2.4 Konvexe Funktionen

2.4.1 Lipschitz-stetige Funktionen

Wir wollen eine Klasse von stetigen Funktionen untersuchen, für die man die ε-δ-Relation sehr gut im Griff hat:

Definition 2.4.1 (Lipschitz-stetige Funktionen)
*Es sei I ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn es eine Konstante $L \geqslant 0$, $L \in \mathbb{R}$, so gibt, daß*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y| \quad \text{für } x,\, y \in I.$$

*L heißt eine **Lipschitz-Konstante** von f.*

Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund, 1832-1903.

Beispiele 2.4.2 (Lipschitz-stetige Funktionen)

1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^n$ Lipschitz-stetig auf jedem Intervall $[-a, a]$, $a > 0$:
$$|x^n - y^n| = |\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}||x - y| \leqslant L\,|x - y|$$
mit $L := na^{n-1}$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ Lipschitz-stetig auf jedem Intervall $[a, \infty)$, $a > 0$:
$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| = \frac{|x - y|}{\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x}^{\,k}\, \sqrt[n]{y}^{\,n-1-k}} \leqslant L\,|x - y|$$
mit $L := \dfrac{1}{na^{\frac{n-1}{n}}} = \dfrac{1}{n} a^{-\frac{n-1}{n}}$.

3. Die Funktion $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ werden wir später mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung untersuchen (vgl. auch Korollar 2.4.25)

Bemerkung 2.4.3 Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, so bildet f Cauchy-Folgen in Cauchy-Folgen ab.

Beweis. Klar

Bemerkung. Den Begriff **Lipschitz-stetig** kann man genauso für Funktionen $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ erklären. Dies gibt uns eine Methode, Funktionen von den rationalen Zahlen auf die reellen Zahlen fortzusetzen:

Satz 2.4.4 (Fortsetzung Lipschitz-stetiger Funktn.)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Lipschitz-stetige Funktion $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ hat genau eine stetige Fortsetzung $\widetilde{f} : \bar{I} \to \mathbb{R}$.

Diese ist ebenfalls Lipschitz-stetig mit der gleichen Lipschitz-Konstante.

Bezeichnung. $\bar{I}$ bezeichnet das I entsprechende abgeschlossene Intervall.

Beweis. Nach Bemerkung 2.3.32 gibt es zu $x \in \bar{I}$ eine Folge $(r_n)_n$ in $I \cap \mathbb{Q}$, die gegen x konvergiert. Dann ist $\big(f(r_n)\big)_n$ eine Cauchy-Folge und es existiert

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \ell.$$

Nach dem Reißverschlußprinzip 2.3.17 gilt für jede Folge $(s_n)_n$ in $I \cap \mathbb{Q}$:

$$s_n \to x \quad \Rightarrow \quad f(s_n) \to \ell.$$

Offensichtlich ist $f(x) = \ell$ für $x \in I \cap \mathbb{Q}$.

Wir definieren die Fortsetzung $\widetilde{f}$ durch $\widetilde{f}(x) := \ell$.

Zu x, $y \in \bar{I}$ wähle Folgen $(r_n)_n$, $(s_n)_n$ in $I \cap \mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$ und $s_n \to y$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \lim_{n\to\infty} |f(r_n) - f(s_n)| \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} L\,|r_n - s_n| = L\,|x - y|. \end{aligned}$$

Satz 2.4.5 (Vererbung der Monotonie)

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I.

Wenn die Einschränkung $f|_{I\cap\mathbb{Q}}$ (streng) monoton wachsend ist, so ist f (streng) monoton wachsend.

Beweis. Wir zeigen den Fall strenger Monotonie:

Es seien x, $y \in \mathbb{R}$ und $x < y$. Nach 2.3.32 gibt es s_1,$s_2 \in \mathbb{Q}$ mit $x < s1 < s_2 < y$ und Folgen $(r_n)_n$, $(t_n)_n$ in $\mathbb{Q}$, so daß von unten $r_n \to x$ und von oben $t_n \to y$. Dann gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) \leqslant f(s_1) < f(s_2) \leqslant \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(y).$$

2.4.2 Konvexe Funktionen

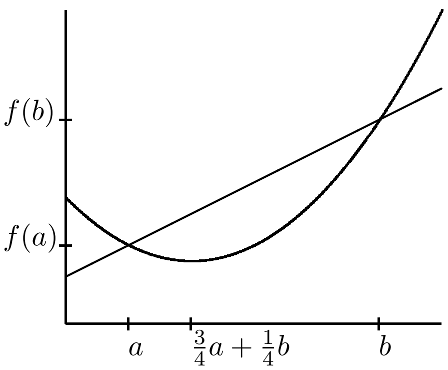
Bemerkung. In elementaren Büchern zum „Calculus “ findet man manchmal die Veranschaulichung der stetigen Funktionen als Funktionen, deren Graph man mit einem Stift ohne *abzusetzen* zeichnen kann.

Etwas besser entsprechen die stückweise konvexen oder konkaven Funktionen, die an den Anschlußstellen stetig zusammenpassen, dieser Vorstellung.

Bezeichnung und Bemerkung 2.4.6 (Sekante)

1. Es seien I ein nichtausgeartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Für a, $b \in I$, $a \neq b$ nennt man die Gerade durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ die **Sekante** durch diese Punkte auf dem Graphen von f.
2. Die Gleichung dieser Sekante lautet:
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{für } x \in I.$$
3. Der Differenzenquotient
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
heißt die **Steigung** der Sekante.

Bemerkung.



Die Verbindungsstrecke der Punkte $\big(a, f(a)\big)$ und $\big(b, f(b)\big)$ nennen wir die **Sehne** über dem Intervall $[a, b]$.

Die Sehne ist das Bild des Einheitsintervalls $[0, 1]$ unter der affinen Abbildung
$$t \mapsto \big((1-t)a + tb, (1-t)f(a) + t(f(b)\big) \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Anschaulich heißt eine Funktion **konvex**, wenn ihr Graph immer unterhalb jeder Sehne verläuft.

Definition 2.4.7 (konvexe Funktion)

1. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtausgeartetes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* ***konvex****, wenn für alle offenen Teilintervalle $(a,b) \subset I$ stets gilt:*

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \text{für } x \in (a,b).$$

2. *f heißt* ***streng konvex****, wenn*

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \text{für } x \in (a,b).$$

3. *f heißt* ***konkav*** *bzw.* ***streng konkav****, wenn $-f$ konvex bzw streng konvex ist.*

Durch algebraische Umformung der Definition 2.4.7 erhält man:

Bemerkung 2.4.8 1. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist (streng) konvex, wenn für alle offenen Teilintervalle $(a,b) \subset I$ und $x \in (a,b)$ stets gilt:

$$f(x) \underset{(<)}{\leqslant} \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

2. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist (streng) konvex, wenn für alle offenen Teilintervalle $(a,b) \subset I$ und $t \in (0,1)$ stets gilt:

$$f((1-t)a+tb) \underset{(<)}{\leqslant} (1-t)\, f(a) + t\, f(b).$$

Bemerkung 2.4.9 (Komposition konvexer Funkt.)

Gegeben seien Intervalle I, J und Funktionen $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

1. Wenn f (streng) konvex und g konvex und (streng) monoton wachsend ist, dann ist $g \circ f$ (streng) konvex.

2. Wenn f (streng) konkav und g konvex und (streng) monoton fallend ist, dann ist $g \circ f$ (streng) konvex.

Beweis. Es seien a, $b \in I$ und $t \in (0,1)$:

1. Da f (streng) konvex und g konvex und (streng) monoton wachsend ist:

$$\begin{aligned} g(f((1-t)a+tb)) &\underset{(<)}{\leqslant} g((1-t)\, f(a) + t\, f(b)) \\ &\leqslant (1-t)\, g(f(a)) + t\, g(f(b)) \end{aligned}$$

2. Es ist f (streng) konkav:

$$f((1-t)a+tb) \underset{(>)}{\geqslant} (1-t)\,f(a)+t\,f(b).$$

Da g streng monoton fallend und konvex ist, folgt

$$\begin{aligned} g(f((1-t)a+tb)) &\underset{(<)}{\leqslant} g((1-t)\,f(a)+t\,f(b)) \\ &\leqslant (1-t)\,g(f(a))+t\,g(f(b)). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4.10 (Umkehrf. einer konvexen Funkt.)

Es seien I, $J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to J$ bijektiv mit Umkehrfunktion $g : J \to I$. Dann gilt:

1. f ist genau dann streng monoton wachsend und **(streng) konvex**, wenn g streng monton wachsend und **(streng) konkav** ist.
2. f ist genau dann streng monoton fallend und **(streng) konvex**, wenn g streng monton fallend und **(streng) konvex** ist.
3. f ist genau dann streng monoton fallend und **(streng) konkav**, wenn g streng monton fallend und **(streng) konkav** ist.

Beweis. Die Monotonieeigenschaften der Umkehrfunktion wurden bereits in Satz 1.4.8FunktionenSATZ.1.4.8 gezeigt. Wir zeigen jeweils den Fall strenger Konvexität bzw. strenger Konkavität.

Es seien a, $b \in I$, $\alpha := f(a)$, $\beta := f(b)$ und $t \in (0,1)$.

1. Aus $f((1-t)\,a+t\,b) < (1-t)\,f(a)+t\,f(b)$ folgt

$$\begin{aligned} (1-t)\,g(\alpha)+t\,g(\beta) &= (1-t)\,a+t\,b = g(f((1-t)\,a+t\,b)) \\ &< g((1-t)\,f(a)+t\,f(b)) = g((1-t)\,\alpha+t\,\beta). \end{aligned}$$

Also ist g konkav.

2. Aus $f((1-t)\,a+t\,b) < (1-t)\,f(a)+t\,f(b)$ folgt

$$\begin{aligned} (1-t)\,g(\alpha)+t\,g(\beta) &= (1-t)\,a+t\,b = g(f((1-t)\,a+t\,b)) \\ &> g((1-t)\,f(a)+t\,f(b)) = g((1-t)\,\alpha+t\,\beta). \end{aligned}$$

Also ist g konvex.

3. Behauptung (3.) folgt analog zu (2.).

Lemma 2.4.11 (Steigung konvexer Funktionen) *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht-ausgeartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Funktion f ist (streng) konvex.*
2. *Für jedes $a \in I$ ist die Steigung*
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{für } x \in I,\ a < x,$$
(streng) monoton wachsend.
3. *Für jedes $a \in I$ ist die Steigung*
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{für } x \in I,\ x < a,$$
(streng) monoton wachsend.
4. *Für jedes $a \in I$ und für $x,\ y \in I$, $x < a < y$ ist*
$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \underset{(<)}{\leqslant} \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Korollar 2.4.12 *Wenn f (streng) konvex ist, so ist die Steigung*
$$(x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{für } x, y \in I,\ x \neq y,$$
in beiden Variablen (x, y) (streng) monoton wachsend.

Beweis.

