (k+1)!}{c^{k+1}} \frac{1}{n} \to 0.$$

Feststellung 2.1.14 (Einsperregel) *Es seien* $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ *Folgen in* $\mathbb{R}$. *Für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *gelte*

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n.$$

Ist dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

so ist auch

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Beweis (Einsperregel). Da $|a_n - a| \to 0$ und $|b_n - a| \to 0$, gilt $\max\{|a_n - a|, |b_n - a|\} \to 0$. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n - a \leqslant c_n - a \leq b_n - a$$

und folglich ist für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n - a| \leqslant \max\{|a_n - a|, |b_n - a|\}.$$

Also gilt nach 2.1.11 $\quad |c_n - a| \to 0$.

Satz 2.1.15 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Es seien (a_n), (b_n) *Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Dann ist*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b,$ *speziell* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b) = a + b.$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$ *speziell* $\lim_{n\to\infty}(ab_n) = ab.$
3. *Wenn* $b \neq 0$ *ist, dann gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so daß* $b_n \neq 0$ *für* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$. *Für die Folge* $(\frac{a_n}{b_n})_{n=n_0}^{\infty}$ *gilt*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$
4. $\lim_{n\to\infty}\max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}.$
5. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|.$

Anmerkung: Für keine der Aussagen gilt die Umkehrung.

Beweis (Rechenregeln für Grenzwerte). Wir führen mit Hilfe von 2.1.6 die Behauptungen auf die Regeln 2.1.11 für Nullfolgen zurück:

1. $(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b).$
2. $a_nb_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + (a_n - a)b.$
3. Zu $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|b - b_n| \leqslant \varepsilon$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, gilt. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ erhalten wir:
$$|b| - |b_n| \leqslant |b - b_n| \leqslant \frac{|b|}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|b|}{2} \leqslant |b_n|$$
und
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{1}{|b_nb|}|a_nb - ab_n| \leqslant \frac{2}{|b|^2}|(a_n - a)b + a(b - b_n)|.$$

---

4. $|\max\{a_n, b_n\} - \max\{a, b\}| \leqslant \max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}.$
5. $||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|.$

Bemerkung 2.1.16 Für $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\} \leqslant \max\{a_1, b_1\} + \max\{a_2, b_2\}.$
2. $\max\{a_0, b_0\} - \max\{a_1, b_1\} \leqslant \max\{a_0 - a_1, b_0 - b_1\}.$
3. $\big|\max\{a_0, b_0\} - \max\{a_1, b_1\}\big| \leqslant \max\{|a_0 - a_1|, |b_0 - b_1|\}.$

Beweis.

1. Offensichtlich.

2. Setzt man in 1.) $a_2 := a_0 - a_1$ und $b_2 := b_0 - b_1$ so folgt 2.).
3. Aus 2.) folgt

$$\max\{a_0, b_0\} - \max\{a_1, b_1\} \leqslant \max\{|a_0 - a_1|, |b_0 - b_1|\}).$$

   und aus Symmetriegründen somit 3.).

Beispiele 2.1.17

a) $\frac{2-n+3n^2}{4+7n^2} \to \frac{3}{7}$.

b) $\frac{n^5 2^n - 4n^9 + 8}{2n - 3^n} \to 0$.

c) $\frac{7^n + 2^n n!}{n^{n+1} + n^3} \to 0$.

d) Für $|q| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Feststellung 2.1.18 (Grenzwerte von Ungleichungen) *Es seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Es gebe ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geqslant k_0$ gilt*

$$a_k \leqslant b_k.$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Anmerkung: Aus $a_k < b_k$ folgt auch nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Feststellung 2.1.19 *Sei $(a_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_k \geqslant 0$ $(k\in\mathbb{N})$ und $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $(n\in\mathbb{N})$ die Folge ihrer Partialsummen. Dann gilt:*

$$(s_n)_n \quad \textit{beschränkt} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Anmerkung

1. Das Beispiel 1.4.11FolgenSATZ.1.4.11 der harmonischen Reihe zeigt, daß die Umkehrung nicht gilt.
2. Der Beweis wird durch Kontraposition geführt: Wenn $(a_n)_n$ keine Nullfolge ist, dann ist die Folge $(s_n)_n$ unbeschänkt.

Zur Vorbereitung des Beweises überlegen wir uns, was heißt es, daß eine Folge $(a_n)_n$ **keine Nullfolge** ist:

Bemerkung 2.1.20 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Folge $(a_n)_n$ ist keine Nullfolge.
2. Es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine natürliche Zahl $N \geqslant n$ mit $|a_N| > \varepsilon_0$.
3. Es gibt eine $\varepsilon_0 > 0$ und eine streng monoton wachsende Folge $(N_n)_n$ in $\mathbb{N}$, so daß
$$|a_{N_n}| > \varepsilon_0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis (von Feststellung 2.1.19).
Annahme, die Folge $(a_n)_n$ konvergiert nicht gegen 0. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine streng monoton wachsende Folge $(N_n)_n$ in $\mathbb{N}$, so daß

$$|a_{N_n}| > \varepsilon_0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, daß die Folge $(s_n)_n$ unbeschränkt ist:

$$s_{N_n} = \sum_{l=1}^{N_n} a_l \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_{N_k} > n\varepsilon_0 \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots.$$

Das folgende Korollar werden wir im Abschnitt Cauchy-Folgen wesentlich verschärfen (vgl. 2.2.12). Dabei werden wir eine ähnliche Beweisidee verwenden.

Korollar 2.1.21 *Es sei $(a_n)_n$ eine monotone, beschränkte Folge. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $(a_n)_n$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Man bilde die Folge $d_n := a_{n+1} - a_n$, $(n\in\mathbb{N})$ und die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^n d_k = a_{n+1} - a_1$. Da die Folge $(s_n)_n$ beschränkt ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

2.1.3 Uneigentliche Konvergenz

Definition 2.1.22 (Uneigentliche Konvergenz)

1. *Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ strebt gegen $+\infty$, falls es zu jedem $K > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geqslant n_0$ gilt:*
$$a_n > K.$$
Man schreibt $a_n \to +\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. *Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ strebt gegen $-\infty$, falls es zu jedem $K > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geqslant n_0$ gilt:*

$$a_n < -K.$$

Man schreibt $a_n \to -\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Bemerkung. 1.) Statt $+\infty$ schreibt man auch ∞.
2.) Es sei $C > 0$. Statt $a_n > K$ kann man auch $a_n \geqslant CK$ fordern.

Bemerkung 2.1.23 Die Symbole $\pm\infty$ sind keine Zahlen. Man kann die Rechenregeln für Grenzwerte bequem formulieren, wenn man $\mathbb{R}$ zu der Menge

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

erweitert und die folgenden Regeln vereinbart:

$$\begin{aligned} -\infty < x < +\infty \quad & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty, \quad \frac{x}{\pm\infty} = 0 \quad & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ x \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot x = \pm\infty \quad & \text{für } x > 0, \\ x \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot x = \mp\infty \quad & \text{für } x < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \\ \infty \cdot \infty = -\infty \cdot -\infty = \infty, \quad +\infty \cdot -\infty = -\infty \cdot +\infty = -\infty. \end{gathered}$$

$\overline{\mathbb{R}}$ ist total geordnet. Weitere Ausdrücke wie $0 \cdot \pm\infty$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ und $+\infty - \infty$ sind nicht definiert!

Feststellung 2.1.24 *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$, Folgen in $\mathbb{R}$.*

1. *Es gilt $a_n \to \pm\infty$ genau dann, wenn*

$$a_n \underset{<}{\overset{>}{}} 0 \quad \textit{für fast alle } n \in \mathbb{N} \quad \textit{und} \quad \frac{1}{a_n} \to 0.$$

2. *Es sei $c > 0$, so daß $b_n \geqslant c$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $a_n \to \pm\infty$, dann gilt $a_n b_n \to \pm\infty$.*

3. *Wenn $a_n \leqslant b_n$, $(n\in\mathbb{N})$, und $a_n \to \infty$, dann gilt $b_n \to \infty$.*

Feststellung 2.1.25 *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$, Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ und $b_n \to b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Wenn* $a \pm b$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *definiert ist, dann gilt* $a_n \pm b_n \to a \pm b$.
2. *Wenn* $a \cdot b$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *definiert ist, dann gilt* $a_n b_n \to a \cdot b$.
3. *Wenn* $\dfrac{a}{b}$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *definiert ist, dann gilt* $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Bemerkung 2.1.26 (Wachstumsgeschwindigkeit) Es ist für die Analysis sehr wichtig, die *Wachstumsgeschwindigkeit* von Folgen $a_n \to +\infty$ zu erfassen.
Eine Folge $(b_n)_n$ strebt **schneller** als $(a_n)_n$ gegen $+\infty$, falls

$$\frac{a_n}{b_n} \to 0$$

gilt.

