Was sind Operatorräume ?

Arbeitsgruppe Operatorräume
G. Wittstock
Universität des Saarlandes

7. September 1999

Inhaltsverzeichnis

1 Geschichte

Die Theorie der Operatorräume entwickelte sich aus der Untersuchung von vollständig positiven und vollständig beschränkten Abbildungen. Diese Abbildungen wurden zunächst auf C^*-Algebren untersucht, später dann auf geeigneten Unterräumen von C^*-Algebren. Für solche Abbildungen mit Werten in $B(\mathcal{H})$ wurden Darstellungs- und Fortsetzungssätze bewiesen [Sti55], [Arv69], [Haa80], [Wit81], [Pau82]. Viele Eigenschaften vollständig positiver Abbildungen lassen sich auf Operatorsysteme übertragen [CE77]. Operatorsysteme bieten eine abstrakte Beschreibung der Ordnungsstruktur von selbstadjungierten, unitalen Unterräumen von C^*-Algebren. In Paulsens Monographie [Pau86] werden viele Anwendungen vollständig beschränkter Abbildungen auf die Operatorentheorie zusammengefaßt. Die Fortsetzungs- und Darstellungssätze für vollständig beschränkte Abbildungen zeigen, daß Unterräume von C^*-Algebren eine innere metrische Struktur tragen, die unter vollständigen Isometrien erhalten bleibt. Diese Struktur wurde in der Form des Operratorraumes von Ruan axiomatisch gefaßt [Rua88]. Ganz wie die Theorie der C^*-Algebren als nichtkommutative Topologie, die Theorie der von Neumann-Algebren als nichtkommutative Maßtheorie betrachtet werden kann, so läßt sich die Theorie der Operatorräume als nichtkommutative Funktionalanalysis auffassen.

Dieses Programm wurde im Rahmen des ICM 1986 von E.G. Effros [Eff87] der mathematischen Öffentlichkeit präsentiert. Die Entwicklung der Theorie läßt sich an den folgenden Übersichtsartikeln nachzeichnen: [CS89], [MP94], [Pis97].

2 Operatorräume und vollständig beschränkte Abbildungen

2.1 Grundbegriffe

Ein **matrixnormierter Raum** ist ein Vektorraum X, versehen mit einer Norm auf jeder Matrizenstufe $M_n(X) = M_n \otimes X$, so daß gilt:

$$\begin{array}{rl}\text{(R1)} & \|\alpha x\beta\| \leq \|\alpha\|\|x\|\|\beta\| \text{ für alle } x \in M_n(X),\ \alpha \in M_{m,n},\ \beta \in M_{n,m} \\ \text{(R2)} & \|x \oplus y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \text{ für alle } x \in M_n(X),\ y \in M_m(X).\end{array}$$[1]

Eine solche Familie von Normen heißt **Operatorraumnorm**. Ist für ein n (und damit für alle) $M_n(X)$, versehen mit dieser Norm, vollständig, so heißt X ein **Operatorraum**[2]([Rua88], vgl. auch [Wit84a]).

[1] Folgende zwei schwächere Axiomatisierungen sind zu dieser äquivalent:

$$\begin{array}{c}\|\alpha x\beta\| \leq \|\alpha\|\|x\|\|\beta\| \text{ für alle } x \in M_n(X),\ \alpha \in M_n,\ \beta \in M_n, \\ \|x \oplus y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \text{ für alle } x \in M_n(X),\ y \in M_m(X),\end{array}$$

wie in der Literatur häufig gefordert wird, sowie

$$\begin{array}{c}\|\alpha x\beta\| \leq \|\alpha\|\|x\|\|\beta\| \text{ für alle } x \in M_n(X),\ \alpha \in M_{m,n},\ \beta \in M_{n,m}, \\ \|x \oplus y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\} \text{ für alle } x \in M_n(X),\ y \in M_m(X),\end{array}$$

was in der Konvexitätstheorie gewisse Vorteile bietet.

[2] Die Begriffe *matrixnormierter Raum* und *Operatorraum* werden in der Literatur zum Teil anders und nicht ganz einheitlich verwandt. Wir schlagen die hier erstmals so gebrauchte Terminologie vor in Analogie zu *normierter Raum* und *Banachraum*.

Ist X ein matrixnormierter Raum (Operatorraum), so sind die Räume $M_n(X)$ normierte Räume (Banachräume). Diese nennt man die **Stufen**, genauer die **Matrizenstufen** von X (**erste Stufe** oder **Grundstufe**, **zweite Stufe**...).[3]

Die Operatorraumnormen auf einem festen Vektorraum X sind durch die punktweise Ordnung auf allen Matrizenstufen geordnet. Man sagt, eine größere Operatorraumnorm **dominiere** eine kleinere.

Eine lineare Abbildung Φ zwischen Operatorräumen X und Y induziert eine lineare Abbildung $\Phi^{(n)} = \mathrm{id}_{M_n} \otimes \Phi$, genauer:

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{(n)} : M_n(X) & \to & M_n(Y) \\ [x_{ij}] & \mapsto & [\Phi(x_{ij})] \, , \end{array}$$

die n-te **Amplifikation** von Φ. Φ heißt **vollständig beschränkt**, falls

$$\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} := \sup \left\{ \|\Phi^{(n)}\| \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} < \infty,$$

vollständig kontrahierend, falls $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} \leq 1$ und **vollständig isometrisch**, falls alle $\Phi^{(n)}$ isometrisch sind.[4] Φ heißt **vollständige Quotientenabbildung**, falls alle $\Phi^{(n)}$ Quotientenabbildungen sind.[5] Die Menge aller vollständig beschränkten Abbildungen von X nach Y bezeichnet man mit $CB(X, Y)$ [Pau86, Chap. 7].

Ein Operatorraum X heißt **homogen**, wenn jeder beschränkte Operator $\Phi \in B(M_1(X))$ normgleich vollständig beschränkt ist: $\Phi \in CB(X)$, und $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\Phi\|$ [Pis96].