$\boxed{a < x < y\ \mathbf{:}}$
$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(y) - f(a)}{y - a}(x - a)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

$\boxed{x < y < a\ \mathbf{:}}$ Analog.

$\boxed{x < a < y\ \mathbf{:}}$ Da $\frac{y-a}{y-x} + \frac{a-x}{y-x} = 1$ gilt:
$$f(a) \leqslant f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(a - x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{y-a}{y-x} f(a) + \tfrac{a-x}{y-x} f(a) \leqslant \tfrac{y-a}{y-x} f(x) + \tfrac{a-x}{y-x} f(y)$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{y-a}{y-x}\Big(f(a) - f(x)\Big) \leqslant \tfrac{a-x}{y-x}\Big(f(y) - f(a)\Big)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$

Beispiele 2.4.13 (Konvexität der Potenzfkt.)

1. Für $n = 2, 3, \ldots$ ist die Potenzfunktion
$$p_n : (0, \infty) \ni x \mapsto x^n$$
streng monoton wachsend und streng konvex:

2. Für $n = 2, 3, \ldots$ ist die Wurzelfunktion
$$p_{\frac{1}{n}} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$$
streng monoton wachsend und streng konkav.

3. Die Inversion $p_{-1} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-1}$ ist streng monoton fallend und streng konvex.

4. Für m, $n \in \mathbb{N}$ ist die Potenzfunktion
$$p_{-\frac{m}{n}} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-\frac{m}{n}}$$
streng monoton fallend und streng konvex.

Beweis.

1. Für $0 < a < x < y$ gilt für die Steigungen:
$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} < \sum_{k=0}^{n-1} y^k a^{n-1-k} = \frac{y^n - a^n}{y - a}$$

2. Nach Bemerkung 2.4.10 ist die Umkehrfunktion streng monoton wachsend und streng konkav.

3. Für $0 < a < x < y$ gilt für die Steigungen:
$$\frac{x^{-1} - a^{-1}}{x - a} = -\frac{1}{ax} < -\frac{1}{ay} = \frac{y^{-1} - a^{-1}}{y - a}.$$

---

4. Es seien m, $n \in \mathbb{N}$.

   Da $p_{\frac{1}{n}}$ streng monoton wachsend und konkav ist und p_{-1} streng monoton fallend und konvex ist, ist nach Bemerkung 2.4.9 (2.) die Komposition $p_{-\frac{1}{n}}$ streng monoton fallend und streng konvex.

   Da p_m streng monoton wachsend und streng konvex ist, ist nach Bemerkung 2.4.9 (1) die Komposition $p_{-\frac{m}{n}}$ streng monoton fallend und streng konvex.

Feststellung 2.4.14 (Lipschitz-Stet. konvexer Fktn.)
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.

Für jedes kompakte Teilintervall $J = [a, b] \subset I$ ist die Einschränkung $f|_J$ Lipschitz-stetig.

Wenn $c,d \in I$ mit $c < a < b < d$, dann ist

$$L := \max\Big\{\Big|\frac{f(a)-f(c)}{a-c}\Big|, \Big|\frac{f(d)-f(b)}{d-b}\Big|\Big\} =$$

eine Lipschitz-Konstante für $f|_J$.

Beweis. Es seien $c,d \in I$ mit $c < a < b < d$. Nach Korollar 2.4.12 gilt für $a \leqslant x < y \leqslant b$

$$\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(d)-f(b)}{d-b}$$

und somit

$$|f(y)-f(x)| \leqslant \max\Big\{\Big|\tfrac{f(a)-f(c)}{a-c}\Big|, \Big|\tfrac{f(d)-f(b)}{d-b}\Big|\Big\}\, |y-x|.$$

Bemerkung. Die Definition der Konvexität 2.4.7 und die Feststellung 2.4.14 gelten entsprechend für konvexe Funktionen $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

Korollar 2.4.15 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine (streng) konvexe Funktion $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ hat eine eindeutige stetige Fortsetzung $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$. $\widetilde{f}$ ist auch (streng) konvex.*

Beweis. Für alle $J = [a, b] \subset I$ mit rationalen Endpunkten a, $b \in I \cap \mathbb{Q}$, $a < b$, ist die Einschränkung $f|_{J\cap\mathbb{Q}}$ Lipschitz-stetig und hat nach Satz 2.4.4 eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $[a, b]$.

Wenn zwei derartige Intervalle $[a_1, b_1]$ und $[a_2, b_2]$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, so ist der Durchschnitt ein rationaler Punkt oder ein nichtausgeartetes Intervall mit rationalen Endpunkten.

In beiden Fällen stimmen die jeweiligen Fortsetzungen auf dem Durchschnitt überein.

Nach Bemerkung 2.3.32 gibt es zu $x \in I$ rationale a, $b \in I \cap \mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.

Also hat f eine eindeutige stetige Fortsetzung $\widetilde{f}$ auf ganz I.

Nach Lemma 2.4.11 und Beispiel 2.4.5 ist $\widetilde{f}$ ist wieder (streng) konvex.

2.4.3 Reelle Potenzen

Wir zeigen, daß die Exponentialfunktion zur Basis $a > 1$ mit rationalen Exponenten:

$$\mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} \mapsto a^{\frac{p}{q}} \in \mathbb{R}$$

streng konvex ist. Nach Korollar 2.4.15 hat diese Funktion eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

Diese Fortsetzung heißt **Exponentialfunktion zur Basis a**.

Hiermit definieren wir dann die Potenzfunktion für reelle Exponenten.

Lemma 2.4.16 *Es seien $a > 1$, $b > 1$ in $\mathbb{R}$.*

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*
$$\frac{b^n - 1}{n} < \frac{b^{n+1} - 1}{n+1} \quad .$$
2. *Für alle $r,\ s \in \mathbb{Q}$ folgt aus $0 < r < s$, daß*
$$\frac{a^r - 1}{r} < \frac{a^s - 1}{s}.$$
3. *Für alle $r,\ s,\ t \in \mathbb{Q}$ folgt aus $r < s < t$, daß*
$$\frac{a^s - a^r}{s - r} < \frac{a^t - a^r}{t - r} \quad .$$
4. *Die Funktion $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$ ist streng konvex.*

Beweis.

1. Da $b > 1$ ist $nb^n > \sum_{k=0}^{n-1} b^k$ und folglich
$$(n+1)\sum_{k=0}^{n-1} b^k < n\sum_{k=0}^{n} b^k \quad \Rightarrow \quad \frac{b^n - 1}{n} < \frac{b^{n+1} - 1}{n+1} \quad .$$
2. Es seien $r = \frac{m}{q}$, $s = \frac{n}{q}$ mit $m,\ n,\ q \in \mathbb{N}$ und $b := a^{\frac{1}{q}}$. Es ist $b > 1$. Aus $r < s$ folgt $m < n$ und mit (1.)
$$\frac{a^r - 1}{r} = q\,\frac{b^m - 1}{m} < q\,\frac{b^n - 1}{n} = \frac{a^s - 1}{s}.$$

3. Für $r,\ s,\ t \in \mathbb{Q}$ folgt aus $r < s < t$ mit (2.)

$$\frac{a^s - a^r}{s-r} = a^r\,\frac{a^{s-r}-1}{s-r} < a^r\,\frac{a^{t-r}-1}{t-r} = \frac{a^t - a^r}{t-r}\ .$$

4. Aus (3.) und Lemma 2.4.11 (2.) folgt, daß die Funktion $r \mapsto a^r$ streng konvex ist.

Es sei $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$. Nach Korollar 2.4.15 hat die streng konvexe Funktion $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$ eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

Bezeichnung 2.4.17 (Exponentialfunktion)

1. Für $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$ heißt die stetige Fortsetzung der Funktion $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$ **Exponentialfunktion zur Basis *a*** und wird mit

$$x \mapsto a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

bezeichnet.

2. Für $0 < a < 1$, $a \in \mathbb{R}$ setzt man $a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

3. Die Exponetialfunktion zur Basis e wird mit $\exp(x) := e^x$ bezeichnet und heißt **die Exponentialfunktion**.

Feststellung 2.4.18 (Regeln: Exponentialfunktion)
Es sei $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

1. *Es gilt die Funktionalgleichung*

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \textit{für } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

2. *Es ist $a^0 = 1$,*

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \textit{und} \quad a^x > 0 \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}.$$

3. *Für $a > 1$ ist die Exponentialfunktion zur Basis a streng monoton wachsend und streng konvex.*

4. *Für $a > 1$ gilt*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$

Beweis.

1. Wähle Folgen $(r_n)_n$ und $(s_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$ und $s_n \to y$. Da die Exponetialfunktion stetig ist, folgt:

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n\to\infty} a_n^r \cdot a_n^s = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = a^{x+y}$$

2. Da $a^0 = 1$ folgt $a^x \cdot a^{-x} = a^0 = 1$ und $a^x = (a^{\frac{x}{2}})^2 \geqslant 0$.

3. Da die Exponentialfunktion für rationale Exponenten streng monoton ist, folgt die strenge Monotonie der stetigen Fortsetzung wie in Beispiel 2.4.5.

   Analog folgt die strenge Konvexität.

4. Da $a > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$. Da die Exponentialfunktion monoton wachsend ist, folgt hieraus $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$.

   Es ist $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.

Da $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ ist erhalten wir:

Korollar 2.4.19 *Für $0 < a < 1$ ist die Exponentialfunktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$ streng monoton fallend und streng konvex.*

Bemerkung. Für $a > 0$ und $s = \frac{m}{n}$, $t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ gilt bekanntlich

$$\begin{aligned}(a^s)^t &= \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mp}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{mp} = \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mp} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{st}.\end{aligned}$$

Feststellung 2.4.20 (Potenzgesetz)
Es sei $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy} \quad \text{für } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir wählen zunächst $t \in \mathbb{Q}$ und zeigen $(a^x)^t = a^{xt}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Dazu wähle man eine Folge $(s_k)_k$ in $\mathbb{Q}$ mit $s_k \to x$.

Da die Potenzfunktion $(0, \infty) \ni z \mapsto z^t$ für rationale Exponenten t stetig ist (vgl. Beispiel 2.3.26), erhalten wir

$$(a^x)^t = \lim_{n\to\infty} (a^{s_k})^t = \lim_{n\to\infty} a^{s_k t} = a^{xt}.$$

Nun wählen wir eine Folge $(t_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ mit $t_n \to y$ und erhalten

$$(a^x)^y = \lim_{n\to\infty} (a^x)^{t_n} = \lim_{n\to\infty} a^{xt_n} = a^{xy}.$$

Anmerkung. Vertauschen wir die Reihenfolge der Grenzprozesse $s_k \to x$ und $t_n \to y$, stoßen wir auf ein Problem, da wir noch zeigen müssen, daß die Potenzfunktion für irrationale Exponenten stetig ist.