Beispiel. In der folgenden Liste strebt jede Folge schneller nach $+\infty$ als die vorhergehende:

$$\text{a) } (n^k), (k \in \mathbb{N}); \;\; \text{b) } (q^n), (q > 1); \;\; \text{c) } (n!); \;\; \text{d) } (n^n); \;\; \text{e) } (2^{n^2}).$$

Zum Beweis siehe Beispiel 2.1.13, und Satz 1.5.4Bernoullische UngleichungSATZ.1.5.4

2.2 Vollständigkeit der reellen Zahlen

2.2.1 Intervallschachtelungen

Bezeichnung 2.2.1 Ein Intervall $[a, b]$ mit Endpunkten $a, b \in \mathbb{R}$ heiße kurz ein **kompaktes** Intervall.

Statt kompaktes Intervall sagt man auch **abgeschlossenes, beschränktes** Intervall.

Bezeichnung 2.2.2 Eine **Intervallschachtelung** ist eine Folge $(I_n)_n$ kompakter Intervalle mit den Eigenschaften:

1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $I_{n+1} \subset I_n$.
2. Die Längen $|I_n|$ der Intervalle konvergieren gegen Null.

Lemma 2.2.3 *Es sei $(I_n)_n$ eine Intervallschachtelung. Wenn $x, \tilde{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, dann ist $x = \tilde{x}$.*

Beispiel. Im Abschnitt 1.5.8Approximation der Eulerschen ZahlSATZ.1.5.8 haben wir die Intervallschachtelungen

$$[E_n, E_n^*] = \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}\Big] \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

konstruiert. Offensichtlich ist die Länge (vgl 1.5.6Bernoullische UngleichungSATZ.1.5.6)

$$|[E_n, E_n^*]| = \frac{1}{n \cdot n!} < \frac{1}{9}\big(\frac{3}{n}\big)^{n+1}.$$

Z. B. für $n = 10$ ist die Länge kleiner als $2 \cdot 10^{-7}$.

In Satz 1.5.11Approximation der Eulerschen ZahlSATZ.1.5.11 haben wir gesehen, daß es keine rationale Zahl gibt, die in allen Intervallen $[E_n, E_n^*]$, $(n\in\mathbb{N})$, liegt.

Wir werden die Existenz einer Zahl e, die in allen Intervallen $[E_n, E_n^*]$ liegt, aus einem weiteren Axiom (2.2.6) folgern.

Bemerkung 2.2.4 (Wurzel aus 2 ist nicht rational) —
Es gibt keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.

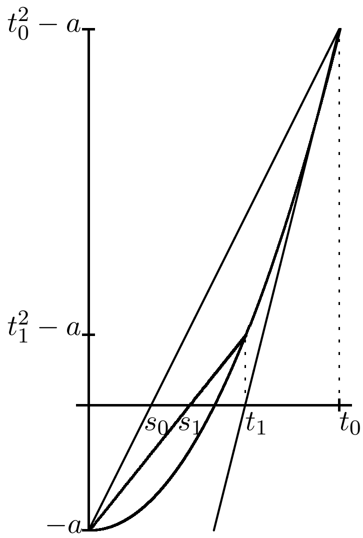
Beweis. Es sei $r = \dfrac{p}{q} > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$, so daß p und q **keinen gemeinsamen Teiler** haben. Aus

$$r^2 = \big(\frac{p}{q}\big)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2.$$

Also ist p^2 eine gerade Zahl und somit muß auch p gerade sein. Es gilt $p = 2m$ mit einem $m \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$4m^2 = p^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 2m^2 = q^2.$$

Also ist auch q eine gerade Zahl und 2 ist ein gemeinsamer Teiler von p und q. Widerspruch! Wir konstruieren eine Intervallschachtelung zur Bestimmung der Wurzel:



Approximation der Nullstelle der Parabel $y = x^2 - a$.

Parabel ist konvex:

$$\text{Tangente} \leqslant \text{Parabel} \leqslant \text{Sekante}$$

t_0 Startpunkt mit $a < t_0^2$
s_0 Nullstelle der Sekante durch $(0, -a)$ und $(t_0, t_0^2 - a)$
t_1 Nullstelle der Tangente in (t_0, t_o^2)
s_1 Nullstelle der Sekante durch $(0, -a)$ und $(t_1, t_1^2 - a)$
Intervallschachtelung:
$s_0 < s_1 < \cdots\sqrt{a}\cdots < t_1 < t_0.$

Beispiele 2.2.5 (Intervallschachtelung: Wurzel)

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Wir definieren rekursiv eine Folge $(t_n)_n$:

Anfangswert:	$t_0 \in (0, \infty)$	beliebig
Rekursion:	$t_{n+1} := \frac{1}{2}\big(t_n + \frac{a}{t_n}\big)$	für $n = 1, 2, \ldots$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $t_n > 0$ und

$$t_n^2 - a = \frac{1}{4}\big(t_{n-1} - \frac{a}{t_{n-1}}\big)^2 \geqslant 0. \qquad (*)$$

Die Folge $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ ist monoton fallend:

$$t_n - t_{n+1} = \frac{1}{2t_n}(t_n^2 - a) \geqslant 0 \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

Da die Folge $(t_n)_n$ monoton und beschränkt ist, folgt nach Korollar 2.1.21 $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n - t_{n+1}) = 0$.

Wir bilden eine zweite, monoton wachsende Folge $s_n := \dfrac{a}{t_n}$, $(n\in\mathbb{N})$. Aus

$$t_n - s_n = 2(t_n - t_{n+1}) \geqslant 0$$

folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n \leqslant t_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(t_n - s_n) = 0.$$

Wir haben also eine Intervallschachtelung $[s_n, t_n]$, $({\scriptstyle n\in\mathbb{N}})$.
Diese Intervallschachtelung definiert die positive Wurzel aus a, denn es gilt:

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [s_n, t_n] \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = a.$$

$\boxed{\Rightarrow:}$ Für $n \in \mathbb{N}$ folgt aus $s_n \leqslant x \leqslant t_n$, daß:

$$s_n = \frac{1}{2}\Big(s_n + \frac{a}{t_n}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(t_n + \frac{a}{s_n}\Big) = t_n.$$

Nach Lemma 2.2.3 ist

$$x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = a.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ Es sei $0 \leqslant x$ und $x^2 = a$. Für $n \in \mathbb{N}$ folgt aus $(*)$:

$$0 \leqslant t_n^2 - a = t_n^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant t_n.$$

$$0 \leqslant \frac{a}{t_n^2}(t_n^2 - a) = a - s_n^2 = x^2 - s_n^2 \quad \Rightarrow \quad s_n \leqslant x.$$

2.2.2 Vollständig geordneter Körper

Um in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die Existenz der Zahl e, oder die Existenz der Wurzel aus einer positiven Zahl zu sichern, brauchen wir ein weiteres Axiom für $\mathbb{R}$, daß die **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$ sichert:

Definition 2.2.6 (Intervallschachtelungsprinzip)

(I) *Es sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann existiert ein*

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Bemerkung. Nach Lemma 2.2.3 gibt es genau ein $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Anmerkung.

1. Ein geordneter Körper, der die Axiome A und I erfüllt, heißt **vollständig geordneter Körper**.
2. Man kann zeigen, daß es - bis auf Isomorphie - genau einen vollständig geordneten Körper gibt. Das sind die reellen Zahlen.
3. Der **Beweis der Existenz und Eindeutigkeit** der reellen Zahlen überfordert den Anfänger und ist für das weitere Vorgehen erstmal entbehrlich. Wir werden am Ende Semesters darauf eingehen.
4. Die Vorlesung Analysis I handelt davon, welche **Folgerungen** man **aus den Axiomen** eines vollständig geordneten Körpers ziehen kann.