Beispiele: $B(\mathcal{H})$ ist ein Operatorraum durch die Identifizierung $M_n(B(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H}^n)$. Allgemein ist jede C^*-Algebra A ein Operatorraum, wenn man den Raum $M_n(A)$ mit seiner eindeutigen C^*-Norm versieht. Abgeschlossene Unterräume von C^*-Algebren nennt man **konkrete Operatorräume**. Jeder konkrete Operatorraum ist ein Operatorraum. Umgekehrt ist nach dem Satz von Ruan jeder Operatorraum vollständig isometrisch isomorph zu einem konkreten Operatorraum.

Kommutative C^*-Algebren sind homogene Operatorräume.

Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und Φ die Transposition auf $B(\mathcal{H})$, so ist $\|\Phi\| = 1$, aber $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \dim \mathcal{H}$. Ist $\mathcal{H}$ unendlichdimensional, so ist Φ also beschränkt, aber nicht vollständig beschränkt. $B(\mathcal{H})$ ist für $\dim \mathcal{H} \geq 2$ nicht homogen [Pau86, p. 6].

Mit der Bezeichnung

$$M(X) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n(X)$$

lassen sich viele Sachverhalte einfacher formulieren.[6]

[3] In der Literatur wird der normierte Raum $M_1(X)$, die Grundstufe, meist ebenfalls mit X bezeichnet. Wir meinen, daß eine genauere Unterscheidung manchmal hilfreich ist.

[4] Das heißt: $\|\Phi^{(n)}(x)\| = \|x\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in M_n(X)$.

[5] Das heißt: $\Phi^{(n)}(\mathrm{Ball}^\circ M_n(X)) = \mathrm{Ball}^\circ M_n(Y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist $\mathrm{Ball}^\circ M_n(X) = \{x \in M_n(X) \mid \|x\| < 1\}$.

[6] Die Normen auf den Matrizenstufen $M_n(X)$ werden zu einer Abbildung $M(X) \to \mathbb{R}$. Die Amplifikationen von $\Phi : X \to Y$ kann man zu einer einzigen Abbildung $\Phi : M(X) \to M(Y)$ zusammenfassen. Es ist

$$\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \sup\{\|\Phi(x)\| \mid x \in M(X),\ \|x\| \leq 1\}.$$

Φ ist vollständig isometrisch, falls $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in M(X)$, und Φ ist eine vollständige Quotientenabbildung, falls $\Phi(\mathrm{Ball}^\circ X) = \mathrm{Ball}^\circ Y$. Dabei ist $\mathrm{Ball}^\circ X = \{x \in M(X) \mid \|x\| < 1\}$.

Lemma von Smith

Ist X ein matrixnormierter Raum und $\Phi : X \to M_n$ ein linearer Operator, so ist $\|\Phi\|_{\text{cb}} = \|\Phi^{(n)}\|$. Insbesondere ist Φ genau dann vollständig beschränkt, wenn $\Phi^{(n)}$ beschränkt ist [Smi83, Thm. 2.10].

Rechteckmatrizen

Ist X ein matrixnormierter Raum, so normiert man die Räume $M_{n,m}(X) = M_{n,m} \otimes X$ der $n \times m$-Matrizen über X, indem man Rechteckmatrizen mit Nullen zu quadratischen Matrizen auffüllt.

Damit gilt isometrisch

$$M_{n,m}(B(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H}^m, \mathcal{H}^n).$$

2.2 Satz von Ruan

Jeder konkrete Operatorraum ist ein Operatorraum. Das Umgekehrte liefert der **Satz von Ruan** [Rua88]: *Jeder (abstrakte) Operatorraum ist vollständig isometrisch isomorph zu einem konkreten Operatorraum.*
Eine solche Darstellung erhält man auf folgende Art: Sei S_n die Menge aller vollständigen Kontraktionen von X nach M_n. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X & \to & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\Phi\in S_n} M_n \\ x & \mapsto & (\Phi(x))_\Phi \end{array}$$

eine vollständig isometrische Einbettung von X in eine C^*-Algebra [ER93].

Mit diesem Satz kann man zeigen, daß viele Konstruktionen mit konkreten Operatorräumen wieder (bis auf vollständige Isometrie) konkrete Operatorräume liefern.

2.3 Elementare Konstruktionen

Unterräume und Quotienten

Seien X ein matrixnormierter Raum und $X_0 \subset X$ ein linearer Teilraum. Dann ist $M_n(X_0) \subset M_n(X)$, und X_0 ist mit der Einschränkung der Matrixnorm wieder ein matrixnormierter Raum. Die Einbettung $X_0 \hookrightarrow X$ ist vollständig isometrisch. Ist X ein Operatorraum und $X_0 \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum, so ist $M_n(X_0) \subset M_n(X)$ abgeschlossen und X_0 ein Operatorraum.

Es ist $M_n(X/X_0) = M_n(X)/M_n(X_0)$. Falls X_0 abgeschlossen ist, ist X/X_0 mit der von dieser Identifizierung induzierten Quotientennorm ein matrixnormierter Raum (Operatorraum, falls X einer ist). Die Quotientenabbildung $X \to X/X_0$ ist eine vollständige Quotientenabbildung.

Allgemeiner ist ein **Unterraum** eines matrixnormierten Raumes (Operatorraumes) X ein matrixnormierter Raum (Operatorraum) Y zusammen mit einem vollständig isometrischen Operator $Y \to X$. Ein **Quotient** von X ist ein matrixnormierter Raum (Operatorraum) Y zusammen mit einer vollständigen Quotientenabbildung $X \to Y$.