Bezeichnung 2.4.21 (Reelle Potenzen)
Für $a \in \mathbb{R}$ definiert man die **Potenzfunktion** zur Potenz a durch:

$$p_a : x \mapsto x^a \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

Bemerkung 2.4.22 (Rechenregeln: Potenzfunktion)

1. Für jede Folge $(r_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ ist:
$$x^a = \lim_{n\to\infty} x^{r_n}.$$
2. Es gilt die Funktionalgleichung:
$$x^a\, y^a = (xy)^a \quad \text{für } x,\, y \in (0, \infty).$$
3. Nach Feststellung 2.4.20 ist $p_{\frac{1}{a}}$ die Umkehrfunktion zu p_a:
$$\left(x^a\right)^{\frac{1}{a}} = x^{a\frac{1}{a}} = x^1 = x.$$
4. Es sei $a > 0$: Da die Potenzfunktion p_r für rationale $r > 0$ streng monoton wachsend ist, ist p_a monoton wachsend. Da p_a injektiv ist, ist p_a streng monoton wachsend.
5. Für $a > 0$ gilt: $\lim_{x\to\infty} x^a = \infty$ und $\lim_{x\to 0} x^a = 0$.
6. Für $a > 0$ setzt man $0^a := 0$.

Lemma 2.4.23 (Zur Konvexität der Potenzfkt.)
Es seien $x,\, y \in \mathbb{R}$ und $1 < x < y$.

1. *Für $m,\, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt:*
$$\frac{y^m - 1}{x^m - 1} < \frac{y^n - 1}{x^n - 1}.$$
2. *Für $r,\, s \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < s$ gilt*
$$\frac{y^r - 1}{x^r - 1} < \frac{y^s - 1}{x^s - 1}.$$

3. *Es sei $a \in \mathbb{R}$. Für $a > 1$ gilt*

$$\frac{x^a - 1}{x - 1} < \frac{y^a - 1}{y - 1}.$$

Beweis.

1. Für k, $l \in \mathbb{N}$, $k < l$ und $0 < x < y$ gilt $y^k x^l < x^k y^l$.

   Für m, $n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ folgt daraus

$$\sum_{k=0}^{m-1} y^k \sum_{l=0}^{n-1} x^l < \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{l=0}^{n-1} y^l.$$

   Wenn $1 < x < y$ oder $0 < x < y < 1$ ist, so ist $(x-1)(y-1) > 0$ und folglich (geometrische Reihe)

$$(y^m - 1)(x^n - 1) < (x^m - 1)(y^n - 1).$$

   Hieraus folgt nun die Behauptung (1.).

---

2. Es seien $r = \frac{m}{q}$, $s = \frac{n}{q}$ mit m, n, $q \in \mathbb{N}$. Da die q-te Wurzel streng monoton ist, gilt nach Voraussetzung $1 < x^{\frac{1}{q}} < y^{\frac{1}{q}}$ bzw. $0 < x^{\frac{1}{q}} < y^{\frac{1}{q}} < 1$. Aus (1.) folgt nun

$$\frac{y^r - 1}{x^r - 1} = \frac{\left(y^{\frac{1}{q}}\right)^m - 1}{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^m - 1} < \frac{\left(y^{\frac{1}{q}}\right)^n - 1}{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^n - 1} = \frac{y^s - 1}{x^s - 1}$$

   Die Funktion $(0, \infty) \cap \mathbb{Q} \ni r \mapsto \frac{y^r - 1}{x^r - 1}$ ist streng monoton wachsend und hat eine stetige Fortsetzung auf $(0, \infty)$. Nach Satz 2.4.5 ist die Fortsetzung streng monoton.

   Für ρ, $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $0 < \rho < \sigma$ gilt also

$$\frac{y^\rho - 1}{x^\rho - 1} < \frac{y^\sigma - 1}{x^\sigma - 1}. \qquad (\star)$$

3. Im Fall $1 < a$ setze man in $(\star)$ $\rho = 1$ und $\sigma = a$.

Feststellung 2.4.24 (Konvexität der Potenzfkt.)
Es sei $a \in \mathbb{R}$. Die Potenzfunktion

$$p_a : (0, \infty) \ni x \mapsto x^a$$

1. *ist streng monoton wachsend und streng konvex für $1 < a$.*

2. *ist streng monoton wachsend und streng konkav für* $0 < a < 1$.

3. *ist streng monoton fallend und streng konvex für* $a < 0$.

Mit der Feststellung 2.4.14 erhält man:

Korollar 2.4.25 *Die Potenzfunktion* $(0, \infty) \ni x \mapsto x^a$ *ist für jeden Exponenten* $a \in \mathbb{R}$ *stetig.*

Auf jedem kompakten Teilintervall $[c, d] \subset (0, \infty)$ *ist die Potenzfunktion Lipschitz-stetig.*

Beweis.

1. Es sei $1 < a$: Die die Potenzfunktion p_a ist monoton wachsend und bijektiv, also ist sie streng monoton wachsend.

   Für $0 < u < x < y$ gilt nach Lemma 2.4.23 (3.)

   $$\frac{x^a - u^a}{x - u} = \left(\frac{u^a}{u}\right) \frac{(\frac{x}{u})^a - 1}{\frac{x}{u} - 1} < \left(\frac{u^a}{u}\right) \frac{(\frac{y}{u})^a - 1}{\frac{y}{u} - 1} = \frac{y^a - u^a}{y - u}$$

   Aus Lemma 2.4.11(2.) folgt nun, daß Potenzfunktion für $1 < a$ streng konvex ist.

2. Es sei $0 < a < 1$. p_a, ist die Umkehrfunktion zu $p_{\frac{1}{a}}$. Nach (1.) ist $p_{\frac{1}{a}}$ streng monoton wachsend und streng konvex. Nach Bemerkung 2.4.10 ist die Umkehrfunktion streng monoton wachsend und streng konkav.

---

3. Wir untersuchen p_{-a} und unterscheiden drei Fälle:

   $\boxed{a = 1\textbf{:}}$ Nach Beispiel 2.4.13 (3.) ist $p_{-1}(0, \infty) \ni x \mapsto x^{-1}$ streng monoton fallend und streng konvex.

   $\boxed{a > 1\textbf{:}}$ Da $p_{-1} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-1}$ streng monoton fallend und streng konvex ist und $p_a : (0, \infty) \ni y \mapsto y^a$ streng monoton wachsend und streng konvex ist, ist die Komposition $p_{-a} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-a}$ streng monton fallend und streng konvex (vgl. Bemerkung 2.4.9 (1.)).

   $\boxed{0 < a < 1\textbf{:}}$ Da $p_a : (0, \infty) \ni x \mapsto x^a$ streng monoton wachsend und streng konkav ist und $p_{-1} : (0, \infty) \ni y \mapsto y^{-1}$ streng monoton fallend und streng konvex ist, ist die Komposition $p_{-a} : (0, \infty) \ni x \mapsto x^{-a}$ streng monoton fallend und streng konvex. (vgl. Bemerkung 2.4.9 (2.)).

   Insgesamt folgt also die Behauptung (3.).

2.5 Supremum und Zwischenwertsatz

2.5.1 Supremum

Wir leiten ein weiteres Konstruktionsprinzip für reelle Zahlen her. Nicht jede beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ hat Maximum und Minimum. Wir suchen für diesen Fall einen nützlichen Ersatz.

Ein Beispiel hierfür ist das offene Intervall $I = (0, \sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0,\ x^2 < 2\}$. Die Intervallenden 0 und $\sqrt{2}$ sind ausgezeichnet:

- Die reelle Zahl $\sqrt{2}$ ist die kleinste Zahl, die oberhalb von allen Punkten aus I liegt, d. h. $\sqrt{2}$ ist die **kleinste obere Schranke** von I. Diese exisitiert aber nur in $\mathbb{R}$, nicht in $\mathbb{Q}$.

- Die Zahl 0 ist die **größte untere Schranke** von I.

Wir führen für den gesuchten Begriff **kleinste obere Schranke** eine Bezeichnung ein:

Definition 2.5.1 (Supremum)
Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Hat die Menge

$$S_M := \{a \in \mathbb{R} \mid \ \forall x \in M: \ x \leq a\}$$

der oberen Schranken von M ein Minimum s, so heißt s kleinste obere Schranke *oder* ***Supremum*** *von M und wird mit*

$$s = \sup M$$

bezeichnet.

Beispiel. Für das Intervall $I = (0, \sqrt{2})$ gilt $S_I = [\sqrt{2}, \infty)$ und $\sup I = \min[\sqrt{2}, \infty) = \sqrt{2}$.

Bemerkung 2.5.2 1. Das Supremum einer Menge ist eindeutig bestimmt, da die Anordnung von $\mathbb{R}$ total ist (vgl. Feststellung 1.1.8AnordnungSATZ.1.1.8 und Bem. 1.1.12Minimum und MaximumSATZ.1.1.12).

2. Falls eine Menge ein Maximum besitzt, so stimmt dieses mit dem Supremum überein:

$$\sup M = \max M.$$

Bezeichnung 2.5.3 (Infimum)

Analog zur kleinsten oberen Schranke definiert man für eine nichtleere, nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ die **größte untere Schranke**.

Diese heißt **Infimum** von M und wir mit

$$\inf M$$

bezeichnet.

Feststellung 2.5.4 *Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach unten beschränkt. Bezeichnet $-M := \{-x \mid x \in M\}$, so gilt*

$$\inf M = -\sup(-M).$$

Feststellung 2.5.5 (Charakterisierung des Supremums)

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Es ist genau dann $s = \sup M$, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

1. *$x \leqslant s$ für alle $x \in M$*
2. *Es gibt eine Folge (x_n) in M, so daß $x_n \to s$.*

Korollar 2.5.6 *Die Folge in (2.) kann monoton wachsend gewählt werden.*

Beweis Satz 2.5.5 .

$\boxed{\Rightarrow:}$ Es sei $s = \sup M$. (1.) Dann ist s eine obere Schranke.

(2.) Da s kleinste obere Schranke ist, ist $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M und es gibt ein

$$x_n \in M \quad \text{mit} \quad s - \frac{1}{n} < x_n.$$

Da $s - \frac{1}{n} < x_n \leqslant s$ ist, konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen s.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Nach (1.) ist s eine obere Schranke. Sei gemäß (2.)

$$(x_n)_n \text{ in } M \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = s.$$

Dann gibt es zu jedem $t < s$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geqslant n_0$:

$$|s - x_n| < s - t, \quad \text{folglich} \quad t < x_n.$$

Also ist t keine obere Schranke von M, d. h. s ist die kleinste obere Schranke von M.

Beweis Korollar 2.5.6.

Man setze (vgl. Feststellung 1.3.21Endliche MengenSATZ.1.3.21)

$$y_n := \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Die Folge $(y_n)_n$ liegt in M, ist monoton wachsend und konvergiert ebenfalls gegen s.

Aus der Grenzwertregel 2.1.18 für Folgen ergibt sich die Bemerkung:

Bemerkung 2.5.7 (Grenzwert oberer Schranken)

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Wenn $(s_n)_n$ eine konvergente Folge von oberen Schranken von M ist, so ist auch der Grenzwert eine obere Schranke von M.