---

5. Es gibt eine Reihe von äquivalenten Forderungen, um die Vollständigkeit eines geordneten Körpers zu beschreiben. Die Lehrbücher unterscheiden sich darin, welche der Forderungen sie als Axiom und welche als Folgerung wählen.
6. Andere übliche äquivalente Forderungen sind u.a.
   (a) Cauchysches Konvergenzkriterium
   (b) Supremums-Eigenschaft
   (c) Dedekindsches Schnittaxiom
7. Wir werden das Cauchysche Konvergenzkriterium und die Supremumseigenschaft untersuchen.

2.2.3 Cauchysches Konvergenzkriterium

Bei der Definition der Konvergenz muß man den Grenzwert bereits kennen, um die Konvergenzbedingung nachzuprüfen. Das Cauchysche Konvergenzkriterium ermöglicht, die Konvergenz einer Folge zu testen, deren Grenzwert noch nicht bekannt ist.

Definition 2.2.7 *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *heißt* Cauchy-Folge*, wenn gilt:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Bemerkung 2.2.8 Die Feststellungen 2.1.5 und 2.1.10 gelten sinngemäß auch für die Definition von Cauchy-Folgen.

Beispiel. Eine konvergente Folge $(a_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge:

Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} = c$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - c| + |c - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{für } m, n \geqslant N_0.$$

Satz 2.2.9 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis.

$\boxed{\Rightarrow:}$ Diese Beweisrichtung haben wir im obigen Beispiel gezeigt.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Es sei $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Wir wählen zu den Vergleichswerten $\varepsilon_k := \frac{1}{2^k}$ induktiv passende $n_k \in \mathbb{N}$, so daß die Folge $(n_k)_k$ streng monoton wachsend ist und

$$|a_m - a_n| < \varepsilon_k \qquad \text{für alle } m, n \geqslant n_k. \qquad (*)$$

$\boxed{k = 1:}$ Wähle zu ε_1 ein passendes n_1.

$\boxed{k \Rightarrow k+1:}$ Es seien zu $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ bereits passende n_k gefunden, so daß $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ und $(*)$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ erfüllt ist.
Dann gibt es nach Voraussetung zu ε_{k+1} ein n_{k+1}, so daß $n_{k+1} > n_k$ und $(*)$ für $k+1$ gilt.

Man setze nun

$$I_k := [a_{n_k} - 2\varepsilon_k, a_{n_k} + 2\varepsilon_k].$$

Nach Konstruktion ist $a_n \in I_{n_k}$ für $n \geqslant n_k$.

Es ist $I_{k+1} \subset I_k$ da (Zeichnung):

$$a_{n_{k+1}} + 2\varepsilon_{k+1} < a_{n_k} + \varepsilon_k + 2\varepsilon_{k+1} = a_{n_k} + 2\varepsilon_k$$
$$a_{n_{k+1}} - 2\varepsilon_{k+1} > a_{n_k} - \varepsilon_k - 2\varepsilon_{k+1} = a_{n_k} - 2\varepsilon_k.$$

und folglich

$$[a_{n_{k+1}} - 2\varepsilon_{k+1}, a_{n_{k+1}} + 2\varepsilon_{k+1}] \subset [a_{n_k} - 2\varepsilon_k, a_{n_k} + 2\varepsilon_k].$$

Für die Längen der Intervalle gilt: $|I_k| = 4\varepsilon_k = 4\frac{1}{2^k} \to 0$. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip 2.2.6 gibt es ein

$$c \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k.$$

Wenn $n \geqslant n_k$ so sind $a_n, c \in I_{n_k}$ und folglich:

$$|a_n - c| \leqslant |I_k| = 4\varepsilon_k.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Bemerkung. Für die Konvergenz einer Folge reicht es nicht, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine Nullfolge bilden:

1. Für die harmonische Reihe $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $(n\in\mathbb{N})$ gilt $h_{n+1} - h_n = \frac{1}{n+1} \to 0$ aber $h_n \to \infty$.
2. Die Folge $\sqrt{n} \to \infty$ aber $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$.
3. Für die beschränkte Folge
$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$$
bilden die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine Nullfolge. Die Folge ist aber nicht konvergent.

Wenn die die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder einer Folge kleiner sind als die Summanden einer konvergenten Reihe, so ist die Folge eine Cauchyfolge.

Meistens vergleicht man mit der geometrischen Reihe:

Satz 2.2.10 (Vergleich mit geometrischer Reihe)

Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgende Bedingung erfüllt

$$\exists\, 0 \leq q < 1,\ C > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 : \quad |a_{n+1} - a_n| \leq C q^n,$$

dann ist sie konvergent.

Beweis. Die Folge ist eine Cauchyfolge. Für $m > n$ gilt

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left|\sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \\ &\leqslant C \sum_{k=n}^{m-1} q^k = C\frac{1 - q^{m-n}}{1-q} q^n \leqslant \frac{C}{1-q} q^n. \end{aligned}$$

2.2.4 Monotone Folgen

Jedem Satz über monotone Folgen entspricht ein Satz über Reihen mit nichtnegativen Summanden und umgekehrt.

Satz 2.2.11 (Reihen mit nichtnegativen Summanden) *Es sei $(a_n)_n$ eine Folge mit nichtnegativen Gliedern. Wenn die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ nach oben beschränkt ist, dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.*

Beweis. Wir zeigen, daß die Folge $(s_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Annahme: $(s_n)_n$ ist keine Cauchy-Folge. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ zwei Indices $l, m \geqslant n$ gibt mit

$$|s_m - s_l| \geqslant \varepsilon_0.$$

Es sei etwa $m \geqslant l \geqslant n$. Da die Summanden $a_k \geqslant 0$ sind, folgt:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k \geqslant \sum_{k=l}^{m} \geqslant \varepsilon_0.$$

Man kann nun rekursiv eine streng monoton wachsende Folge N_n, $({\scriptstyle N\in\mathbb{N}_0})$, natürlicher Zahlen mit Startwert $N_0 = 0$ angeben, so daß

$$\sum_{k=N_{n-1}+1}^{N_n} a_k \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

Dann ist aber die Folge (s_{N_n}), $({\scriptstyle n\in\mathbb{N}})$, unbeschränkt:

$$s_{N_n} = \sum_{k=1}^{N_n} a_k = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} a_k \geqslant n\varepsilon_0.$$

Widerspruch. Die Folge $(s_n)_n$ ist also eine Cauchy-Folge.

Satz 2.2.12 *Monotone beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ sind konvergent.*

Beweis. Die Folge $(a_n)_n$ sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Die Folge $a_{n+1} - a_n$, $({\scriptstyle n\in\mathbb{N}})$, ist nichtnegativ und folglich ist nach Satz 2.2.11 die Folge der Partialsummen $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{n+1} - a_n)$ konvergent.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k).$$

Für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen $(a_n)_n$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)$ und folglich nach den Rechenregeln 2.1.15 auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty}(-a_n).$$

2.2.5 n-te Wurzeln

Feststellung 2.2.13 (Approximation der n-ten Wurzel) *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$. Wir erhalten eine monoton fallende Folge $(y_k)_k$ positiver Zahlen durch die Vorschrift:*

$$\begin{aligned} &\textit{Startwert:} && y_0 \quad \textit{mit } y_0^n \geqslant x, \\ &\textit{Rekursion:} && y_{k+1} := y_k\Big(1 - \frac{y_k^n - x}{n y_k^n}\Big) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$y_k^n \geqslant x, \quad y_k > 0 \quad \textit{für } k \in \mathbb{N}_0, \textit{ und} \quad y_{k-1} \geqslant y_k \quad \textit{für } k \in \mathbb{N}.$$

Für den Grenzwert $y := \lim\limits_{k\to\infty} y_k$ gilt $y^n = x$.

Bemerkung: Als Startwert kann man z.B. $y_0 = 1 + \frac{x-1}{n}$ wählen. Dann ist $y_0^n = (1 + \frac{x-1}{n})^n \geqslant 1 + n\frac{x-1}{n} = x$.

Beweis. Die Abschätzungen folgen durch Induktion nach k.

