Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. G. Wittstock

Nachklausur Analysis I
Wintersemester 2000/2001

Für jede der folgenden 7 Aufgaben gibt es 10 Punkte;
mit 27 Punkten haben Sie bestanden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

a) Für eine reelle Zahl x und eine natürliche Zahl k definiert man

$$\binom{x}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{x-j+1}{j}.$$

Rechnen Sie unter Verwendung des Produktzeichens nach:

i) Für $x \in \mathbb{N}$ stimmt diese Definition mit der bekannten Definition des Binomialkoeffizienten überein.

ii) Es gilt

$$\binom{x+1}{k+1} = \binom{x}{k+1} + \binom{x}{k}.$$

b) Zeigen Sie:

$$2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 4^n.$$

Hinweis: Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz und $0 = 1 - 1$.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{(-1)^{5n} n^{123} - 2^{n^2}}{n!5^n - n^n}.$$

b) Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$

$$2k \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{\frac{n-1}{2}} + 1\right).$$

c) i) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die gegen 1 konvergiert und für die kein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß stets $a_n \geq 1$ ist für alle $n \geq n_0$ und für die kein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß stets $a_n \leq 1$ ist für alle $n \geq n_0$.

ii) Zeigen Sie: Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaften aus i) hat, dann hat auch $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ diese Eigenschaften.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie Infimum und Supremum; entscheiden Sie ob ein Minimum oder Maximum vorliegt:

i) $M := \{ \quad x \in \mathbb{R} \quad | \quad x^2 - 2 < 0 \quad \vee \quad (x-2)^2 \leq 0 \quad \}$

ii) $f : [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases}$

b) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \frac{n + (-1)^n}{n^2}$$

und die Menge $N := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

i) Bestimmen Sie $\liminf a_n$ und $\limsup a_n$.

ii) Bestimmen Sie Infimum und Supremum von N; entscheiden Sie ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie (auf zwei Arten) eine Stammfunktion zu

$$\int (\ln(x))^2 \, dx \; :$$

i) Erstens: indem Sie zuerst substituieren.

ii) Zweitens: indem sie gleich partiell integrieren.

b) Bestimmen Sie $z \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\int_1^{e^{\sqrt{2}}} \frac{\ln(x)}{x} \, dx = \frac{1}{4} \int_1^{e^z} \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}} \, dy$$

Wieviele solcher $z \in \mathbb{R}$ gibt es?

Aufgabe 5: Welche der folgenden drei Aussagen sind wahr bzw. falsch? Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, so daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist und$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

b) Zu zwei Mengen $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq N \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir das punktweise Produkt

$$M \cdot N := \{xy \in \mathbb{R} \mid x \in M,\ y \in N\}.$$

Seien nun $M,\ N \subseteq \mathbb{R}^+$ Mengen positiver Zahlen. Dann gilt

$$\inf(M \cdot N) = \inf(M) \cdot \inf(N).$$

c) Sei I ein offenes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ unstetig für alle $x \in I$. Dann existiert mindestens ein $x_0 \in I$, so daß $f + g : I \to \mathbb{R}$ unstetig in x_0 ist.

Aufgabe 6: Seien $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x_1$ und $a,\ b \in (0, +\infty)$ und

$$f,\ g : [x_0, x_1] \to (0, +\infty)$$

stetige Abbildungen, so daß für $x \in [x_0, x_1]$ gilt:

$$f(x) \leq a + b \int_{x_0}^{x} f(t)g(t)dt.$$

a) Betrachten Sie

$$h(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)g(t)dt$$

und zeigen Sie, daß für alle $x \in [x_0, x_1]$ gilt:

$$h'(x) \leq g(x)\left(a + bh(x)\right).$$

b) Zeigen Sie (unter Verwendung von a)), daß für alle $x \in [x_0, x_1]$ gilt:

$$f(x) \leq a \exp\left(b \int_{x_0}^{x} g(t)dt\right).$$

Aufgabe 7: Untersuchen Sie folgende Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

a) $2x\sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ b) $x + \sqrt[3]{2x}$ auf $[0, \infty)$