Aus den Axiomen

(A) Archimedisches Axiom 2.1.9

(I) Intervallschachtelungsprinzip 2.2.6

ergibt sich nun die **Supremums-Eigenschaft (S)**:

Satz 2.5.8 (Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$)

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke $\sup M \in \mathbb{R}$.

Anmerkung. 1. Umgekehrt folgen aus der Supremums-Eigenschaft das Archimedische Axiom und das Intervallschachtelungsprinzip.

2. Zum Beweis konstruieren wir induktiv mit der Methode der Intervall-Halbierung eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wir konstruieren induktiv zwei monotone Folgen $(x_n)_n$ in M und $(s_n)_n$ in S_M, so daß für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$s_{n+1} - x_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(s_n - x_n) \qquad (\star)$$

Startwerte: Wähle $x_0 \in M$ und $s_0 \in S_M$.

Iteration: Es seien bereits $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ in M und $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_n$ in S_M gewählt, so daß $(\star)$ gilt.

Dann setze man $y_n := \frac{1}{2}(x_n + s_n)$. Es gibt zwei Fälle

$y_n \in S_M$**:** Setze $x_{n+1} := x_n$, $s_{n+1} := y_n$.

Dann ist $s_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n - x_n)$.

$y_n \notin S_M$: Wähle $x_{n+1} \in M$ mit $y_n < x_{n+1}$ und $s_{n+1} := y_n$.
Dann ist $s_{n+1} - x_{n+1} \leqslant s_n - y_n = \frac{1}{2}(s_n - x_n)$.

Die beiden Folgen $(x_n)_n$ und $(s_n)_n$ bilden wegen $(\star)$ eine Intervallschachtelung und konvergieren gegen den gleichen Wert $s \in S_M$. Nach Feststellung 2.5.5 ist $s = \sup M$.

2.5.2 Uneigentliche Suprema

Für nach oben unbeschränkte Mengen führen wir ein **uneigentliches Supremum** in $\overline{\mathbb{R}}$ ein.

Man kann dann gewisse Sachverhalte statt in Worten kurz in Formeln ausdrücken und kann mit diesen uneigentlichen Suprema auch rechnen (vgl. 2.1.23).

Bezeichnung 2.5.9 ($\sup M = \infty$)
Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer.

1. Wenn M **nach oben unbeschränkt** ist, setzen wir
$$\sup M := \infty.$$
2. Wenn M **nach unten unbeschränkt** ist, setzen wir
$$\inf M := -\infty.$$

Beispiele 2.5.10 ($\sup M \in \overline{\mathbb{R}}$)
Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Dann gilt:

1. M nach oben beschränkt $\quad\Leftrightarrow\quad \sup M < \infty$
2. Mit der Bezeichnung $|M| := \{|x| \mid x \in M\}$ gilt:
$$M \text{ beschränkt} \quad\Leftrightarrow\quad \sup |M| < \infty.$$

Beispiele 2.5.11 (Supremum monotoner Folgen)
Es sei $(a_n)_n$ eine monoton wachsende Folge. Dann gilt:

1. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
2. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty \quad\Leftrightarrow\quad (a_n)_n$ beschränkt.

Folgerung aus der Existenz von Suprema und Infima:

Satz 2.5.12 (Charakterisierung von Intervallen)
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Dann sind äquivalent:

(1) *I ist ein Intervall.*

(2) *I enthält mit je zwei Punkten die Verbindungsstrecke. D. h. für alle x, $y \in I$ und alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$x < \xi < y \quad \Rightarrow \quad \xi \in I.$$

Beweis.

$\boxed{\mathbf{1 \Rightarrow 2}}$ Für Intervalle gilt offensichtlich (2.)

$\boxed{\mathbf{2 \Rightarrow 1}}$ Setze $a := \inf M \in \overline{\mathbb{R}}$ und $b := \sup M \in \overline{\mathbb{R}}$.

Wir zeigen zunächst, daß $I \setminus \{a, b\} = (a, b)$ ist:

$$\begin{aligned} z \in (a,b) \quad &\Leftrightarrow \quad \inf I < z < \sup I \\ &\Leftrightarrow \quad \text{es existieren } x, y \in I \text{ mit } x < z \text{ und } z < y \\ &\Leftrightarrow \quad z \in I \setminus \{a, b\}. \end{aligned}$$

Es gibt nun vier Fälle, je nachdem ob a oder b in I oder nicht in I liegen:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} & a \in I, b \in I \quad &\Rightarrow \quad I = [a, b]. \\ &\text{(ii)} & a \in I, b \notin I \quad &\Rightarrow \quad I = [a, b). \\ &\text{(iii)} & a \notin I, b \in I \quad &\Rightarrow \quad I = (a, b]. \\ &\text{(iv)} & a \notin I, b \notin I \quad &\Rightarrow \quad I = (a, b). \end{aligned}$$

2.5.3 Zwischenwertsatz

Das Supremum ist ein geeignetes Hilfmittel bei der Suche nach dem Maximum einer beschränkten Menge. Man muß nur nachprüfen, ob das Supremum der Menge ein Element der Menge ist.

Lemma 2.5.13
Es seien a, $b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$.
Wenn die Menge

$$M := \{x \mid x \in [a, b],\ f(x) \leqslant c\} \neq \emptyset,$$

dann exisitiert $\max M$.

Bemerkung Auf den linken Endpunkt a kommt es nicht an. Das Lemma gilt genauso für Intervalle der Form $(a, b]$ und $(-\infty, b]$.

Beweis. Da M nach oben beschränkt ist, existiert

$$s := \sup M \in \mathbb{R}.$$

Nach Feststellung 2.5.5 gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in M, die gegen s konvergiert. Da f stetig ist, folgt

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant c$$

und somit $s \in M$.

Satz 2.5.14 (Zwischenwertsatz)
Es seien a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten den Fall $f(a) < f(b)$.

Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$, gibt es mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.

Bemerkung.

1. Der Zwischenwertsatz gilt analog im Fall $f(b) < c < f(a)$.
2. Man kann alle Fälle zusammenfassen:

   Zwischenwertsatz. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und a, $b \in I$.*
   *Wenn $f(a) \neq f(b)$ ist, so gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$, das **zwischen** $f(a)$ und $f(b)$ liegt, mindestens ein ξ **zwischen** a und b mit $f(\xi) = c$.*

Beweis (Zwischenwertsatz). Wir suchen das größte $s \in [a, b]$, für das $f(s) = c$ ist.

Da $f(a) < c$ ist, ist

$$M := \{x \mid x \in [a, b],\ f(x) \leqslant c\} \neq \emptyset,$$

und nacht Lemma 2.5.13 existiert $s := \max M$. Da $f(s) \leqslant c < f(b)$, ist $s \neq b$ und somit $s < b$.

Da $s = \max M$, sind für $x \in (s, b]$ die Funktionwerte

$$f(x) > c.$$

Da f stetig ist, folgt

$$f(s) = \lim_{x\downarrow s} f(x) \geqslant c.$$

Also ist $f(s) = c$.

Mit Satz 2.5.12 ergibt sich das Korollar:

Korollar 2.5.15 (Stetiges Bild eines Intervalls)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.

Als einfache Anwendung zeigen wir noch einmal die Existenz von Wurzeln. Wir hatten in Feststellung 2.2.13 bereits ein Iterationsverfahren angegeben, das gegen die n-te Wurzel konvergiert.

Beispiele 2.5.16 Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $c > 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $x > 0$, so daß $x^n = c$.

Bemerkung. Der Zwischenwertsatz liefert die Wurzel als Supremum der Menge $\{x \mid x \in [0, 1 + \frac{c-1}{n}],\ P(x) \leqslant 0\}$. Diese Supremum wird im Satz 2.5.8 mit dem Intervall-Halbierungsverfahren bestimmt.

Das Intervall-Halbierungsverfahren ist ein Allzweckverfahren, das zwar immer konvergiert, aber nicht die besondere Struktur der Gleichung berücksichtigt.

Das Iterationsverfahren 2.2.13 konvergiert dagegen wesentlich schneller (Stichwort: quadratische Konvergenz).

Beweis. Die Funktion

$$P(x) := x^n - c \quad \text{für } x \in [0, \infty)$$

erfüllt $P(0) = -c < 0$.

Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt $P(1 + \frac{c-1}{n}) \geqslant 0$.

Nach dem Zwischenwertsatz 2.5.14 hat P eine Nullstelle im Intervall $(0, 1 + \frac{c-1}{n}]$.

2.5.4 Stetigkeit der Umkehrfunktion

Satz 2.5.17 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)
Es seien $I,\ J \subset \mathbb{R}$ nichtausgeartete Intervalle und $f : I \to J$ eine streng monoton wachsende Funktion mit Umkehrfunktion $g : J \to I$.

Dann sind f und g stetig.

Anmerkung

1. Der Satz gilt analog für streng monoton fallende Funktionen.

2. Wie die folgenden beiden Beispiele zeigen, benötigt man beide Voraussetungen:
   - f ist streng monoton wachsend oder fallend.
   - Das Bild von f ist ein Intervall.

Beispiele

1. Man setze $g = f : [-1, 1) \to [-1, 1)$ mit:

$$g(x) = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{wenn } -1 \leqslant x < 0, \\ x - 1 & \text{wenn } 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

   Es ist $g = f^{-1}$ aber unstetig in $x_0 = 0$.

2. Man definiere $f : [-1, 1] \to [-1, 0) \cup [1, 2]$ mit Umkehrfunktion $g : [-1, 0) \cup [1, 2] \to [-1, 1]$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{wenn } -1 \leqslant x < 0, \\ x + 1 & \text{wenn } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$g(y) := \begin{cases} y & \text{wenn } -1 \leqslant y < 0, \\ y - 1 & \text{wenn } 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

   Die streng monotone Funktion f hat eine Sprungstelle in $x_0 = 0$.

Beweis (Stetigkeit der Umkehrfunktion).

Wir zeigen die Stetigkeit der Umkehrfunktion g (vgl. Satz 1.4.8FunktionenSATZ.1.4.8). Es seien $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0) \in J$ und $\varepsilon > 0$. Es sei $a \in \overline{R}$ der linke Endpunkt von I und $b \in \overline{\mathbb{R}}$ der rechte Endpunkt. Man setze

$$\alpha := \begin{cases} x_0 - \varepsilon & \text{falls } x_0 - \varepsilon \in I, \\ \frac{1}{2}(a + x_0) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\beta := \begin{cases} x_0 + \varepsilon & \text{falls } x_0 + \varepsilon \in I, \\ \frac{1}{2}(x_0 + b) & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\delta := \begin{cases} \min\{y_0 - f(\alpha), f(\beta) - y_0\} & \text{wenn } \alpha < x_0 < \beta, \\ f(\beta) - y_0 & \text{wenn } a = \alpha = x_0, \\ y_0 - \alpha & \text{wenn } x_0 = \beta = b. \end{cases}$$

Es ist $\delta > 0$. Für $y \in J$ gilt

$$|y - y_0| \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) \leqslant y \leqslant f(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leqslant g(y) \leqslant \beta.$$

und somit $|g(y_0) - g(y)| = |x_0 - g(y)| \leqslant \varepsilon$.