$\boxed{k = 0\textbf{:}}$ Die beiden ersten Aussagen sind klar nach Definition.

$\boxed{k \Rightarrow k+1\textbf{:}}$ Da $\dfrac{y_k^n - x}{n\, y_k^n} \leqslant 1$ folgt nach Bernoulli (1.5.1Bernoullische UngleichungSATZ.1.5.1):

$$\Rightarrow \quad y_{k+1}^n = y_k^n\Big(1 - \frac{y_k^n - x}{n\, y_k^n}\Big)^n \geqslant y_k^n\Big(1 - \frac{y_k^n - x}{y_k^n}\Big) = x.$$

$$y_{k+1} = y_k \frac{(n-1)y_k^n + x}{n\, y_k^n} > 0.$$

$$0 \leqslant y_k^n - x \quad \Rightarrow \quad y_{k+1} = y_k(1 - \frac{y_k^n - x}{n\, y_k}) \leqslant y_k.$$

Also existiert $y := \lim\limits_{k\to\infty} y_k$. Aus der Rekursionsformel folgt:

$$n y^n = \lim_{k\to\infty} (n\, y_k^{n-1}\, y_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} (n-1)y_k^n + x = (n-1)y^n + x.$$

Folglich ist $y^n = x$.

Satz 2.2.14 *Zu $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $y > 0$ mit $y^n = x$.*

Bezeichnung. Die eindeutig bestimmte Zahl y aus vorigem Satz heißt die *n-te Wurzel aus x*. Bezeichnung: $y = \sqrt[n]{x}$ Man setzt $\sqrt[n]{0} := 0$.

Korollar 2.2.15 *Die Funktion* $(0,\infty) \ni x \mapsto \sqrt[n]{x}$ *ist* ***streng monoton wachsend.***

Beweis.

Eindeutigkeit: Es seien $y, \tilde{y} > 0$. Wenn $y < \tilde{y}$, dann ist $y^n < \tilde{y}^n$. Aus $y^n = x = \tilde{y}^n$ folgt also $y = \tilde{y}$.

Existenz: Die Existenz der n-ten Wurzel folgt aus der Festellung 2.2.13.

Bemerkung und Bezeichnung 2.2.16 Wir vereinbaren die übliche Exponenten Schreibweise für Wurzeln.

Aus der Eindeutigkeit der Wurzel folgt für $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$:

1. Für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ ist
$$\sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p.$$
2. Es seien p, $\widetilde{p} \in \mathbb{Z}$, q, $\widetilde{q} \in \mathbb{N}$. Wenn $\dfrac{p}{q} = \dfrac{\widetilde{p}}{\widetilde{q}}$, dann ist
$$\sqrt[q]{x}^{\,p} = \sqrt[\widetilde{q}]{x}^{\,\widetilde{p}}.$$
3. Für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ definiert man:
$$x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x}^{\,p}.$$

Satz 2.2.17 (Bernoullische Ungleichung für die Wurzel)
Für $x > -1$, $x \in \mathbb{R}$, und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$1 + \frac{x}{n(1+x)} \leqslant \sqrt[n]{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{n}.$$

Beweis. Wir setzen
$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + a.$$
Dann ist $a > -1$. Nach Bernoulli (1.5.1Bernoullische UngleichungSATZ.1.5.1) folgt
$$1 + x = (1+a)^n \geqslant 1 + na = 1 - n + n\sqrt[n]{1+x}$$
$$\sqrt[n]{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{n}$$
Wenden wir die soeben gezeigt Ungleichung an, so folgt:
$$\sqrt[n]{1+x} = \frac{1}{\sqrt[n]{1 - \frac{x}{1+x}}} \geqslant \frac{1}{1 - \frac{x}{n(1+x)}} \geqslant 1 + \frac{x}{n(1+x)}.$$

Feststellung 2.2.18 (Stetigkeit der n-ten Wurzel)
Es sei $(a_k)_k$ eine Folge, $a_k \geqslant 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_k = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a}$$

Beweis. Der Fall $a_k \to 0$ ist klar. Wenn der Grenzwert $a \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß

$$a_k > \frac{a}{2} \quad \text{für } n \geqslant n_0.$$

$$\frac{a_k - a}{a} > -1 \quad \text{für } n \geqslant n_0.$$

Die Behauptung folgt nun aus der Bernoullischen Ungleichung:

$$\sqrt[n]{a}\Big(1 + \frac{a_k - a}{ka_k}\Big) \leqslant \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{1 + \frac{a_k - a}{a}} \leqslant \sqrt[n]{a}\Big(1 + \frac{a_k - a}{ka}\Big).$$

Feststellung 2.2.19 *Es sei $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1.$$

Die Folge

$$(\sqrt[n]{q})_n \quad \textit{ist} \quad \begin{cases} \textit{streng monoton fallend} & \textit{für } \; q > 1, \\ \textit{streng monoton wachsend} & \textit{für } \; 0 < q < 1. \end{cases}$$

Bemerkung: Die Konvergenz $\sqrt[n]{q} \to 1$ folgt aus der Bernoullischen Ungleichung: Für $q > 0$ gilt:

$$1 + \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{q}\Big) \leqslant \sqrt[n]{q} \leqslant 1 + \frac{1}{n}(q-1).$$

Beispiel.

$$1.05 \leqslant \sqrt[10]{2} \approx 1.0718 \leqslant 1.1,$$
$$1.000999 \leqslant \sqrt[1000]{1000} \approx 1.0069 \leqslant 1.999\,.$$

Beweis.Für $q > 0$ setze man

$$q = 1 + x \quad \text{mit} \quad x > -1$$

und wende die Bernoullische Ungleichung 2.2.17 an:

$$1 + \frac{x}{n(1+x)} \leqslant \sqrt[n]{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{n}.$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

Im Falle $1 < q$ ist $\sqrt[n]{q} > 1$ und aus

$$q < q\sqrt[n]{q} = \left(\sqrt[n]{q}\right)^{n+1}$$

folgt die strenge Monotonie der Folge: $\sqrt[n+1]{q} < \sqrt[n]{q}$.

Im Falle $0 < q < 1$ sind die Kehrwerte $\sqrt[n]{\frac{1}{q}}$ streng monoton fallend.

Feststellung 2.2.20 *Die Folge $\sqrt[n]{n}$, $(n = 3, 4, \ldots)$, ist streng monoton fallend und es ist*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Bemerkung. Die Behauptungen folgen aus der Abschätzung

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad \text{für } n = 3, 4, \ldots$$

Beweis. Nach Lemma 1.5.5Bernoullische UngleichungSATZ.1.5.5 gilt

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3 \leqslant n \quad \text{für } n = 3, 4, \ldots.$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{n}$$

$$\Rightarrow \quad n + 1 \leqslant n\sqrt[n]{n} = (\sqrt[n]{n})^{n+1} \quad \text{für } n = 3, 4, \ldots.$$

Wir setzen $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$.

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geqslant \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Also ist

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

2.3 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

2.3.1 Grenzwerte von Funktionen

Beispiele 2.3.1 Die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

ist im Punkt 2 nicht definiert. Da

$$f(x) = x + 2 \quad \text{für } x \neq 2,$$

liegen die Funktionswerte nahe an 4, wenn x nahe an 2 liegt.
Genauer gilt für jede Folge (x_n) in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$:

$$\text{Aus} \quad x_n \to 2 \quad \text{folgt} \quad f(x_n) \to 4.$$

Somit sollte 4 der „Grenzwert“ von f bei der Annäherung an 2 sein.

Bei der Definition des Grenzwertes einer Funktion f in einem Punkt a untersuchen wir zunächst den wichtigen Spezialfall, daß der Punkt a **nicht** zum Definitionsbereich von f gehört:

Definition 2.3.2 (Spezialfall $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$)
Gegeben sei ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ und eine Funktion $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.
*Eine Zahl $\ell \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** der Funktion f im Punkte a, falls für **jede** Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{a\}$ aus $x_n \to a$ stets $f(x_n) \to \ell$ folgt.*

Bezeichnung. Man schreibt $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ oder $f(x) \to \ell$ für $x \to a$.