Matrizen über einem Operatorraum

Der Vektorraum $M_p(X)$ der Matrizen über einem matrixnormierten Raum X ist auf natürliche Weise ebenfalls ein matrixnormierter Raum: Dabei wird die n-te Stufe $M_n(M_p(X))$ durch die Identifikation

$$M_n(M_p(X)) = M_{np}(X)$$

normiert [BP91, p. 265]. $M_p(X)$, versehen mit dieser Operatorraumstruktur, bezeichnen wir[7] mit

$$\mathbb{M}_p(X).$$

Insbesondere gilt für die Grundstufe

$$M_1(\mathbb{M}_p(X)) = M_p(X).$$

Entsprechend wird auch $M_{p,q}(X)$ durch die Identifizierung

$$M_n(M_{p,q}(X)) = M_{np,nq}(X)$$

zu einem matrixnormierten Raum $\mathbb{M}_{p,q}(X)$. Dieser ist durch Auffüllen der Rechteckmatrizen mit Nullen ein Unterraum von $\mathbb{M}_r(X)$ für $r \geq p,\, q$.

Beispiele: Ist A eine C^*-Algebra, so ist $\mathbb{M}_p(A)$ die C^*-Algebra der $p \times p$-Matrizen über A mit ihrer Operatorraumstruktur.

Der Banachraum $M_p(A)$ ist die Grundstufe des Operatorraumes $\mathbb{M}_p(A)$.

Die komplexen Zahlen haben genau eine Operatorraumstruktur, die auf der Grundstufe isometrisch zu $\mathbb{C}$ ist. Für diese ist isometrisch $M_p(\mathbb{C}) = M_p$. Wir setzen

$$\mathbb{M}_p := \mathbb{M}_p(\mathbb{C}).$$

Damit bezeichnet $\mathbb{M}_p$ immer die C^*-Algebra der $p \times p$-Matrizen mit ihrer Operatorraumstruktur. Der Banachraum M_p ist die Grundstufe des Operatorraumes $\mathbb{M}_p$.

Spalten und Zeilen eines Operatorraumes

Den Raum X^p der p-Tupel über einem Operatorraum X kann man mit Operatorraumstrukturen versehen, indem man die p-Tupel als $p \times 1$- oder als $1 \times p$-Matrizen liest. Dies führt zu den häufig gebrauchten **Spalten** und **Zeilen** eines Operatorraumes X:

$$C_p(X) := \mathbb{M}_{p,1}(X) \quad \text{und} \quad R_p(X) := \mathbb{M}_{1,p}(X).$$

Die Grundstufen des Spalten- bzw. des Zeilenraumes sind

$$M_1(C_p(X)) = M_{p,1}(X) \quad \text{bzw.} \quad M_1(R_p(X)) = M_{1,p}(X).$$

[7] In der Literatur wird meist das Symbol $M_p(X)$ sowohl für den Operatorraum mit Grundstufe $M_p(X)$ als auch für die p-te Stufe des Operatorraumes X verwendet. Wir meinen aber, daß die Unterscheidung von $\mathbb{M}_p(X)$ und $M_p(X)$ hilfreich ist, z.B. bei der Definition der Operatorraumstruktur von $CB(X, Y)$.

Die Räume $C_p(X)$ und $R_p(X)$ sind für $X \neq \{0\}$ nicht vollständig isometrisch. Im allgemeinen sind sogar die Grundstufen $M_{p,1}(X)$ und $M_{1,p}(X)$ nicht isometrisch.

$\mathcal{C}_p := C_p(\mathbb{C})$ heißt der **p-dimensionale Spaltenraum** und $\mathcal{R}_p := R_p(\mathbb{C})$ der **p-dimensionale Zeilenraum**.

Die Grundstufen von $\mathcal{C}_p$ und $\mathcal{R}_p$ sind isometrisch zu l_2^p. $\mathcal{C}_p$ und $\mathcal{R}_p$ sind aber nicht vollständig isometrisch.

2.4 Der Raum $CB(X,Y)$

Es seien X und Y matrixnormierte Räume. Eine Matrix $[T_{ij}] \in M_n(CB(X,Y))$ definiert einen vollständig beschränkten Operator

$$\begin{aligned} T : X &\to \mathbb{M}_n(Y) \\ x &\mapsto [T_{ij}(x)]\,. \end{aligned}$$

Setzt man $\|[T_{ij}]\| = \|T\|_{\mathrm{cb}}$, so wird $CB(X,Y)$ zu einem matrixnormierten Raum. Dieser ist ein Operatorraum, falls Y einer ist. Es gilt vollständig isometrisch

$$\mathbb{M}_p(CB(X,Y)) \overset{\mathrm{cb}}{=} CB(X, \mathbb{M}_p(Y)).$$

2.5 Der Dual

Der **Dual**[8] eines matrixnormierten Raumes X ist als $X^* = CB(X, \mathbb{C})$ erklärt [Ble92a]. Dieser stimmt auf der Grundstufe mit dem Dual der Grundstufe von X überein: $M_1(X^*) = (M_1(X))^*$.[9]

Die kanonische Einbettung $X \hookrightarrow X^{**}$ ist vollständig isometrisch [BP91, Thm. 2.11].

Einige Formeln

Daraus ergeben sich die folgenden Formeln: Sind X und Y matrixnormierte Räume, $n \in \mathbb{N}$, $y \in M_n(Y)$ und $T \in CB(X,Y)$, so ist

$$\|y\| = \sup\{\|\Phi(y)\| \mid n \in \mathbb{N},\ \Phi \in CB(Y, \mathbb{M}_n),\ \|\Phi\|_{\mathrm{cb}} \leq 1\}$$

und

$$\|T\|_{\mathrm{cb}} = \sup\{\|\Phi^{(n)} \circ T\|_{\mathrm{cb}} \mid n \in \mathbb{N},\ \Phi \in CB(Y, \mathbb{M}_n),\ \|\Phi\|_{\mathrm{cb}} \leq 1\}.$$

Eine Matrix $[T_{ij}] \in M_n(X^*)$ definiert einen Operator

$$\begin{aligned} T : M_n(X) &\to \mathbb{C} \\ [x_{ij}] &\mapsto \sum_{i,j} T_{ij} x_{ij}. \end{aligned}$$

---

[8] In der Literatur findet sich mitunter der Begriff *Standarddual* [Ble92a].

[9] Die Norm eines matrixnormierten Raumes X ist durch die Einheitskugel $\mathrm{Ball}X \subset M(X)$ bestimmt. Es gilt: $\mathrm{Ball}X^* = \{\Phi : X \to M_n \mid n \in \mathbb{N},\ \Phi \text{ vollständig kontrahierend}\}$.