Aus Satz 2.5.17 und Korollar 2.5.15 folgt nun:

Korollar 2.5.18 (Stetigkeit der Umkehrfuntion)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $J := f(I)$.

Satz 2.5.19 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht ausgeartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und injektive Funktion. Dann ist f streng monoton.*

Wir betrachten zunächst den Fall $I = [a, b]$.

Lemma 2.5.20 *Es seien a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Wenn $f(a) < f(b)$, so ist f streng monoton wachsend.*

Beweis. Annahme: f ist nicht strikt monoton wachsend:

Dann gibt es Punkte x, $y \in [a, b]$ mit $x < y$ und $f(x) \geqslant f(y)$. Da f injektiv, ist $f(x) > f(y)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\boxed{f(a) \leqslant f(y)\text{:}}$ Zu einem c mit $f(y) < c < f(x)$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz 2.5.14

$$\xi \in (a, x) \quad \text{und} \quad \eta \in (x, y)$$

mit $f(\xi) = f(c) = f(\eta)$.

Da $\xi \neq \eta$, widerspricht das der Injektivität von f.

$\boxed{f(y) < f(a)\text{:}}$ Zu einem c mit $f(y) < c < f(a)$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz 2.5.14

$$\xi \in (a, y)) \quad \text{und} \quad \eta \in (y, b)$$

mit $f(\xi) = c = f(\eta)$.

Da $\xi \neq \eta$, widerspricht das der Injektivität von f.

Beweis.Wähle a, $b \in I$ mit $a < b$.

Wir zeigen, wenn $f(a) < f(b)$, dann ist f streng monoton wachsend:

Seien x, $y \in I$ mit $x < y$. Man setze

$$c := \min\{x, a\} \quad \text{und} \quad d := \max\{y, b\}.$$

Nach dem vorangehenden Lemma ist die Einschänkung $f|_{[c,d]}$ entweder streng monoton wachsend oder fallend, je nachdem ob $f(c) < f(d)$ oder $f(c) > f(d)$ ist.

Da $a, b \in [c, d]$ und $f(a) < f(b)$ ist, muß die Einschränkung $f|_{[c,d]}$ streng monoton wachsend sein.

Da $x, y \in [c, d]$ ist, folgt $f(x) < f(y)$.

Wenn $f(a) > f(b)$ ist, folgt analog, daß f streng monoton fallend ist.

Beispiel (Logarithmus).

Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ ist die Exponentialfunktion zur Basis a:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, \infty)$$

stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

Für $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ ist die Exponentialfunktion zur Basis a:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, \infty)$$

stetig, streng monoton fallend und bijektiv.

Definition 2.5.21 (Logarithmus zur Basis a)

*Es sei $a \in \mathbb{R}$, $0 < a$. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a heißt **Logarithmus zur Basis** a:*

$$(0, \infty) \ni x \mapsto \log_a(x) \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnung 2.5.22 (Der natürliche Logarithmus)

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : x \mapsto e^x$ heißt natürlicher Logarithmus oder kurz **der Logarithmus** und wird mit

$$\log x \quad \text{oder} \quad \ln x$$

bezeichnet.

Mathematiker schreiben meistens $\log x$, Physiker und Ingenieure $\ln x$.

Bemerkung 2.5.23

1. Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt

$$a^x = e^{x \log a} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

2. Die Logarithmen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{für } 0 < a,\ a \neq 1\ .$$

Daher reicht es, den natürlichen Logarithmus zu untersuchen.

Feststellung 2.5.24 (Regeln: Logarithmus)

1. *Der Logarithmus* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist stetig, streng monoton wachsend und streng konkav.*

2. *Es gilt die Funktionalgleichung*

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \textit{für } x,\ y \in (0, \infty).$$

3. *Es gilt*

$$\lim_{x \downarrow 0} \log x = -\infty, \quad \log 1 = 0, \;\; \log e = 1, \quad \lim_{x \to \infty} \log x = \infty.$$

Anmerkung. Wir werden noch weitere wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion und des Logarithmus in den folgenden Kapiteln kennenlernen.

2.6 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

2.6.1 Satz vom Maximum

Bemerkung 2.6.1

- Die beiden Sätze dieses Abschnittes gelten allgemeiner für stetige reelle Funktionen auf kompakten Teilmengen der reellen Zahlen. Die Intervalleigenschaft ist unwichtig. Auch die Beweise kann man sinngemäß übernehmen.
- Die Sätze gelten sogar für beliebige kompakte Mengen. Man führt dann sehr ähnliche Beweise, in denen man statt des Supremumsprinzips den Satz von Bolzano-Weierstraß verwendet (vgl. Abschnitt 2.7.1)
- Wir konstruieren im Beweis des Satzes vom Maximum den grösten Punkt, in dem die Funktion ihr Maximum annimmt. Verwendet man stattdessen den Satz von Bolzano-Weierstraß, so findet man nur irgendein Maximum.

Lemma 2.6.2 (Beschränktheits-Lemma)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Bemerkung. Der Satz wird mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt.

Beweis (Beschränktheits-Lemma).
Annahme: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist nach oben unbeschränkt.
Man bilde zu $N \in \mathbb{N}$ die nichtleere Menge A_n:

$$A_n := \{x \mid x \in [a, b],\ f(x) \geqslant n\}.$$

Nach Lemma 2.5.13 existiert

$$s_n := \max A_n.$$

Da $A_n \supset A_{n+1}$, ist die Folge $(s_n)_n$ monoton fallend. Es existiert

$$[a, b] \ni c = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Da f stetig ist, folgt ein Widerspruch:

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(s_n) = \infty.$$

Satz 2.6.3 (Satz vom Maximum)

Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, kompaktes Intervall. Dann nimmt jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein Maximum an.

D.h., es gibt mindestens ein $\xi \in [a, b]$ so, daß für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$f(x) \leqslant f(\xi).$$

Karl Weierstrass (1815-1897)

Bemerkung. Analog gilt, daß jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ein Minimum hat.

Die kompaktheit des Intervalls ist eine unverzichtbare Vorrausetzung für den Satz vom Maximum:

Beispiele 2.6.4 Mit der Wackelfunktion 2.3.30(5) bilde man die Funktion

$$V : (0, 1] \ni x \mapsto (1 - x)W(x).$$

V ist auf $(0, 1)$ stetig und beschränkt und hat auf $(0, 1]$ weder ein Maximum noch ein Minimum. Es gilt

$$-1 < V(x) < 1 \quad \text{für } x \in (0, 1],$$
$$\sup_{x \in (0,1]} V(x) = 1 \quad \text{und} \quad \inf_{x \in (0,1]} V(x) = -1.$$

Man kann V nicht stetig in $x = 0$ fortsetzen und auch keinen Funktionswert bei 0 so festsetzen, daß V Maximum **und** Minimum hat.

Mit Korollar 2.5.15 ergibt sich das Korollar:

Korollar 2.6.5 (Stetiges Bild eines kompakten Intervalls)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ein kompaktes Intervall.

Beweis (Satz vom Maximum).

Nach Lemma 2.6.2 ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt:

$$s := \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \in \mathbb{R}.$$

Man bilde zu $N \in \mathbb{N}$ die nichtleere Menge A_n:

$$A_n := \{x \mid x \in [a, b],\ f(x) \geqslant s - \tfrac{1}{n}\}.$$

Nach Lemma 2.5.13 existiert

$$s_n := \max A_n.$$

Da $A_n \supset A_{n+1}$, ist die Folge $(s_n)_n$ monoton fallend. Es existiert

$$[a, b] \ni c = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Da f stetig ist, folgt

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(s_n) = s = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

2.6.2 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 2.6.6 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt ***gleichmäßig stetig*** *wenn folgende gilt:*

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle x, $y \in I$ aus $|x - y| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall x, y \in I \ : \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Bemerkung. Die Feststellungen 2.1.5 und 2.1.10 gelten sinngemäß auch für die Definition der Gleichmäßigen Stetigkeit.

Was heißt es, daß eine Funktion nicht gleichmäßig stetig ist?

Bemerkung 2.6.7

1. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist **nicht gleichmäßig stetig**, wenn folgendes gilt:

   Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß es zu jedem $\delta > 0$ zwei Punkte x, $y \in I$ gibt mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$.

   In Zeichen:

$$\exists \, \varepsilon_0 > 0 \, \forall \, \delta > 0 \, \exists \, x, y \in I \quad : \ |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0.$$

2. Es reicht die Werte $\delta = \frac{1}{n}$, $(n\in\mathbb{N})$, zu testen:

   Die Funktion f ist nicht gleichmäßig stetig, wenn es ein $\varepsilon_0 > 0$ und zwei Folgen $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ in I so gibt, daß

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Beispiele 2.6.8 (zur gleichmäßigen Stetigkeit)

1. Für $0 < a < 1$ und $x, y \in [0, \infty)$ gilt die folgende Abschätzung:

$$|y^a - x^a| < |y - x|^a \qquad (\star).$$

   Folglich ist für $0 < a < 1$ die Potenzfunktion (Wurzelfunktion) $p_a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

2. Für die Inversion $p_{-1} : x \mapsto x^{-1}$ und $c > 0$ gilt:

   p_{-1} ist gleichmäßig stetig auf $[c, \infty]$.

   p_{-1} ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0, c]$.

3. Für die Quadratfunktion $p^2 : x \mapsto x^2$ gilt:

   - p^2 ist gleichmäßig stetig auf jedem kompakten Intervall.
   - p^2 ist nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis.

1. Für $0 < a < 1$ ist die Potenzfunktion $p_a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ nach Feststellung 2.4.24 (2) und Bemerkung 2.4.22 (6) streng konkav. Die Steigung ist also streng monoton fallend.

   Für $0 < x < y$ ist $0 < x$ und $0 < y - x < y$. Folglich gilt:

$$\frac{y^a - x^a}{y - x} < \frac{(y-x)^a - 0^a}{(y-x) - 0} = \frac{(y-x)^a}{y - x}.$$

   Hieraus folgt die Ungleichung $(\star)$.

2. $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{|x-y|}{a^2}$ für $x, y \in [a, \infty)$.

   $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} \geqslant \frac{\delta}{(a+\delta)x}$ für $0 < x \leqslant a$ und $0 < \delta$.

3. Klar da $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

Satz 2.6.9 (Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit)

Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Bemerkung. Der Satz wird mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt.