Bemerkung

1. Wir werden später die Definition auf beliebige Definitionsbereiche ausdehnen.
2. In der obigen Definition ist die Funktion im Punkte a **nicht definiert**. Irgendein andersweitig erklärter Funktionswert im Punkte a spielt für die Bestimmung des Grenzwertes also keine Rolle.
3. Um auf jedenfall klarzustellen, daß wir die Funktion f auf dem Definitionsbereich $I \setminus \{a\}$ meinen, schreiben wir

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x).$$

4. Diese Vorsichtsmaßnahme ist angebracht, da man in der Literatur zwei Definitionen des Grenzwertes findet. Für den **traditionellen** Grenzwertbegriff von Weierstraß vergleiche man das Schulbuch, [KABALLO, Band II] oder [KÖNIGSBERGER], für den **moderneren**, flexibleren Begriff siehe [DIEUDONNÉ], [FORSTER] oder [BRÖCKER].

   Wir beschränken uns vorerst auf die Fälle, in denen der Unterschied sich nicht bemerkbar macht.

Feststellung 2.3.3

1. *Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.*
2. *Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in J$, so gilt für die Einschränkung $g := f|_{I\cap J\setminus\{a\}}$:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

Bemerkung Teil 2.) der Feststellung besagt, daß der Grenzwert nur vom Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung J des Punktes a abhängt. $I\cap J$ ist ein offenes Intervall.

Wir schreiben

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I\cap J}} f(x) := \lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

Beispiele 2.3.4

1. Es gilt also $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

   Setzen wir diese Funktion in $x = 2$ durch ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion fort:

$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für} \quad x \neq 2 \\ c & \text{für} \quad x = 2 \end{cases},$$

   so gilt in allen Fällen $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4.$

2. Allgemeiner gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} (x+a) = 2a.$

3. Für $a > 0$ gilt $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$

   Für die auf $(0,\infty)\setminus\{a\}$ erklärte Funktion erhält man:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ .$$

Die folgende Feststellung liefert eine äquivalente Formulierung der Grenzwertdefinition.

Feststellung 2.3.5 (ε-δ Definition des Grenzwertes)
Gegeben sei ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ und eine Funktion $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$. Für $\ell \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$,
2. *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für $x \in I \setminus \{a\}$ aus $|x - a| < \delta$ stets $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ folgt.*

Bild. Das heißt, zu jedem 2ε-Intervall $I_\varepsilon(\ell) = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ mit Mittelpunkt ℓ gibt es ein 2δ-Intervall $I_\delta(\ell) = (a - \delta, a + \delta)$ mit Mittelpunkt a, so daß

$$f(I_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq I_\varepsilon(\ell).$$

Feststellung 2.3.6 (Rechenregeln für Grenzwerte)
Gegeben sei ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ und Funktionen $f, g : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_f$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_g$
Dann folgt

1. $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
3. *Wenn $\ell_g \neq 0$, so gibt es ein offenes Intervall $J \subset I$ mit $a \in J$, so daß $g(x) \neq 0$ für $x \in J \setminus \{a\}$.*

   Auf $J \setminus \{a\}$ gilt dann:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in J \setminus \{a\}}} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

.

Bezeichnung Im allgemeinen geben wir in der Aussage 3.) das Intervall J nicht an und schreiben:

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_f}{\ell_g} \ .$$

Bemerkung 2.3.7 Weitere Regeln sind:

1. **Einsperregel:** Es sei $h : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ und $f \leqslant h \leqslant g$.
   Wenn $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \ell$, dann ist $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$.
   Wenn $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, h beschränkt, dann $\lim_{x \to a} (f \cdot h)(x) = 0$.
2. $\lim_{x \to a} \max(f, g)(x) = \max\{\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to a} g(x)\}$.
3. $\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)|$.
4. Es sei $p \in \mathbb{N}$. Wenn $f \geqslant 0$, so gilt
$$\lim_{x \to a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

Beweis (von Feststellung 2.3.6).

1. und 2. Dies folgt sofort aus den entsprechenden Regeln 2.1.15 für Grenzwerte von Folgen.
3. Wir müssen ein offenes Intervall J angeben, das a enthält und auf dem $g(x) \neq 0$ ist:
   Nach Feststellung 2.3.5 gibt es zu $\varepsilon := \frac{|\ell_g|}{2} > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für $x \in D_f$ und $|x - a| < \delta$ folgendes gilt:
$$|\ell_g - g(x)| < \varepsilon = \frac{|\ell_g|}{2} \; .$$
$$\Rightarrow \quad |\ell_g| - |g(x)| < \frac{|\ell_g|}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{|\ell_g|}{2} < |g(x)| \; .$$
   Die restliche Behauptung folgt nun aus der entsprechenden Regel 2.1.15(3) für Quotienten von Folgen.

Beispiel.
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}} = 1$$
Die Funktion ist für $x > 0$ erklärt, da:
$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} > 0 \quad \text{für } x > 0.$$
Es sei $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n \to 1$ für $n \to \infty$. Dann gilt
$$\begin{aligned} \sqrt{x_n} &\to 1, \\ \sqrt{x_n - \sqrt{x_n}} &\to 0, \\ \sqrt{x_n + \sqrt{x_n}} &\to \sqrt{2}, \\ \sqrt{x_n^2 + 1} &\to \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Beispiele 2.3.8 Die **Heaviside-Funktion** wird auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Die Heaviside Funktion beschreibt einen Einschaltvorgang, ein Signal springt von 0 auf 1.

Der Grenzwert $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} H(x)$ existiert offenbar nicht.

Für Folgen (x_n) in $(0,\infty)$ mit $x_n \to 0$ gilt $H(x_n) \to 1$, für Folgen (x_n) in $(-\infty,0)$ mit $x_n \to 0$ gilt $H(x_n) \to 0$.

Man kann daher 1 als **rechtsseitigen Grenzwert** und 0 als **linksseitigen Grenzwert** von H in Punkte 0 auffassen.

Definition 2.3.9 (rechtsseitiger Grenzwert)

*Gegeben sei ein nichtleeres, offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, mit **linkem** Endpunkt $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.*

*Eine Zahl $\ell \in \mathbb{R}$ heißt **rechsseitiger Grenzwert** der Funktion f im Punkte a, falls für **jede** Folge $(x_n)_n$ in I aus $x_n \to a$ stets $f(x_n) \to \ell$ folgt.*

Bezeichnung und Bemerkung 2.3.10

1. Man schreibt
$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+) := \ell$$
oder $f(x) \to \ell$ für $x \downarrow a$.

2. Der rechsseitige Grenzwert ist ein Spezialfall des Grenzwertbegriffes 2.3.12. Man kann also auch $\lim_{x\to a} f(x)$ schreiben.

3. Analog definiert man für ein nichtleeres, offenes Intervall I mit rechtem Endpunkt $b \in \mathbb{R}$ den **linksseitigen Grenzwert**
$$\lim_{x\uparrow b} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b^-) := \ell$$
und schreibt $f(x) \to \ell$ für $x \uparrow a$.

4. Es sei I ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Wir vereinbaren:
$$\lim_{x\downarrow a} f(x) := \lim_{\substack{x\downarrow a\\ x\in(a,\infty)}} f(x), \qquad \lim_{x\uparrow a} f(x) := \lim_{\substack{x\uparrow a\\ x\in(-\infty,a)}} f(x).$$

5. Für innere Punkte $a \in I$ gilt also:
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\downarrow a} f(x) = \ell \text{ und } \lim_{x\uparrow a} f(x) = \ell.$$

2.3.2 Uneigentliche Grenzwerte

Beispiele 2.3.11 Wir betrachten die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Inversion $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

1. Für die Inversion $x \mapsto \frac{1}{x}$ existiert der Grenzwert im Punkte 0 nicht.
2. Für Folgen (x_n) in $(0, \infty)$ mit $x_n \to 0$ gilt $\dfrac{1}{x_n} \to \infty$.
3. Für Folgen $(x_n) \subseteq (-\infty, 0)$ mit $x_n \to 0$ gilt $\dfrac{1}{x_n} \to -\infty$.
4. Strebt x gegen $-\infty$ oder ∞ so strebt $\dfrac{1}{x}$ gegen 0.

   D.h. für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \to \infty$ oder $x_n \to -\infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

Wir wollen also noch Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ einführen und den Fall $f(x) \to \pm\infty$ betrachten.