Dadurch ist eine algebraische Identifizierung von $M_n(X^*)$ mit $M_n(X)^*$ und weiter von $M_n(X^{**})$ mit $M_n(X)^{**}$ gegeben. Letztere stellt sich sogar als vollständige Isometrie heraus ([Ble92b, Cor. 2.14], für die Isometrie auf der Grundstufe vgl. [Ble92a, Thm. 2.5][10]):

$$\mathbb{M}_n(X^{**}) \stackrel{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_n(X)^{**}.$$

Daraus folgt[11]

$$CB(\mathbb{M}_n(X)^*, Y) \stackrel{\text{cb}}{=} CB(X^*, \mathbb{M}_n(Y)).$$

X heißt **reflexiv**, falls $X \stackrel{\text{cb}}{=} X^{**}$ ist. Ein Operatorraum X ist genau dann reflexiv, falls seine erste Stufe $M_1(X)$ als Banachraum reflexiv ist.

Der adjungierte Operator

Zu $T \in CB(X, Y)$ kann man wie üblich einen adjungierten Operator T^* erklären. Es gilt: $T^* \in CB(Y^*, X^*)$, und $\|T\|_{\text{cb}} = \|T^*\|_{\text{cb}}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}^* : CB(X, Y) & \to & CB(Y^*, X^*) \\ T & \mapsto & T^* \end{array}$$

ist sogar vollständig isometrisch [Ble92b, Lemma 1.1].[12] T^* ist genau dann eine vollständige Quotientenabbildung, wenn T vollständig isometrisch ist; T^* ist vollständig isometrisch, wenn T eine vollständige Quotientenabbildung ist. Speziell gilt für einen Teilraum $X_0 \subset X$ [Ble92a]:

$$X_0^* \stackrel{\text{cb}}{=} X^*/X_0^\perp$$

und, falls X_0 abgeschlossen ist,

$$(X/X_0)^* \stackrel{\text{cb}}{=} X_0^\perp.$$

---

[10] Daraus folgt die vollständige Isometrie vĭā

$$M_k(\mathbb{M}_n(X)^{**}) = M_k(M_n(X))^{**} = M_{kn}(X)^{**} = M_{kn}(X^{**}) = M_k(\mathbb{M}_n(X^{**})).$$

[11] Unter Benutzung obiger Formel

$$\|T\|_{\text{cb}} = \sup\{\|\Phi^{(n)}T\|_{\text{cb}} \mid n \in \mathbb{N},\ \Phi \in CB(Y, \mathbb{M}_n),\ \|\Phi\|_{\text{cb}} \le 1\}.$$

[12] Die Isometrie auf den Matrizenstufen folgt aus der Isometrie auf der Grundstufe und der obigen Formel $CB(\mathbb{M}_n(X)^*, Y) \stackrel{\text{cb}}{=} CB(X^*, \mathbb{M}_n(Y))$:

$$\begin{array}{rcl} M_n(CB(X, Y)) & = & M_1(CB(X, \mathbb{M}_n(Y))) \\ & \to & M_1(CB(\mathbb{M}_n(Y)^*, X^*)) \\ & = & M_1(CB(Y^*, \mathbb{M}_n(X^*))) \\ & = & M_n(CB(Y^*, X^*)). \end{array}$$

2.6 *MIN* und *MAX*

Sei E ein normierter Raum. Unter allen Operatorraumnormen auf E, die auf der ersten Stufe mit der gegebenen Norm übereinstimmen, gibt es eine größte und eine kleinste. Die dadurch gegebenen matrixnormierten Räume nennt man $MAX(E)$ und $MIN(E)$. Sie sind charakterisiert durch die folgende *universelle Abbildungseigenschaft*:[13]
Für jeden matrixnormierten Raum X ist isometrisch

$$M_1(CB(MAX(E), X)) = B(E, M_1(X))$$

und

$$M_1(CB(X, MIN(E))) = B(M_1(X), E).$$

Es ist [Ble92a]

$$\begin{aligned} MIN(E)^* &\overset{\text{cb}}{=} MAX(E^*), \\ MAX(E)^* &\overset{\text{cb}}{=} MIN(E^*). \end{aligned}$$

Ist $\dim(E) = \infty$, so ist

$$\mathrm{id}_E : MIN(E) \to MAX(E)$$

nicht vollständig beschränkt [Pau92, Cor. 2.13].[14]

Konstruktion von *MIN*:

Ist $A = C(K)$ eine kommutative C^*-Algebra, so ist jede beschränkte lineare Abbildung $\Phi : M_1(X) \to A$ automatisch vollständig beschränkt und $\|\Phi\|_{\text{cb}} = \|\Phi\|$ [Loe75].

Jeder normierte Raum E ist isometrisch zu einem Unterraum von $C(\text{Ball}(E^*))$, wobei E^* die w^*-Topologie trägt. Dadurch ist auf E die Operatorraumstruktur $MIN(E)$ gegeben.

Es gilt für $x \in M_n(MIN(E))$:

$$\|x\| = \sup\left\{ \|f^{(n)}(x)\| \,\middle|\, f \in \text{Ball}(E^*) \right\}.$$

Konstruktion von *MAX*:

Für eine Indexmenge I ist $l_1(I) = c_0(I)^*$. Als Dual der C^*-Algebra $c_0(I)$ ist $l_1(I)$ ein Operatorraum, und jede beschränkte lineare Abbildung $\Phi : l_1(I) \to M_1(X)$ ist automatisch vollständig beschränkt und $\|\Phi\|_{\text{cb}} = \|\Phi\|$.

---

[13] *MAX* ist also die Linksadjungierte und *MIN* die Rechtsadjungierte des Vergißfunktors, der einem Operatorraum X den Banachraum $M_1(X)$ zuordnet.