EDUARD HEINE (1821-1861)

Beweis.Annahme: $f : I \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x, y \in I : |x - y| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Wir bilden zu $n \in \mathbb{N}$ die Menge $A_n \neq \emptyset$ und die Punkte:

$$A_n := \{x \mid x \in I,\ \exists\, y \in I : |x - y| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0\},$$
$$s_n := \sup A_n,$$
$$x_n \in A_n \quad \text{mit} \quad s_n - \frac{1}{n} < x_n \leqslant s_n,$$
$$y_n \in I \quad \text{mit} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}\ \wedge\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Da $A_n \supset A_{n+1}$, ist die Folge $(s_n)_n$ monoton fallend. Es existiert

$$[a, b] \ni c = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Da f stetig ist, folgt ein Widerspruch:

$$0 = |f(c) - f(c)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Übung. (Gleichmäßige Stetigkeit)

1. Man modifiziere den Beweis von Satz 2.6.9 oder den alternativen Beweis im Beispiel 2.7.7 und zeige die folgende Charakterisierung der gleichmäßigen Stetigkeit:

Es seien I ein beschränktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist gleichmäßig stetig.*
2. *Wenn $(x_n)_n$ eine Cauch-Folge in I ist, so ist $(f(x(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge.*

2. Man zeige, daß die Äquivalenz (1.) sinngemäß auch für Funktionen $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gilt.

3. Man zeige, daß der Fortsetzungssatz 2.4.4 sinngemäß für gleichmäßig stetige Funktionen $f : I \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gilt.

2.7 Konvergente Teilfolgen

2.7.1 Konvergente Teilfolgen

Definition 2.7.1 (Teilfolge)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Die durch

$$\mathbb{N} \ni k \mapsto a_{n_k}$$

*definierte Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt **Teilfolge** der Folge $(a_n)_n$.*

Bemerkung Der Begriff Teilfolge ist ein Spezialfall des Begriffs Komposition von Funktionen:

Nach Definition 1.4.10FolgenSATZ.1.4.10 ist eine Folge eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ist $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt monoton wachsend, dann heißt die Komposition $a \circ \phi = (a_{\phi(k)})_k$ eine Teilfolge der Folge $(a_n)_n$.

Man schreibt kurz $n_k := \phi(k)$ und $\left(a_{n_k}\right)_k := a \circ \phi$.

Beispiele 2.7.2 (Teilfolgen)

1. Teilfolgen der Folge $(a_n)_n$ sind

$$(a_{2k})_k = a_2, a_4, a_6, \ldots,$$
$$(a_{2k-1})_k = a_1, a_3, a_5, \ldots.$$

2. Zu zwei Folgen $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$ bilde man die Reißverschlußfolge (vgl. 2.3.17)

$$c_n := \begin{cases} a_k & \text{für } n = 2k, \\ b_k & \text{für } n = 2k-1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Dann sind $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$ Teilfolgen von $(c_n)_n$:

$$(a_k)_k = (c_{2k})_k \quad \text{und} \quad (b_k)_k = (c_{2k-1})_k.$$

3. Die divergente Folge $a_n := (-1)^n$, $(n\in\mathbb{N})$ hat konvergente Teilfolgen $(a_{2k})_k$ und $(a_{2k-1})_k$.

Als Spezialfall von Satz 2.3.29 erhalten wir unmittelbar:

Bemerkung 2.7.3 (Teilfolgen konvergenter Folgen)

Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

Beispiele 2.7.4 Gegeben sei die Folge

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} := 0,\ \underbrace{0, \frac{1}{2}},\ \underbrace{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}},\ \underbrace{0, \frac{1}{8}, \dots, \frac{7}{8}},\ 0, \frac{1}{16}, \dots$$

Zn jeder reellen Zahl $x \in [0,1]$ gibt es eine monoton wachsende Teilfolge $(a_{n_k})_k$, die gegen x konvergiert.

Beweis.Für $k \in \mathbb{N}_0$ setze man:

$$l_k = \max\{l \mid l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\},\ \frac{l}{2^k} \leqslant x\},$$

dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{2^k + l_k} = x.$$

Satz 2.7.5 (von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

Bolzano, Bernard, (1781-1848), Buch: Paradoxien des Unendlichen (1851).

Weierstrass, Karl (1815-1897).

Zum Beweis zeigen wir ein Lemma:

Lemma 2.7.6 (Existenz monotoner Teilfolgen)
Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.

Beweis des Lemmas. Für diesen Beweis verwenden wir die folgende Bezeichnung:

Eine $m \in \mathbb{N}$ heiße eine **Spitze** *der Folge $(a_n)_n$, wenn für alle $n > m$ das Glied $a_m > a_n$ ist.*

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Es gibt nur endlich viele Spitzen: Es sei $m \in \mathbb{N}$ die größte Spitze. Wir konstrieren rekursiv eine monoton wachsende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$:

Startwert: $n_1 = m + 1$.

Rekursion: Es seien $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ bereits konstruiert, so daß $a_{n_1} \leqslant a_{n_2} \leqslant \cdots \leqslant a_{n_k}$ ist. Da n_k keine Spitze ist, gibt es ein $l > n_k$ mit $a_l \geqslant a_{n_k}$. Man setze (vgl. Satz 1.2.20Wohlordnung der nat"urlichen ZahlenSATZ.1.2.20)

$$n_{k+1} := \min\{l \mid l \in \mathbb{N},\, l > n_k,\, a_l \geqslant a_{n_k}\}.$$

Es gibt unendlich viele Spitzen: Wir numerieren die Spitzen durch und erhalten eine streng monoton fallende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$:

Startwert: $n_1 := \min\{l \mid l \in \mathbb{N},\, l$ Spitze$\}$.

Rekursion: Es seien $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ bereits konstruiert, so daß $a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots > a_{n_k}$ ist. Dann gibt es eine Spitze $l \in \mathbb{N}$ mit $l > n_k$. Man setze (vgl. Satz 1.2.20Wohlordnung der nat"urlichen ZahlenSATZ.1.2.20)

$$n_{k+1} := \min\{l \mid l \in \mathbb{N},\, l > n_k,\, l \text{ Spitze}\}.$$

Da alle n_k Spitzen sind ist $a_{n_1} > a_{n_2} > \dots$.

Beweis (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Da nach Satz 2.2.12 jede beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergent ist, folgt der Satz unmittelbar aus Lemma 2.7.6.

Man kann die *großen* Sätze des Abschnittes 2.6 über stetige Funktionen auf kompakten Intervallen auch mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß beweisen.

Beispiele 2.7.7 Wir führen dies am Satz 2.6.9 (Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit) vor:

Beweis (Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit).

Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ in I so, daß

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Es existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Da I kompakt ist, liegt $c := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ in I. Da $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$ ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

Da f stetig ist, folgt ein Widerspruch:

$$0 = |f(c) - f(c)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

2.7.2 Häufungswerte von Folgen

Definition 2.7.8 *Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt ein Häufungswert der Folge $(a_n)_n$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_n$ gibt, die gegen h konvergiert.*

Beispiel.

1. Die Folge $((-1)^n)_n$ hat die Häufungswerte 1 und -1.
2. Für die Folge im Beispiel 2.7.4 ist die Menge der Häufungswerte das Intervall $[0, 1]$.

Bemerkung 2.7.9 (Existenz von Häufungswerten)

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat jede beschränkte Folge mindestens einen Häufungswert.

Bemerkung. Für eine konvergente Folge ist der Grenzwert der einzige Häufungswert. Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 2.7.10 *Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen Häufungswert hat.*

Korollar 2.7.11 *Eine beschränkte Folge konvergiert genau dann gegen einen $c \in \mathbb{R}$, wenn jede ihrer Teilfolgen eine Teilfolge hat, die gegen c konvergiert.*

Beweis des Satzes 2.7.10.

$\boxed{\Rightarrow:}$ Klar.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Die Folge $(a_n)_n$ sei beschränkt und habe genau einen Häufungswert $c \in \mathbb{R}$.

Annahme: Die Folge konvergiert nicht gegen c. Es gibt also es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, existiert, für das $|a_n - c| \geqslant \varepsilon_0$ ist.

Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$, so daß (vgl. 2.1.20 (3.))

$$|a_{n_k} - c| \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge $(a_{n_k})_k$ beschränkt ist, hat sie eine konvergente Teilfolge, die einen anderen Grenzwert als c hat.

Beweis des Korollars 2.7.11.

Aus der Vorausetzung des Korollars erhält man, daß jede konvergente Teilfolge der gegebenen Folge gegen c konvergiert.

2.7.3 Limes superior

Bemerkung. Zu jeder Folge reeller Zahlen kann man den **Limes superior** oder oberen Grenzwert und den **Limes inferior** oder unterne Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ bilden.

Diese beiden Begriffe bilden ein mächtiges Hilfsmittel, um viele Konvergenzaussagen kurz und knapp zu formulieren und auch zu beweisen. Es erfordert aber einige Übung, bis man mit diesem Werkzeug umgehen kann.

In der Lehrbuchliteratur wird der Limes superior bzw. inferior unterschiedlich eingeführt. Diese Definitionen sind alle äquivalent.

Wir wählen eine eher technische, dafür aber leicht anwendbare Definition, und leiten dann die dazu äquivalenten, anschaulicheren Eigenschaften her. 2.7.13(2), 2.7.16 und 2.7.21.

Zu einer nach oben beschränkten Folge $(a_n)_n$ bilde man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $s_n := \sup\limits_{k \geqslant n} a_k$. Die Folge $(s_n)_n$ ist monoton fallend.

Definition 2.7.12 (Limes superior)

Es sei (a_n) eine nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Man bilde die monoton fallendende Folge $(s_n)_n$ durch die Vorschrift:

$$s_n := \sup_{k \geqslant n} a_k.$$

Der in $\overline{\mathbb{R}}$ gebildete Grenzwert (vgl. Satz 2.2.12 und Def. 2.1.22)

$$s := \lim_{n \to \infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

*heißt **Limes superior** der Folge $(a_n)_n$ und wird mit*

$$\limsup_{n \to \infty} a_n := s$$

bezeichnet.

Bemerkung und Bezeichnung 2.7.13

1. Eine andere übliche Bezeichnung ist

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n := \limsup_{n \to \infty} a_n.$$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ nennen wir die Teilfolge $(a_k)_{k=n}^{\infty}$ ein Endstück der Folge $(a_n)_n$. Der Limes superior ist also das Infimum der Suprema der Endstücke:

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \inf\{c \mid c \in \mathbb{R},\ c \geqslant a_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.\}$$

3. Man kann sich überlegen, daß die Folge $(s_n)_n$ die kleinste monoton fallende Folge oberhalb der gegebenen Folge $(a_n)_n$ ist. Wir beweisen dies nicht explizit, diese Idee steckt habe hinter vielen Beweisen zu den Eigenschaften des Limes superior.

Bemerkung. Analog bildet man den Grenzwert der Infima der Endstücke und nennt ihn den Limes inferior der Folge.

Definition 2.7.14 (Limes inferior)
Es sei (a_n) eine nach unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Man bilde die monoton wachsende Folge

$$u_n := \inf\{a_k \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n\}.$$

Der in $\overline{\mathbb{R}}$ gebildete Grenzwert (vgl. Satz 2.2.12 und Def. 2.1.22)

$$u := \lim_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

heißt ***Limes inferior*** *der Folge $(a_n)_n$ und wird mit*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := u$$

bezeichnet.