Wir geben eine Definition des Grenzwertes auf **offenen Intervallen**, die diese Fälle und die vorangehenden umfaßt:

Definition 2.3.12 (Grenzwert einer Funktion)
Gegeben seien:

> *ein nichtleeres, offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$, so daß es eine Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert,*
>
> *eine Funktion $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ und ein $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Die Funktion f strebt gegen ℓ für $x \to a$, falls für jede Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{a\}$ aus $x_n \to a$ stets $f(x_n) \to \ell$ folgt.

Bezeichnung. Wir schreiben für obige Definition:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ oder $f(x) \to \ell$ für $x \to a$.

Bemerkung. Diese Definition umfaßt die folgenden fünf Fälle

1. $a = -\infty$ und $I = (-\infty, b)$: Wir schreiben $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) := \ell$
2. $a = \infty$ und $I = (b, \infty)$: Wir schreiben $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) := \ell$.
3. $a \in \mathbb{R}$ und $I = (a, b)$: Wir schreiben $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) := \ell$
   und nennen ℓ den **rechtsseitigen Grenzwert**.
4. $a \in \mathbb{R}$ und $I = (b, a)$: Wir schreiben $\lim\limits_{x\uparrow a} f(x) := \ell$
   und nennen ℓ den **linksseitigen Grenzwert**.

5. $c < a < b$, $I = (c, b)$ und $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$: Wir schreiben

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) := \ell.$$

Beispiele 2.3.13 1. Für die Heaviside-Funktion ist $H(0^+) = 1$ und $H(0^-) = 0$.

2. Für die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Inversion gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\to 0 && \text{für } x \to \pm\infty, \\ \frac{1}{x} &\to \infty && \text{für } x \downarrow 0, \\ \frac{1}{x} &\to -\infty && \text{für } x \uparrow 0. \end{aligned}$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^n \to \infty$ für $x \to \infty$.

4. Für $n \in \mathbb{N}$, n gerade, gilt $x^n \to \infty$ für $x \to -\infty$.

5. Für $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, gilt $x^n \to -\infty$ für $x \to -\infty$.

6. $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ für $x \downarrow 0$.

Feststellung 2.3.14 (K-δ Definition für $f(x) \to \infty$)

Gegeben seien:

> *ein nichtleeres, offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$, so daß es eine Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert, und eine Funktion $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Also $D_f = I \setminus \{a\}$.*

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Die Funktion f strebt gegen ∞ für $x \to a$.*

2. **Fall** $a \in \mathbb{R}$:
   $\forall K > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall x \in D_f \;:\; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > K.$

   Fall $a = \infty$:
   $\forall K > 0\, \exists L > 0\, \forall x \in D_f \;:\; x > L \;\Rightarrow\; f(x) > K.$

   Fall $a = -\infty$:
   $\forall K > 0\, \exists L > 0\, \forall x \in D_f \;:\; x < -L \;\Rightarrow\; f(x) > K.$

Beweis. $\boxed{1.\Rightarrow 2.}$ Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Es gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to a$ und 2.) gelte nicht.

Fall $a \in \mathbb{R}$: Gilt 2.) nicht, so gibt es ein K_0, so daß zu $\delta_n = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in D_f$ existiert mit $|x_n - a| < \delta_n$ und $f(x_n) \leqslant K_0$.

Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert gegen a und die Folge $(f(x_n))_n$ ist beschränkt.

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Fall $a = \infty$: Gilt 2.) nicht, so gibt es ein K_0, so daß zu $L_n = n$ ein $x_n \in D_f$ existiert mit $x_n \geqslant L_n$ und $f(x_n) \leqslant K_0$.

Die Folge $x_n \to \infty$ und die Folge $(f(x_n))_n$ ist beschränkt.

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Fall $a = -\infty$: der Widerspruch folgt analog.

$\boxed{2.\Rightarrow 1.}$ Es sei $(x_n)_n$ eine Folge in D_f mit $x_n \to a$.

Fall $a \in \mathbb{R}$: zu $K > 0$ wähle ein $\delta > 0$ gemäß 2.). Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geqslant n_0$. Für diese n folgt dann $f(x_n) > K$. Also gilt $f(x_n) \to \infty$.

Fall $a = \infty$: zu $K > 0$ wähle ein $L > 0$ gemäß 2.). Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n > L$ für alle $n \geqslant n_0$. Für diese n folgt dann $f(x_n) > K$. Also gilt $f(x_n) \to \infty$.

Fall $a = -\infty$: Analog folgt $f(x_n) \to -\infty$.

Die Feststellungen 2.1.25 gelten sinngemäß für die obigen Situationen.

Feststellung 2.3.15 (Uneigentliche Grenzwerte)

Gegeben seien:

ein nichtleeres, offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$, so daß es eine Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert, und Funktionen $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ mit Grenzwerten $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_f \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_g \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. *Wenn $\ell_f \pm \ell_g$ in $\overline{\mathbb{R}}$ definiert ist, dann gilt $(f \pm g)(x) \to \ell_f \pm \ell_g$*
2. *Wenn $\ell_f \cdot \ell_g$ in $\overline{\mathbb{R}}$ definiert ist, dann gilt $(f \cdot g)(x) \to \ell_f \cdot \ell_g$*
3. *Wenn $\dfrac{\ell_f}{\ell_g}$ in $\mathbb{R}$ definiert ist, dann gilt $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \to \dfrac{\ell_f}{\ell_g}$.*

2.3.3 Cauchykriterium

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen erhält man das entsprechende Kriterium für Grenzwerte von Funktionen:

Satz 2.3.16 (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Gegeben sei ein nichtleeres, offenes Intervall I mit rechtem Endpunkt $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Es existiert Grenzwert $f(a^-) = \lim\limits_{x \uparrow a} f(x) \in \mathbb{R}$.*
2. *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x,\ y \in (a-\delta, a) \cap I$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt.*

   In Quantoren:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\ y \in (a-\delta, a) \cap I : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Bemerkung.

1. Ein entsprechende Kriterien gilt für Grenzwerte in einem inneren Punkt $a \in I$:

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall x, y \in I \setminus \{a\}\ :\\ &\quad |x-a| < \delta \text{ und } |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

2. Im Fall $x \to \infty$ lautet das Cauchy-Kriterium:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists L > 0\ \forall x,\ y > L : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beweis.
$\boxed{1 \Rightarrow 2:}$ Es sei $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \ell$. Nach Satz 2.3.5 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß aus $x \in I \setminus \{a\}$, $|x-a| < \delta$ stets $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ folgt. Also gilt für $x,\ y \in I \setminus \{a\}$ mit $|x-a| < \delta$, $|y-a| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| < |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < 2\varepsilon.$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1:}$ Aus 2.) folgt, daß für jede Folge $(x_n)_n$ in I mit Grenzwert a die Folge $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge ist und folglich konvergiert. Nach dem Reißverschlußprinzip 2.3.17 haben alle diese Folgen den gleichen Grenzwert. Also exisitiert $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$.

Bemerkung 2.3.17 (Reißverschlußprinzip)

Wenn $x_n \to a$ und $y_n \to a$, dann konvergiert auch die Folge $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ gegen a. Wenn $\big(f(x_n)\big)_n$ und $\big(f(y_n)\big)_n$ konvergieren, so konvergiert auch die Folge

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$$

Somit haben die Folgen $\big(f(x_n)\big)_n$ und $\big(f(y_n)\big)_n$ den gleichen Grenzwert.

Satz 2.3.18 *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres, offenes Intervall mit rechtem Endpunkt b und $f : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und beschränkt. Dann existiert $f(b^-) = \lim\limits_{x \uparrow b} f(x)$ in $\mathbb{R}$.*

Beweis.Annahme: die Cauchy-Bedingung ist nicht erfüllt.

Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß es zu jedem $\delta > 0$ zwei Punkte x, $y \in I$ gibt mit x, $y \in (b - \delta, b)$ und $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$.