[14] Paulsen baut seinen Beweis auf einer falschen Abschätzung für die Projektionskonstante des endlichdimensionalen Hilbertraums; die umgekehrte Abschätzung ist richtig [Woj91, p. 120], aber dort nutzlos. Die Lücke füllt sich dennoch leicht [Lam97, Thm. 2.2.15], durch Einbringen des berühmten Satzes von Kadets-Snobar: *Die Projektionskonstante eines n-dimensionalen Banachraums ist kleinergleich $\sqrt{n}$* [KS71].

Jeder Banachraum E ist isometrisch zu einem Quotienten von $l_1(\mathrm{Ball}(E))$. Dadurch ist auf E die Operatorraumstruktur $MAX(E)$ gegeben.

Es gilt für $x \in M_n(MAX(E))$:

$$\|x\| = \sup\{\|\varphi^{(n)}(x)\| \mid n \in \mathbb{N},\ \varphi : E \to M_n,\ \|\varphi\| \leq 1\}.$$

3 Hilbertsche Operatorräume

3.1 Die Räume

Ein Operatorraum X heißt **hilbertsch**, wenn die Grundstufe $M_1(X)$ ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist. Ein Operatorraum X heißt **homogen**, wenn jeder beschränkte Operator $T : M_1(X) \to M_1(X)$ vollständig beschränkt ist und $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \|T\|$ [Pis96].

Der minimale $MIN_{\mathcal{H}} := MIN(\mathcal{H})$ und der maximale $MAX_{\mathcal{H}} := MAX(\mathcal{H})$ hilbertsche Operatorraum, der **Spalten-Hilbertraum** $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} := B(\mathbb{C}, \mathcal{H})$ und der **Zeilen-Hilbertraum** $\mathcal{R}_{\mathcal{H}} := B(\overline{\mathcal{H}}, \mathbb{C})$ sind homogene hilbertsche Operatoräume auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$.

Darüberhinaus haben wir für zwei Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ vollständige isometrische Isomorphismen [ER91, Thm. 4.1] [Ble92b, Prop. 2.2]

$$CB(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}, \mathcal{C}_{\mathcal{K}}) \stackrel{\mathrm{cb}}{=} B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \text{ und } CB(\mathcal{R}_{\mathcal{H}}, \mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \stackrel{\mathrm{cb}}{=} B(\overline{\mathcal{K}}, \overline{\mathcal{H}}).$$

Der Operatorraumschnitt und die Operatorraumsumme je zweier homogener hilbertscher Operatorräume sind wieder homogene hilbertsche Operatorräume [Pis96].

Die Operatorräume stehen in den folgenden Dualitäten [Ble92b, Prop. 2.2] [Ble92a, Cor. 2.8]:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{H}}^* &\stackrel{\mathrm{cb}}{=} \mathcal{R}_{\overline{\mathcal{H}}} \\ \mathcal{R}_{\mathcal{H}}^* &\stackrel{\mathrm{cb}}{=} \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{H}}} \\ MIN_{\mathcal{H}}^* &\stackrel{\mathrm{cb}}{=} MAX_{\overline{\mathcal{H}}} \\ MAX_{\mathcal{H}}^* &\stackrel{\mathrm{cb}}{=} MIN_{\overline{\mathcal{H}}}. \end{aligned}$$

Zu jedem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt es genau einen vollständig selbstdualen homogenen Operatorraum, den **Operatorhilbertraum** $OH_{\mathcal{H}}$ [Pis96, §1]. Es gilt also

$$OH_{\mathcal{H}}^* \stackrel{\mathrm{cb}}{=} OH_{\overline{\mathcal{H}}}.$$

3.2 Die Abbildungen

Der Raum $CB(X, Y)$ der vollständig beschränkten Abbildungen zwischen zwei homogenen hilbertschen Operatorräumen X, Y hat die folgenden Eigenschaften (vgl. [MP95, Prop. 1.2]):

1. $(CB(X, Y), \|\cdot\|_{\mathrm{cb}})$ ist ein Banachraum.

2. $\|ATB\|_{\mathrm{cb}} \le \|A\|\|T\|_{\mathrm{cb}}\|B\|$ für alle A, $B \in B(\mathcal{H})$, $T \in CB(X,Y)$.
3. $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \|T\|$ für alle T mit $\mathrm{rang}(T) = 1$.

$CB(X,Y)$ ist damit ein symmetrisch normiertes Ideal (s.n. Ideal) im Sinne von Calkin, Schatten [Sch70] und Gohberg [GK69]. Standardbeispiele für s.n. Ideale sind die bekannten Schattenideale:

$$S_p := \{T \in B(\mathcal{H}) \mid \text{die Folge der Singulärwerte von } T \text{ ist in } \ell_p\} \quad (1 \le p < \infty).$$

Viele, aber nicht alle, s.n. Ideale können als vollständig beschränkte Abbildungen zwischen homogenen, hilbertschen Operatorräumen realisiert werden. Wie so oft ist am meisten bekannt über Schattenideale. Das erste Ergebnis in dieser Richtung war

$$CB(\mathcal{R}_{\mathcal{H}}, \mathcal{C}_{\mathcal{H}}) = S_2(\mathcal{H}) = HS(\mathcal{H})$$

isometrisch [ER91, Cor. 4.5]. Wir haben isometrisch bzw. isomorph ($\simeq$) [Mat94], [MP95], [Lam97]:

$CB(\downarrow, \to)$	$MIN_{\mathcal{H}}$	$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$	$OH_{\mathcal{H}}$	$\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$	$MAX_{\mathcal{H}}$
$MIN_{\mathcal{H}}$	$B(\mathcal{H})$	$HS(\mathcal{H})$	$\simeq HS(\mathcal{H})$	$HS(\mathcal{H})$	$\simeq N(\mathcal{H})$
$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$	$B(\mathcal{H})$	$B(\mathcal{H})$	$S_4(\mathcal{H})$	$HS(\mathcal{H})$	$HS(\mathcal{H})$
$OH_{\mathcal{H}}$	$B(\mathcal{H})$	$S_4(\mathcal{H})$	$B(\mathcal{H})$	$S_4(\mathcal{H})$	$\simeq HS(\mathcal{H})$
$\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$	$B(\mathcal{H})$	$HS(\mathcal{H})$	$S_4(\mathcal{H})$	$B(\mathcal{H})$	$HS(\mathcal{H})$
$MAX_{\mathcal{H}}$	$B(\mathcal{H})$	$B(\mathcal{H})$	$B(\mathcal{H})$	$B(\mathcal{H})$	$B(\mathcal{H})$