Bemerkung 2.7.15 Es gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$

Für den Limes superior gibt es das folgende ε-Kriterium:

Feststellung 2.7.16 *Es seien (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $s = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ aus $m \geqslant n$ stets folgt:*
   (i) $a_m < s + \varepsilon$
   (ii) *Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant m$, mit $a_k > s - \varepsilon$.*

Bemerkung Verschärft man 2.(ii) zu

$$a_m > s - \varepsilon \quad \text{für alle } m > n,$$

so erhält man die übliche Definition des Grenzwertes einer Folge $(a_n)_n$.

Beweis.

$\boxed{\mathbf{1{\Rightarrow}2:}}$ Es ist $s_n := \sup\limits_{k \geqslant n} a_k$ und $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s \leqslant s_l < s + \varepsilon$ für alle $l \geqslant n$. Für $m \geqslant n$ folgt

$$a_m \leqslant s_n < s + \varepsilon.$$

Da $s \leqslant s_m := \sup\limits_{k \geqslant m} a_k$ ist, gibt es ein $k \geqslant m$ so, daß $s - \varepsilon < a_k$ ist.

$\boxed{\mathbf{2{\Rightarrow}1:}}$ Aus (i) folgt:

$$\sup_{k \geqslant m} a_k \leqslant s + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant s + \varepsilon.$$

Aus (ii) folgt:

$$\sup_{k \geqslant m} a_k \geqslant s - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \geqslant s - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

Bemerkung Für beschränkte Folge reeller Zahlen liegen der Limes superior und der Limes inferior in $\mathbb{R}$. Man kann mit ihrer Hilfe Aussagen über beliebige beschränkte Folgen formulieren:

Satz 2.7.17 *Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$
2. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *existiert.*

Im Fall der Gleichheit (2.) *ist*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis.

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $u_n := \inf\limits_{k \geqslant n} a_k \leqslant \sup\limits_{k \geqslant n} a_n =: s_n$ und folglich

$$\liminf_{k\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n = \limsup_{k\to\infty} a_n$$

2. $\boxed{\Rightarrow:}$ Für $n \in \mathbb{N}$ ist $u_n := \inf\limits_{k \geqslant n} a_k \leqslant a_n \leqslant \sup\limits_{k \geqslant n} a_n =: s_n$. Daher gilt:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ Es gelte $a_n \to c \in \mathbb{R}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$c - \varepsilon < a_m < c + \varepsilon \quad \text{für alle } m \geqslant n,\ m \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $c - \varepsilon \leqslant u_m \leqslant s_m \leqslant c + \varepsilon$ für alle $m \geqslant n$ und folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = c$.

Bezeichnung 2.7.18
Für eine nach **oben unbeschränkte** Folge setzt man

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty.$$

Für eine nach **unten unbeschränkte** Folge setzt man

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty.$$

Bemerkung. Für jede Folge $(a_n)_n$ gilt also

1. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n| := \infty \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)_n$ ist unbeschränkt.

Bemerkung 2.7.19 Es sei (a_n) eine nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Dann gilt auch $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Aus Satz 2.7.17 und Bemerkung 2.7.19 folgt:

Feststellung 2.7.20 *Für jede Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ gilt:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}} \text{ existiert.}$$

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Beweis der Bemerkung 2.7.19.

$\boxed{\Rightarrow:}$ Da

$$a_n \leqslant \sup_{k\geqslant n} a_k = s_n$$

ist, folgt aus $s_n \to -\infty$, daß $a_n \to -\infty$.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Wenn $a_n \to -\infty$, dann gibt es zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ aus $m \geqslant n$ stets

$$a_m < -K$$

folgt. Also ist für $m \geqslant n$ stets

$$s_m := \sup_{k\geqslant m} a_k \leqslant -K$$

und folglich $s_n \to -\infty$.

Satz 2.7.21 (Obere Häufungswert)
Es sei (a_n) eine nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.
Wenn $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n > -\infty$ ist, dann ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ der größte Häufungswert der Folge $(a_n)_n$.

Bemerkung. Dieser Satz wird in vielen Lehrbüchern als Definition des Limes Superior verwendet:

1. *Wenn eine nach oben beschränkte Folge $(a_n)_n$ einen Häufungswert hat, dann hat sie einen größten Häufungswert und dieser ist gleich $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.*
2. Der obige Satz gibt eine Verschärfung des Satzes von Bolzano-Weierstraß: *Eine nach **oben** beschränkte Folge $(a_n)_n$ strebt entweder gegen $-\infty$ oder sie enthält eine Teilfolge, die gegen den größten Häufungswert der Folge $(a_n)_n$ konvergiert.*

Beweis.1. Man setze $s_n := \sup\limits_{k\geqslant n}\{a_k\}$. Es sei $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n > -\infty$. Wir bilden rekursiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit folgender Eigenschaft:

$$s_{n_k+1} - \frac{1}{n_k+1} < a_{n_{k+1}} \leqslant s_{n_k+1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0. \qquad (\star)$$

$\boxed{\textbf{Startwert:}}$ Es sei $n_0 = 0$.

$\boxed{\textbf{Rekursion:}}$ Es seien bereits $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ in $\mathbb{N}$ so konstruiert, daß $(\star)$ für $\kappa = 0, \ldots, k-1$ gilt. Nach Definition von s_{n_k} gibt es ein kleinste natürliche Zahl $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} \geqslant n_k + 1$, so daß $(\star)$ für k gilt.

Da $\frac{1}{n_k} \to 0$, konvergiert die Teilfolge $(a_{n_k})_k$ gegen $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

2. Wenn $(a_{n_k})_k$ eine konvergente Teilfolge ist, so gilt

$$a_{n_k} \leqslant \sup_{m>n_k} a_m = s_{n_k}.$$

Feststellung 2.7.22 (Limes superior ist subadditiv)
Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ nach oben beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ und $c > 0$. Dann gilt:

1. $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. $\limsup\limits_{n\to\infty}(c\, a_n) = c \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.8 Gleichmäßige Konvergenz

2.8.1 Funktionenfolgen

Bezeichnung 2.8.1 (Menge von Funktionen)
Für eine Menge M bezeichne $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen von M nach $\mathbb{R}$.

Definition 2.8.2 (Folge von Funktionen)
Eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(M)$$

heißt ***Folge von Funktionen*** *oder Funktionenfolge.*

Die Abbildungswerte $f_n := f(n)$ heißen Folgenglieder, und man schreibt

$$(f_n)_n = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} := f.$$

Bemerkung. Wenn $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{F}(M)$ ist, so bilden für jedes $x \in M$ die Funktionswerte eine Folge $(f_n(x))_n$ reeller Zahlen.

Definition 2.8.3 (Punktweise Konvergenze)
Eine Funktionenfolge (f_n) in $\mathcal{F}(M)$ ***konvergiert punktweise*** *auf M gegen $f \in \mathcal{F}(M)$, falls für alle $x \in M$*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Das heißt:

$$\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \quad : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Bemerkung. Wenn eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ für alle $x \in M$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ hat, so definiert dies eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen f.

Beispiele 2.8.4 Man zeichne die Graphen der folgenden Funktionen:

1. Für die Folge $(f_n)_n$ von Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit $f_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1), \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

2. Für die Folge $(g_n)_n$ mit $g_n(x) := \dfrac{nx}{1+n|x|}$, $(x \in \mathbb{R})$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

3. $h_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2 - nx & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{für } x \in (\frac{2}{n}, 1]. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0.$

Bemerkung. Es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften der Glieder einer konvergenten Funktionenfolge sich auf die Grenzfunktion übertragen.

Die Beispiele (1.) und (2.) zeigen, daß bei punktweiser Konvergenz die Stetigkeit sich nicht auf die Grenzfunktion vererbt.

Wir müssen den Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen verschärfen, um aus Eigenschaften der Folgenglieder auf entsprechende Eigenschaften der Grenzfunktion schließen zu können.

Im Beispiel (3.) konvergiert die Folge $(h_n)_n$ zwar punktweise gegen die konstante Funktion 0, aber die h_n sind offensichtlich keine gute Approximation der Grenzfunktion.

Noch krasser ist das Beispiel $d_n(x) := n\, h_n(x)$.

Definition 2.8.5 (Gleichmäßige Konvergenz)
Eine Funktionenfolge (f_n) in $\mathcal{F}(M)$ ***konvergiert gleichmäßig*** *auf M gegen eine Grenzfunktion $f \in \mathcal{F}(M)$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in M$ aus $n \geqslant n_0$ stets*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

folgt. In Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \; \forall x \in M \; : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Bemerkung Man vergleiche dies mit der punktweisen Konvergenz:

$$\forall x \in M \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \; : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Satz 2.8.6 (Stetigkeit der Grenzfunktion)
Für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ konvergiere die Funktionenfolge (f_n) in $\mathcal{F}(I)$ gleichmäßig auf I gegen $f \in \mathcal{F}(I)$. Sind alle f_n in einem Punkt $a \in I$ stetig, so gilt dies auch für die Grenzfunktion f.

Bemerkung. Der Satz gilt entsprechend auch für die rechts- bzw. linksseitige Stetigkeit in x_0.

Beweis (Stetigkeit der Grenzfunktion).

Es sei $\varepsilon > 0$. Da die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geqslant n_0$ und für alle $x \in M$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist. Da f_{n_0} in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x \in M$ aus $|x - x_0| < \delta$ stets

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$$

folgt. Dann gilt für $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(x_0)| \\
&\quad = |f(x) - f_{n_0}(x) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\
&\quad \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\
&\quad < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Bezeichnung 2.8.7 Die Menge der beschränkten Funktionen auf einer Menge M wird mit

$$\mathcal{B}(M) := \{f \in \mathcal{F}(M) \mid f \text{ beschränkt}\}$$

bezeichnet

Definition 2.8.8 (Norm einer Funktion)

*Es sei M eine Menge. Die **Norm** einer beschränkten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ wird definiert durch*

$$\|f\| := \sup_{x \in M} |f(x)| := \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}.$$

Feststellung 2.8.9 *Die Norm*

$$\|.\| : \mathcal{B}(M) \to \mathbb{R}$$

hat die folgenden Eigenschaften:

Für $f,\ g \in \mathcal{B}(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\|f\| \geqslant 0$, *und* $\|f\| = 0$ *genau dann, wenn* $f = 0$,

2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$,
3. $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$,
4. $\|f \cdot g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$.

Feststellung 2.8.10 *Es sei $f \in \mathcal{F}(M)$. Eine Funktionenfolge (f_n) in $\mathcal{F}(M)$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Beweis.

$\boxed{\Rightarrow:}$ Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere gleichmäßig gegen f. Es gibt also zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

Nach Definition der Norm folgt für alle $n \geqslant n_0$:

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß aus $n \geqslant n_0$ stets $\|f_n - f\| < \varepsilon$ folgt. Also gilt für $n \geqslant n_0$ und alle $x \in M$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Satz 2.8.11 ***Cauchykriterium:***
Eine Funktionenfolge (f_n) in $\mathcal{F}(M)$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf M, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geqslant n_0 \; : \; \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Beweis.