Zu den Werten $\delta_n = \frac{1}{n}$ bilde man induktiv zwei Folgen $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, so daß $x_n < y_n < x_{n+1} < y_{n+1}$ und

$$0 < \varepsilon_0 \leqslant f(y_n - f(x_n) \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

Dann folgt $f(y_{n+1}) - f(y_1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \big(f(y_{k+1} - f(x_{k+1}) + f(x_{k+1}) - f(y_k)\big) \geqslant n\varepsilon_0.$$

Die Folge $(f(y_n))_n$ ist also unbeschränkt. Widerspruch.

Korollar 2.3.19 *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ monoton.*

1. *Dann existieren die einseitigen Grenzwerte $f(c^-)$, $f(c^+) \in \mathbb{R}$ für alle $c \in I$.*
2. *Wenn $I = (a, b)$, a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, dann existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x \uparrow b} f(x) \ \textit{in } \overline{\mathbb{R}}.$$

Bemerkung Wenn $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist, so gilt:

$$f \text{ nach oben unbeschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \uparrow b} = \infty.$$

2.3.4 Komposition von Grenzwerten

Lemma 2.3.20 (Komposition von Grenzwerten)
Gegeben seien:

(i) *nichtleere, offene Intervalle* $I,\ J \subseteq \mathbb{R}$,

(ii) *ein* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *so daß es eine Folge* $(x_n)_n$ *in* $I \setminus \{a\}$ *gibt, die gegen* a *konvergiert,*

(iii) *eine Funktion* $f : I \setminus \{a\} \to J \setminus \{\ell_f\}$ *mit Grenzwert* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_f \in \overline{\mathbb{R}}$

(iv) *eine Funktion* $g : J \setminus \{\ell_f\} \to \mathbb{R}$ *mit Grenzwert* $\lim\limits_{y\to \ell_f} g(y) = \ell_g \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dann gilt $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = \ell_g$.

Der Beweis des Lemmas ist offensichtlich.

Wenn $f : I \setminus \{a\} \to J$, so muß man eine stärkere Forderung an die Funktion g stellen: (Man zeichne ein Bild!)

Lemma 2.3.21 ($g(\lim f) = \lim(g \circ f)$)
Gegeben seien:

(i) *nichtleere, offene Intervalle* $I,\ J \subseteq \mathbb{R}$,

(ii) *ein* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *so daß es eine Folge* $(x_n)_n$ *in* $I \setminus \{a\}$ *gibt, die gegen* a *konvergiert,*

(iii) *eine Funktion* $f : I \setminus \{a\} \to J$ *mit Grenzwert* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_f \in \mathbb{R}$

(iv) *eine Funktion* $g : J \to \mathbb{R}$ *mit Grenzwert* $\lim\limits_{\substack{y\to \ell_f \\ y\neq \ell_f}} g(y) = g(\ell_f)$.

Dann gilt $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(\ell_f)$.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $y \in J \setminus \{\ell_f\}$ gilt:

$$|y - \ell_f| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(\ell_f)| < \varepsilon.$$

Für $y = \ell_f$ gilt offensichtlich $|g(y) - g(\ell_f)| < \varepsilon$.
Also gilt für jede Folge $(y_n)_n$ in J:

$$y_n \to \ell_f \quad \Rightarrow \quad g(y_n) \to g(\ell_f)$$

Dann gilt aber für jede Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{a\}$:

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad g(f(x_n)) \to g(\ell_f).$$

D.h.

$$\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = g(\ell_f).$$

Bemerkung. Eine Funktion, die die Bedingung (iv) des Lemmas erfült, wird **stetig** im Punkte ℓ_f genannt.

2.3.5 Stetige Funktionen

Funktionen deren Grenzwerte in einem Punkt stets mit den Funktionswerten in diesem Punkt übereinstimmen, sind in der Analysis von besonderer Bedeutung.

Definition 2.3.22 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.*

1. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* ***stetig in einem Punkt*** $\mathbf{a} \in I$*, falls $f(a)$ der Limes von f in a bezüglich I ist.*
2. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* ***stetig*** *(auf I), falls f in jedem Punkt von I stetig ist.*

Bemerkung.

1. Für ein offenes Intervall I heißt $f : I \to \mathbb{R}$

   rechtsseitig stetig in $a \in I$, falls $f(a^+) = f(a)$ gilt.

   linksseitig stetig in $a \in I$, falls $f(a^-) = f(a)$ gilt.

2. Die Stetigkeit einer Funktion kann von der Wahl des Definitionsbereichs abhängen. So gilt für die Einschränkungen Heaviside-Funktion
   (a) $H : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ und $H : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sind stetig.
   (b) $H : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ ist nicht stetig.
   (c) $H : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ ist in 0 rechtseitig stetig.

3. Für Intervalle $J \subseteq I$ nennt man eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ **stetig auf J**, wenn ihre Einschränkung $f|_J : J \to \mathbb{R}$ stetig ist. In diesem Sinne ist die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $J = [0, 1]$.

Feststellung 2.3.23 *Gegeben seien ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, ein Punkt $a \in I$ und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.*

Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. *Die Funktion f ist stetig im Punkt a.*

2. *Für jede Folge (x_n) in I gilt: Aus $x_n \to a$ folgt $f(x_n) \to f(a)$.*

3. *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in I$ aus $|x - a| < \delta$ stets $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ folgt.*

   In Quantoren:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x \in I \ : \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Bemerkung. Damit kann für in a stetige Funktionen der Funktionswert $f(a)$ mit Hilfe von Werten $f(x)$, mit x nahe an a, angenähert werden. Die ε-δ Beziehung gibt Auskunft über die Güte dieser Approximation.

Feststellung 2.3.24 (Rechenregeln: stetige Funktionen)
Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch auch die folgenden Funktionen in a stetig:

$$\max(f, g), \quad f + g, \quad \lambda f, \quad f \cdot g$$

und, wenn $g(a) \neq 0$,

$$\frac{f}{g}\,.$$

Bemerkung. Der Quotient $\frac{f}{g}$ ist stetig auf der Menge $\{x \in I| \mid g(x) \neq 0\}$.

Satz 2.3.25 (Komposition stetiger Funktionen)

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und f, g Funktionen mit:

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Wenn f stetig in $a \in I$ und g stetig in $f(a) \in J$, dann ist $g \circ f$ stetig in a.

Beispiele 2.3.26

1. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $p_k : x \mapsto x^k$ stetig auf $\mathbb{R}$.

2. Für $q \in \mathbb{N}$ ist nach Feststellung 2.2.18 $\sqrt[q]{\ } : x \mapsto \sqrt[q]{x}$ stetig auf $[0, \infty)$.

3. Für $k, q \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^{\frac{k}{q}}$ stetig auf $[0, \infty)$.

2.3.6 Allgemeine Grenzwertdefinition

Eng verwandt mit dem Begriff der Stetigkeit ist der Grenzwertbegriff für Funktionen auf allgemeinen Definitionsbereichen:

Definition 2.3.27 (Grenzwert einer Funktion)
Gegeben seien:

> *eine nichtleere Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ und ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$, so daß es eine Folge $(x_n)_n$ in D gibt, die gegen a konvergiert,*
>
> *eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und ein $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Die Funktion f konvergiert gegen ℓ für $x \to a$, falls für jede Folge $(x_n)_n$ in D aus $x_n \to a$ stets $f(x_n) \to \ell$ folgt.

Bezeichnung. Wir schreiben für obige Definition:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ oder $f(x) \to \ell$ für $x \to a$.