Einzig ist darin $CB(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}) \overset{\mathrm{cb}}{=} B(\mathcal{H})$ eine vollständig isometrische Isomorphie (vgl. [Ble95, Thm. 3.4]). Von besonderem Interesse ist

$$CB(MIN_{\mathcal{H}}, MAX_{\mathcal{H}}) \simeq N(\mathcal{H}).$$

Hier haben wir eine neue natürliche Norm auf den nuklearen Operatoren, die nicht gleich der kanonischen ist. Auch im endlichdimensionalen Fall ist nur

$$\frac{n}{2} \le \|\mathrm{id} : MIN(\ell_2^n) \to MAX(\ell_2^n)\|_{\mathrm{cb}} \le \frac{n}{\sqrt{2}}$$

bekannt [Pau92, Thm. 2.16]. Das Bestimmen des exakten Wertes ist ein noch offenes Problem; Paulsen vermutet, daß die obere Schranke angenommen wird [Pau92, p. 121].

Seien E ein Banachraum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist ein Operator $T \in B(E, \mathcal{H})$ genau dann vollständig beschränkt von $MIN(E)$ nach $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, wenn er absolut-2-summierend [Pie67] von E nach $\mathcal{H}$ ist (vgl. [ER91, Thm. 5.7]):

$$M_1(CB(MIN(E), \mathcal{C}_{\mathcal{H}})) = \Pi_2(E, \mathcal{H})$$

mit $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \pi_2(T)$.

3.3 Der Spalten-Hilbertraum $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$

Für den Hilbertraum $\mathcal{H} = \ell_2$ läßt sich der Spalten-Hilbertraum $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ über die Einbettung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \hookrightarrow & B(\mathcal{H}), \\ \begin{pmatrix} \vdots \\ \xi_i \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} \vdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \xi_i & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}. \end{array}$$

als Spalte konkretisieren. Speziell ist $\mathcal{C}_{\ell_2^n}$ der n-dimensionale Spaltenraum $\mathcal{C}_n$.

$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ ist ein homogener hilbertscher Operatorraum: Alle beschränkten Abbildungen auf $\mathcal{H}$ sind normgleich vollständig beschränkt auf $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$. Es gilt sogar $CB(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}) \stackrel{\text{cb}}{=} B(\mathcal{H})$ vollständig isometrisch [ER91, Thm. 4.1].

$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ ist ein injektiver Operatorraum (vgl. [Rob91]).

Tensorprodukte

Ist X ein Operatorraum, so sind vollständig isometrisch [ER91, Thm. 4.3 (a)(c)] [Ble92b, Prop. 2.3 (i)(ii)]

$$\mathcal{C}_{\mathcal{H}} \otimes_h X \stackrel{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \overset{\vee}{\otimes} X$$

und

$$X \otimes_h \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \stackrel{\text{cb}}{=} X \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{C}_{\mathcal{H}}.$$

Dabei meinen $\otimes_h$ das Haagerup-Tensorprodukt, $\overset{\vee}{\otimes}$ das injektive Tensorprodukt und $\overset{\wedge}{\otimes}$ das projektive Tensorprodukt.

Sind $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume, so gilt vollständig isometrisch [ER91, Cor. 4.4.(a)] [Ble92b, Prop. 2.3(iv)]

$$\mathcal{C}_{\mathcal{H}} \otimes_h \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \overset{\vee}{\otimes} \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_{\mathcal{H} \otimes_2 \mathcal{K}}.$$

3.3.1 Charakterisierungen

Im Zusammenhang mit dem Spalten-Hilbertraum genügt es statt der cb-Norm eines Operators T seine Zeilennorm

$$\|T\|_{\text{row}} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|[x_1 \dots x_n]\|_{M_{1,n}(X)} \leq 1} \|[Tx_1 \dots Tx_n]\|_{M_{1,n}(Y)}$$

oder seine Spaltennorm

$$\|T\|_{\text{col}} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\|_{M_{n,1}(Y)} \leq 1} \left\| \begin{bmatrix} Tx_1 \\ \vdots \\ Tx_n \end{bmatrix} \right\|_{M_{n,1}(X)}$$

zu berechnen, um Aussagen über seine vollständige Beschränktheit zu erhalten. Sei X ein Operatorraum und $S : \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \to X$ bzw. $T : X \to \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ dann ist $\|S\|_{\text{cb}} = \|S\|_{\text{row}}$ bzw. $\|T\|_{\text{cb}} = \|T\|_{\text{col}}$ [Mat94, Prop. 4] bzw. [Mat94, Prop. 2].

Wir haben die folgenden Charakterisierungen des Spalten-Hilbertraums

(A) unter den hilbertschen Operatorräumen [Mat94, Thm. 8]:

Ist X ein Operatorraum auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so sind äquivalent :

1. *Es ist $X \stackrel{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ vollständig isometrisch.*
2. *Für alle Operatorräume Y und alle $T : X \to Y$ ist $\|T\|_{\text{cb}} = \|T\|_{\text{row}}$ und für alle $S : Y \to X$ ist $\|S\| = \|S\|_{\text{row}}$.*
3. *Für alle Operatorräume Y und alle $T : Y \to X$ ist $\|T\|_{\text{cb}} = \|T\|_{\text{col}}$ und für alle $S : X \to Y$ ist $\|S\| = \|S\|_{\text{col}}$.*
4. *X stimmt mit dem maximalen hilbertschen Operatorraum auf den Spalten und mit dem minimalen hilbertschen Operatorraum auf den Zeilen überein. Es gilt*

$$\begin{aligned} M_{n,1}(X) &= M_{n,1}(MAX(\mathcal{H})) \\ M_{1,n}(X) &= M_{1,n}(MIN(\mathcal{H})) \end{aligned}$$

   isometrisch.