$\boxed{\Rightarrow:}$ Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere gleichmäßig gegen f. Es gibt also zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } n \geqslant n_0.$$

Nach Definition der Norm folgt für alle n, $m \geqslant n_0$:

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$
$$\|f_n - f_m\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f - f_m\| \leqslant 2\,\varepsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ Wenn $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ für alle m, $n \geqslant n_0$ ist, dann folgt für alle $x \in M$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Daher ist $(f_n(x))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und es gibt eine Grenzfunktion $f \in \mathcal{F}(M)$. Nun folgt für $n \geqslant n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

2.8.2 Regelfunktionen

Wir stellen für die Integrationstheorie eine Klasse von reellen Funktionen bereit, die sogenannten **Regelfunktionen**.

Zu den Regelfunktionen gehören die *Treppenfunktionen* und die *stückweise stetigen Funktionen*:

Definition 2.8.12 (Treppenfunktion)

Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt eine ***Treppenfunktion****, wenn es endlich viele Punkte $a = c_0 < c_1, \cdots < c_k = b$ so gibt, daß für $\kappa = 1, \ldots, k$ die Einschränkung $f|_{(c_{\kappa-1}, c_\kappa)}$ konstant ist.*

Bemerkung. Die Treppenfunktion f ist also auf den offenenen Intervallen $(c_{\kappa-1}, c_\kappa)$ konstant. Die Werte in den Teilpunkten c_κ unterliegen keiner Beschränkung.

Definition 2.8.13 (Stückweise stetige Funktion)

Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt ***stückweise stetig****, wenn es endlich viele Punkte $a = c_0 < c_1, \cdots < c_k = b$ so gibt, daß für $\kappa = 1, \ldots, k$ die Einschränkung $f|_{(c_{\kappa-1}, c_\kappa)}$ stetig ist und in den Endpunkten einseitige Grenzwerte in $\mathbb{R}$:*

$$f(c_{\kappa-1}^+) = \lim_{x\downarrow c_{\kappa-1}} f(x) \quad \textit{bzw.} \quad f(c_\kappa^-) = \lim_{x\uparrow c_\kappa} f(x)$$

hat.

Bemerkung. Die stückweise stetige Funktion f ist also auf den offenenen Intervallen $(c_{\kappa-1}, c_\kappa)$ stetig und hat eine stetige Fortsetzung auf die abgeschlossenen Intervalle $[c_{\kappa-1}, c_\kappa]$.

Es gibt keine Vorschrift für die Werte in den Teilpunkten c_κ.

Eine stückweise stetige Funktion ist beschränkt.

Definition 2.8.14 (Regelfunktion)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Anfangpunkt $a \in \overline{\mathbb{R}}$ und Endpunkt $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Eine Funktione $f : I \to \mathbb{R}$ heißt eine ***Regelfunktion****, wenn folgendes gilt:*

1. *Für jeden inneren Punkt $x \in (a, b)$ existieren in $\mathbb{R}$ der linksseitige Grenzwert $f(x^+)$ und der rechsseitige Grenzwert $f(x^-)$.*
2. *Wenn der Anfangspunkt $a \in I$ liegt, so existiert der rechtseitige Grenzwert $f(a^+) \in \mathbb{R}$.*
3. *Wenn der Endpunkt $b \in I$ liegt, so existiert der linksseitige Grenzwert $f(b^-) \in \ R$.*

Die Menge der Regelfunktionen auf I wird mit $\mathcal{R}(I) = \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ bezeichnet.

Bemerkung Die Definition der Regelfunktion macht keine Vorschrift über die Lage von $f(x)$ zu den einseitigen Grenzwerten $f(x^+)$ und $f(x^-)$ im selben Punkt.

Beispiele 2.8.15 (Regelfunktionen)

Beispiele von Regelfunktionen sind:

1. Treppenfunktionen (vgl. Definition 2.8.12),
2. stückweise stetige Funktionen (vgl Definition 2.8.13),
3. monotone Funktionen (vgl. Beispiel 2.3.30 (3.)) ,
4. Maximum, Summe, Produkt, und Quotient von Regelfunktionen:

   Die Rechenregeln 2.3.24 für stetige Funktionen gelten sinngemäß für Regelfunktionen.
5. die Stammbrüche-Funktion (vgl. Beispiel 2.3.33)

   Dagegen ist die Wackelfunktion (vgl. Beispiel 2.3.30 (5.)) keine Regelfunktion, da für die Wackelfunktion in $x = 0$ die einseitigen Grenzwerte nicht existieren.

Feststellung 2.8.16 (Grenzwert von Regelfunktionen) *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_n$ eine Folge von Regelfunktionen auf I , die gleichmäßig auf I gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert.*

Dann ist die Grenzfunktion f eine Regelfunktion.

Beweis. Die Feststellung folgt unmittelbar aus Satz 2.8.6

Satz 2.8.17 (Approximation für Regelfunktionen)
Es sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *f ist eine Regelfunktion.*
2. *Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen $t_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ die gleichmäßig gegen f konvergiert:*
$$\|t_n - f\| \to 0.$$

Korollar 2.8.18 (Beschränktheit von Regelfunktionen) *Eine Regelfunktion auf einem kompakten Intervall ist beschränkt.*

Übungsaufgabe. Man beweise die Ausage des des Korollars unabhängig, indem man die Beweismethode des Lemmas 2.6.2 anpaßt. Man vgl. dazu auch den Beweis von Satz 2.6.9.

Beweis. $\boxed{\mathbf{2 \Rightarrow 1:}}$ Klar nach Feststellung 2.8.16

$\boxed{\mathbf{1 \Rightarrow 2:}}$ Zu $n \in \mathbb{N}$ bilde man die Menge

$$A_n := \{c \in [a,b] \mid \text{ex. Treppenfunktion } t : [a,c] \to \mathbb{R} \text{ mit } |t(x) - f(x)| < \tfrac{1}{n} \text{ für } x \in [a,c] \ \} \ .$$

Behauptung: $a \in A_n$ und $x_0 := \sup A_n \in A_n$.

Es ist $a \in A_n$. Sei also $a < x_0$. Da f Regelfunktion und $x_0 = \sup A_n$ ist, gibt es $c \in A_n$ mit $a \leqslant c < x_0$, so daß

$$|f(x) - f(x_0^-)| < \tfrac{1}{n} \quad \text{für } c < x < x_0.$$

Man wähle eine Treppenfunktion $t : [a,c] \to \mathbb{R}$ und setze t zu einer Treppenfunktion $\tilde{t} : [a,x_0] \to \mathbb{R}$ fort:

$$\tilde{t}(x) := \begin{cases} t(x) & \text{für } x \in [a,c], \\ f(x_0^-) & \text{für } x \in (c,x_0), \\ f(x_0) & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

Dann gilt $|t(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ für $x \in [a,x_0]$. Also $x_0 \in A_n$.

Annahme: $x_0 := \max A_n < b$.

Da f Regelfuntion ist, gibt es $d \in [a,b]$ mit $x_0 < d$ so, daß

$$|f(x) - f(x_0^+)| < \frac{1}{n} \quad \text{für } x \in (x_0,d].$$

Man wähle eine Treppenfunktion $t : [a,x_0] \to \mathbb{R}$ und setze t auf $[a,d]$ fort:

$$\tilde{t}(x) := \begin{cases} t(x) & \text{für } x \in [a,x_0], \\ f(x_0^+) & \text{für } x \in (x_0,d]. \end{cases}$$

Dann gilt $|t(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ für $x \in [a,d]$. Also ist $d \in A_n$ im Widerspruch zur Annahme.

Also ist $A_n = [a, b]$ und es gibt eine Treppenfunktion $t_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $|t_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ für $x \in [a, b]$.

Die Folge $(t_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f.

Bemerkung 2.8.19 (zur Beweismethode von Satz 2.8.17) Die Beweismethode des Approximationssatzes wird haüfiger verwendet. Man spricht von einem **Zusammenhangs-Schluß**:

Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und E eine Eigenschaft, die ein Teilintervall $[c, d] \subset [a, b]$ haben kann. Es gelte:
Aus $[c, d]$ und $(d, e]$ haben E, folgt $[c, e]$ hat E.

Man bilde dann $A := \{c \mid c \in [a, b],\ [a, c] \text{ hat Eigenschaft } E\}$. und zeige:

1. *$a \in A$.*
2. *$\sup A \in A$, d.h. $\max A$ existiert.*
3. *Wenn $c \in A$ und $c \neq b$, so gibt es ein $d \in (c, b]$ mit $d \in A$.*

Dann hat $[a, b]$ die Eigenschaft E.

Korollar 2.8.20 (Monotone Aproximation)
Es seien $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

1. *Es gibt eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f konvergiert.*
2. *Wenn $f \geqslant 0$ ist, gibt es eine monoton wachsende Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen, die gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f konvergiert.*

Bemerkung Analog zu 2.8.20 (1.) gibt es eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis.

1. Es sei $(t_n)_n$ eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Man bilde zunächst die Treppenfunktion
$$u_n := t_n - \|t_n - f\|.$$
Dann gilt $u_n \leqslant f$ und $\|u_n - f\| \leqslant 2\|t_n - f\| \to 0$.
Für die Treppenfunktionen
$$v_n := \max(u_1, \ldots, u_n)$$
gilt dann
$$u_n \leqslant v_n \leqslant f \quad \text{und} \quad \|v_n - f\| \leqslant \|u_n - f\| \to 0.$$

2. Wenn $f \geqslant 0$ so bilde man zunächst die Folge $(v_n)_n$ wie in (1.). Dann leistet $w_n := \max(v_n, 0)$ das Gewünschte.

Bemerkung 2.8.21 Es seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens endlich viele Punkte $\{x_1, \ldots, x_{k_n}\}$ in denen

$$|f(x_\kappa^-) - f(x_\kappa^+)| \geqslant \frac{1}{n}$$

ist.

Feststellung 2.8.22 *Eine Regelfunktion hat also höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

Beweis. Es gibt eine Treppenfunktion $t_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$|t_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2n} \quad \text{für } x \in [a, b].$$

In allen Stetigkeitstellen x von t_n ist dann

$$|f(x^-) - f(x^+)| \leqslant |f(x^-) - t(x)| + |t(x) - f(x^+)| < \frac{1}{n}.$$

Literatur

[BRÖCKER] BRÖCKER, Theodor: *Analysis1 (2. Auflage) 1995* Spektrum, Akad. Verl.

[DIEUDONNÉ] DIEUDONNÉ, J.: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press 1960. Deutsche Übersetzung: *Grundzüge der modernen Analysis* Vieweg 1981

[FORSTER] FORSTER, Otto: *Analysis 1 (4. Auflage)* Vieweg 1983

[KABALLO] KABALLO, Winfried: *Einführung in die Analysis I (2. Auflage)* Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg Berlin

[KÖNIGSBERGER] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis I (2. Auflage)* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

[LANDAU] LANDAU, Edmund: Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen) Leipzig 1930, dritte Auflage: New York 1960.

[VAN DER WAERDEN] VAN DER WAERDEN, B. L.: Algebra (Band I) 7. Auflage: Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1966.