Bemerkung 2.3.28

1. Ist $a \in D$ so existiert der Grenzwert für $x \to a$ genau dann, wenn f stetig im Punkt a ist. Dann ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Diese Definition des allgemeinen Grenzwertes unterscheidet sich von dem traditionellen *Grenzwertbegriff* von Weierstraß. Dieser lautet:

   Gegeben seien:

   > *eine nichtleereMenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$, so daß es eine Folge $(x_n)_n$ in* $\boxed{D \setminus \{a\}}$ *gibt, die gegen a konvergiert,*
   >
   > *eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und ein $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

   Die Funktion f konvergiert gegen ℓ für $x \to a$, falls für jede Folge $(x_n)_n$ in $\boxed{D \setminus \{a\}}$ *aus $x_n \to a$ stets $f(x_n) \to \ell$ folgt.*

   Ist $a \in D$, so kann bei diesem *Grenzwertbegriff* sehrwohl der Grenzwert für $x \to a$ existieren und f dennoch unstetig in a sein!
3. Für den traditionellen *Grenzwertbegriff* von Weierstraß vergleiche man das Schulbuch, [KABALLO, Band II] oder [KÖNIGSBERGER], für den **moderneren**, flexibleren Begriff siehe [DIEUDONNÉ], [FORSTER] oder [BRÖCKER].
4. Man kann den tradionellen *Grenzwertbegriff* durch Einschränkung der Funktion auf $D \setminus \{a\}$ ausdrücken:

   Bezeichnung. Wenn es eine Folge $(x_n)_n$ in $D \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert und der Grenzwert der Einschränkung $f|_{D\setminus\{a\}}$ im Punkte a existiert, dann bezeichnet man diesen Grenzwert mit:

   $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) := \lim_{x \to a} f|_{D\setminus\{a\}}(x)$$

---

5. Der Grenzwertbegriff ist so gewählt, daß der äußerst praktische Satz über die Komposition von Grenzwerten sich leicht formulieren läßt.:

Satz 2.3.29 (Komposition von Grenzwerten)
Gegeben seien:

> *nichtleere Teilemengen D, $E \subseteq \mathbb{R}$, und $a \in \overline{\mathbb{R}}$, so daß es eine Folge $(x_n)_n$ in D gibt, die gegen a konvergiert,*
>
> *eine Funktion $f : D \to E$ mit Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_f \in \overline{\mathbb{R}}$ und eine Funktion $g : E \to \mathbb{R}$ mit Grenzwert $\lim\limits_{y \to \ell_f} g(y) = \ell_g \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell_g$.

Der Beweis des Satzes ist offensichtlich (vgl. Lemma 2.3.21)

2.3.7 Sprünge und Oszillationen

Wichtige Typen von Unstetigkeiten sind **Sprünge** und **Oszillationen**.

Beispiele 2.3.30

1. Die **Heaviside-Funktion** $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine Sprungstelle bei 0, da $H(0^-) \neq H(0^+)$.

2. Im Falle monotoner Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ besteht die Menge der Unstetigkeitsstellen

$$\{x \in I \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

   nur aus Sprungstellen.

3. Für die **Gauß-Klammer-Funktion** $G : x \mapsto [x]$ ist die Menge der Unstetigkeitsstellen gleich $\mathbb{Z}$.

---

4. Auf $[-1, 1)$ definieren wir eine Funktion

$$Z : x \mapsto 1 - 2|x|$$

   und setzen sie zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten 2-periodischen **Zackenfunktion** fort:

$$Z(x) := Z(x - 2k) \text{ für } x \in [2k - 1, 2k + 1),\ k \in \mathbb{Z},$$

   D. h. es gilt $Z(x) = Z(x + 2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $Z(-1) = Z(1-)$ gilt, ist Z auf $\mathbb{R}$ stetig.

Da $Z(2k) = 1$ und $Z(2k+1) = -1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, existieren die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ nicht.

Später werden wir statt der Zackenfunktion die 2π-periodische Funktion $\cos(x)$ betrachten.

---

5. Mit der Zackenfunktion Z können wir die **Wackelfunktion** $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden:
$$W(x) := \begin{cases} Z(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$
W ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Die Wackelfunktion **oszilliert** links und rechts von 0.

   Die Grenzwerte von $W(x)$ für $x \uparrow 0$ und $x \downarrow$ existieren nicht.

   Auch durch Abänderung von $W(0)$ kann W nicht zu einer in 0 (auch nur einseitig) stetigen Funktion gemacht werden.

---

6. Durch Dämpfung der Oszillation von W, z.B. durch Multiplikation mit x, entsteht eine stetige Funktion:
$$x \mapsto xW(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$
Da $|W(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, folgt aus $x_n \to 0$ stets $x_n W(x_n) \to 0$.

7. Später werden wir statt der Zackenfunktion die periodischen Funktionen $\cos(x)$ oder $\sin(x)$ betrachten.

   Die damit gebildeten Funktionen $\cos(\frac{1}{x})$ und $\sin(\frac{1}{x})$ verhalten sich wie die Wackelfunktion und sind ebenfalls nicht stetig in 0 fortsetzbar.

   Die Funktionen $x\cos(\frac{1}{x})$ und $x\sin(\frac{1}{x})$ sind dagegen stetig in 0.

Es gibt auch Funktionen mit sehr vielen Unstetigkeitsstellen:

Beispiele 2.3.31 (Dirichlet-Funktion)

1. Man definiert die Dirichlet-Funktion auf $\mathbb{R}$ durch
$$D(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. Die Dirichlet-Funktion besitzt in keinem a aus $\mathbb{R}$ einen Grenzwert. Insbesondere ist D in jedem Punkt unstetig.

Dirichlet, Peter, Gustav, Lejeune, 1805-1859

Beweis.

1. Zu $x \in \mathbb{Q}$ so bilde man die Folgen: (vgl. 2.2.4)

$$r_n := x + \frac{1}{n} \to x \quad \text{und} \quad x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n} \to x.$$

   Es ist $D(r_n) = 1$ und $D(x_n) = 0$.

   Also hat die Funktion D in keinem **rationalen** Punkt einen Grenzwert.

2. Wenn $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so ist auch $x_n = \left(x + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Die Folge irrationaler Zahlen $(x_n)_n$ konvergiert gegen x.

   Nach der Bemerkung 2.3.32 gibt es eine Folge $(r_n)_n$ in $\mathbb{Q}$, die gegen x konvergiert.

   Also hat die Funktion D in keinem **irrationalen** Punkt einen Grenzwert.

Satz 2.3.32 (Rationale Approximation)
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x \in I$. Dann gibt es eine Folge $(r_n)_n$ rationaler Zahlen in I die von unten gegen x konvergiert:

$$r_n \in I \cap \mathbb{Q}, \quad r_n < x \quad \textit{und} \quad r_n \to x.$$

Beweis (Rationale Approximation). Fall $x > 0$: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$, existiert ein $p_n \in \mathbb{N}_0$, so daß

$$\begin{aligned} & p_n < nx \leqslant p_n + 1 \\ \Rightarrow \quad & x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{p_n}{n} < x. \end{aligned}$$

Die Folge $r_n := \left(\frac{p_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen x.
Zu $c < x$, $c \in I$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$c < r_n < x \quad \text{für } n \geqslant n_0.$$

Die Folge $(r_n)_{n=n_0}^{\infty}$ leistet das Gewünschte.

Analog gibt es zu $x \geqslant 0$ eine Folge in $I \cap \mathbb{Q}$, die von oben gegen x konvergiert. Im Fall $x \leqslant 0$ betrachte man $-x$.

Beispiele 2.3.33 (Stammbrüche)

Auf $I = (0, 1)$ definieren wir den Stammbruch:

$$B(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad \operatorname{ggt}(p, q) = 1, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Es gilt $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} B(x) = 0$ für alle $a \in I$.

Somit ist B in den rationalen Punkten unstetig und in den irrationalen stetig.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Es gibt nur endlich viele $q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$. Zu diesen q gibt es nur jeweils endlich viele $p \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} \in I$. Also gibt es nur endlich viele Punkte $\{r_1, \dots, r_n\} \subset I$, in denen $B(r_k) \geqslant \varepsilon$ ist.
Es ist

$$\delta := \min\{|r_k - a| \mid k = 1, ..., n\} > 0.$$

Für $x \in I \setminus \{a\}$ folgt aus $|x - a| < \delta$ stets $B(x) < \varepsilon$.

Literatur

[Bröcker] Bröcker, Theodor: *Analysis1 (2. Auflage) 1995* Spektrum, Akad. Verl.

[Dieudonné] Dieudonné, J.: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press 1960. Deutsche Übersetzung: *Grundzüge der modernen Analysis* Vieweg 1981

[Forster] Forster, Otto: *Analysis 1 (4. Auflage)* Vieweg 1983

[Kaballo] Kaballo, Winfried: *Einführung in die Analysis I (2. Auflage)* Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg Berlin

[Königsberger] Königsberger, Konrad: *Analysis I (2. Auflage)* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

[Landau] Landau, Edmund: Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen) Leipzig 1930, dritte Auflage: New York 1960.

[van der Waerden] van der Waerden, B. L.: Algebra (Band I) 7. Auflage: Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1966.