(B) unter allen Operatoräumen:

Ist X ein Operatorraum, so sind äquivalent:

1. *Es existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, so daß $X \stackrel{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ vollständig isometrisch.*
2. *Es sind*

$$M_{n,1}(X) = \oplus_2 M_1(X)$$

   und

$$M_{1,n}(X) = M_{1,n}(MIN(M_1(X)))$$

   isometrisch [Mat94, Thm. 10].
3. *$CB(X)$ mit der Komposition als Multiplikation ist eine Operatoralgebra* [Ble95, Thm. 3.4].

3.4 Faktorisierung durch den Spalten-Hilbertraum

Seien X, Y Operatorräume. Wir sagen, eine lineare Abbildung $T : M_1(X) \to M_1(Y)$ faktorisiere durch einen Spalten-Hilbertraum, wenn es einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und vollständig beschränkte Abbildungen $T_2 : X \to \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, $T_1 : \mathcal{C}_{\mathcal{H}} \to Y$ gibt mit $T = T_1 \circ T_2$. Wir definieren

$$\gamma_2(T) := \inf \|T_1\|_{\text{cb}} \|T_2\|_{\text{cb}},$$

wobei das Infimum über alle Faktorisierungen gebildet wird, und $\gamma_2(T) := \infty$, falls keine solche Faktorisierung existiert. $\Gamma_2(X,Y)$ bezeichne den Banachraum aller linearen Abbildungen $T : X \to Y$ mit $\gamma_2(T) < \infty$ [ER91, Chap. 5],[Ble92b, p. 83].

Seien noch X_1, Y_1 Operatorräume und $T \in \Gamma_2(X,Y)$, $S \in CB(X_1,X)$, $R \in CB(Y,Y_1)$, so gilt die CB-Idealeigenschaft

$$\gamma_2(RTS) \leq \|R\|_{\text{cb}}\gamma_2(T)\|S\|_{\text{cb}}.$$

Eine Matrix $T = [T_{ij}] \in M_n(\Gamma_2(X,Y))$ wird als Abbildung von X nach $M_n(Y)$ gelesen: $[T_{ij}](x) := [T_{ij}(x)]$. T besitzt eine Faktorisierung in vollständig beschränkte Abbildungen

$$X \overset{T_2}{\to} M_{1,n}(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}) \overset{T_1}{\to} M_n(Y).$$

Wir definieren wieder

$$\gamma_2(T) := \inf \|T_1\|_{\text{cb}}\|T_2\|_{\text{cb}},$$

wobei das Infimum über alle Faktorisierungen gebildet wird, und erhalten so eine Operatorraumstruktur auf $\Gamma_2(X,Y)$ [ER91, Cor. 5.4].

Seien X, Y Operatorräume und Y_0 ein Operatorunterraum von Y. Dann ist die Einbettung $\Gamma_2(X,Y_0) \hookrightarrow \Gamma_2(X,Y)$ vollständig isometrisch [ER91, Prop. 5.2].

Seien X, Y Operatorräume. Bekanntlich definiert jede lineare Abbildung

$$T : X \to Y^*$$

ein lineares Funktional

$$f_T : Y \otimes X \to \mathbb{C}$$

über

$$\langle f_T, y \otimes x\rangle := \langle T(x), y\rangle.$$

Über diese Identifikation erhalten wir die vollständige Isometrie [ER91, Thm. 5.3] [Ble92b, Thm. 2.11]

$$\Gamma_2(X,Y^*) \overset{\text{cb}}{=} (Y \otimes_h X)^*.$$

Seien X, Y, Z Operatorräume. Wir erhalten eine vollständige Isometrie

$$\Gamma_2(Y \otimes_h X, Z) \overset{\text{cb}}{=} \Gamma_2(X, \Gamma_2(Y,Z))$$

über die Abbildung $T \mapsto \widetilde{T}$, gemäß $\widetilde{T}(x)(y) := T(y \otimes x)$ [ER91, Cor. 5.5].

4 Multiplikative Strukturen

Für eine abstrakte C^*-Algebra liefert die GNS-Konstruktion eine konkrete Darstellung ihrer Elemente als beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum. Im nicht-selbstadjungierten Fall gibt es bislang in der Theorie der Banachalgebren kein entsprechendes Resultat. Versieht man aber diese nicht-selbstadjungierten Algebren mit einer mit der Multiplikation verträglichen Operatorraum-Struktur, so ist eine Darstellung als Operatoralgebra in $B(\mathcal{H})$ möglich (Satz vom Ruan-Typ für Operatoralgebren).

Auch die sog. Operatormoduln(über Operatoralgebren) werden durch Axiome vom Ruan-Typ charakterisiert; an die Stelle skalarer Matrizen treten nun solche mit Einträgen aus den Algebren. Die zugehörigen Morphismen sind hier die vollständig beschränkten Modulhomomorphismen, deren wichtigste Eigenschaften in Darstellungs-, Zerlegungs- und Fortsetzungssätzen zutage treten[15] .

4.1 Operatormoduln über C^*-Algebren

Seien A_1, $A_2 \subset B(\mathcal{H})$ C^*-Algebren mit $\mathbb{1}_{B(\mathcal{H})} \in A_1, A_2$. Ein abgeschlossener Unterraum X in $B(\mathcal{H})$ heißt konkreter (A_1, A_2)-**Operatormodul** , falls $A_1 X \subset X$ und $X A_2 \subset X$. Im Falle $A_1 = A_2 = A$ nennen wir X einen konkreten A-**Operatorbimodul** (vgl. [ER88, p. 137]).

[15] Philologische Fußnote: Der Autor ist sich der philosophischen Tragweite seiner Ausdrucksweise, die in dem Prädikat „zutage treten“ zutage tritt, in aller Konsequenz bewußt und weiß sich im Spannungsfeld zwischen reinem Konstruktivismus und platonisch fundiertem Realismus. Um an dieser Stelle seine Position, welche die Mathematik als eine in der Tat partiell real existente, zugleich aber vom denkenden Individuum entworfene Wissenschaft begreift, klar zutage treten zu lassen, sei denn im folgenden in stetem Bezug auf das unter „Matière à pensée“ publizierte Gespräch zwischen Alain Connes und Jean-Pierre Changeux [CC92] das von ihm favorisierte Bild der Mathematik in kurzen Strichen skizziert.

In der Sicht Alain Connes’ stellt die Mathematik eine vom Menschen unabhängige, wenngleich geistige, so doch gleichsam greifbare Wirklichkeit dar, die in ihrer ontologischen Basis der platonischen Ideenwelt vergleichbar ist. Connes bekennt sich somit zu einem beinahe radikal zu nennenden Realismus; die Aufgabe des Mathematikers besteht hiernach, pointiert formuliert, einzig und allein darin, die vorhandene „harte Realität“ zu entdecken.

Jean-Pierre Changeux setzt diesem das Bild des rein erfindenden Denkers entgegen. In den Augen des Neurobiologen existiert die von Alain Connes als realiter vorfindbar beschriebene und als solche dem Forscher erfahrbare Welt lediglich in den Hirnwindungen, in den Synapsen besagten Denkers. Diese konstruktivistische Perspektive versteht Mathematik als reine Fiktion und ersetzt die platonische Ontologie gleichsam durch biologische Substanz.

Der Verfasser nun wagt es weder, einer der beiden Positionen vollends zu widersprechen, noch aber vermag er sich ihrer Radikalität anzuschließen. Er folgt vielmehr einem Kompromiß zwischen beiden Ansätzen, welchen der in seinem Verständnis fundamentale Punkt der Axiomatik stiftet. Für ihn ist Mathematik in und bis zum (vorläufigen) Abschluß der Axiomatik in sich kohärente Erfindung, wobei einzig die Logik der Fiktion die Schranken weist, in dem Maße wie sie als Garant der inneren Kohärenz auftritt – den Schlußpunkt der Axiomatik freilich setzt zunächst desgleichen die freie Erfindung.

Unter diesen Prämissen gibt es prinzipiell viele verschiedene „Mathematiken“: *quot capita, tot senses.*

Ist jedoch einmal das axiomatische Fundament gelegt, so bleibt dem Forscher allein, die hierdurch erschaffene, obschon dem Schöpfer selbst noch unbekannte Welt zu erkunden: er kann nur noch entdecken, was er schon geschaffen, dieses Descartessche „Spiel des menschlichen Geistes mit sich selbst“ spielen, dessen Regeln er selbst aufgestellt hat. – Auf eine genaue Definition, also Abgrenzung, der Begriffe „Regel“, „Postulat“ sowie „Axiom“ wird hier aus Platzgründen bewußt verzichtet.

Endlich lehrt uns Gödel, daß auch dieses Spiel seinerseits sich einem Wechselspiel zwischen Erfinden und Entdecken unterordnet, insofern als gewisse Entdeckungen weitere Axiome fordern, die ihrerseits neue Entdeckungen hervorbringen. Ein wechselseitig sich bedingender und befruchtender Dualismus zwischen Konstruktivismus und Realismus zeichnet so ein in stetem Wandel begriffenes Bild der Mathematik.

Abschließend sei folgendem Vermerk noch Raum gegriffen, daß die hier vertretene Sicht der Mathematik ex post greift; sie weiß sich ahistorisch.

Analog zu den Operatorräumen und den Operatoralgebren lassen sich auch Operatormoduln über C^*-Algebren abstrakt charakterisieren (vgl. [Pop98, Déf. 4.1]):
Seien wie oben A_1, $A_2 \subset B(\mathcal{H})$ unitale C^*-Algebren mit $\mathbb{1}_{B(\mathcal{H})} \in A_1$, A_2, ferner X (algebraisch) ein (A_1, A_2)-Modul. Dann nennen wir X einen abstrakten (A_1, A_2)-Operatormodul, falls er eine Operatorraum-Struktur trägt, die den folgenden (Ruanschen) Axiomen genügt:

$$\begin{array}{lll} \text{(R1)} \quad \|axb\|_m & \leq & \|a\|\|x\|_m\|b\| \\[1em] \text{(R2)} \quad \left\| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right\|_{m+n} & = & \max\{\|x\|_m, \|y\|_n\}, \end{array}$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in M_m(A_1)$, $x \in M_m(X)$, $y \in M_n(Y)$, $b \in M_m(A_2)$.

Für abstrakte Operatormoduln gilt ein **Darstellungssatz vom Ruan-Typ** (vgl. [Pop98, Thm. 4.7]):

Seien $A_1, A_2 \subset B(\mathcal{H})$ unitale C^*-Algebren mit $\mathbb{1}_{B(\mathcal{H})} \in A_1, A_2$, ferner V ein abstrakter (A_1, A_2)-Operatormodul. Dann existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, eine vollständige Isometrie $\Theta : X \hookrightarrow B(\mathcal{K})$ und *-Darstellungen π_1, π_2 von A_1 bzw. A_2 auf K, so daß gilt:

$$\Theta(axb) = \pi_1(a)\Theta(x)\pi_2(b),$$

wobei $x \in X$, $a \in A_1$, $b \in A_2$. Im Falle $A_1 = A_2$ kann man sogar $\pi_1 = \pi_2$ wählen.

Beispiele für Operatormoduln

1. Seien A eine unitale C^*-Algebra, E ein normierter Raum und X ein Operatorraum. Dann sind $B(E, A)$ resp. $CB(X, A)$ Operatorräume vermöge der Identifizierungen $M_n(B(E, A)) = B(E, M_n(A))$ resp. $M_n(CB(X, A)) = CB(X, M_n(A))$. Diese werden zu A-Operatorbimoduln, stattet man sie mit den natürlichen Moduloperationen aus:

$$(a \cdot \varphi \cdot b)(x) = a\varphi(x)b$$

   für alle $a, b \in A$, $\varphi \in B(X, A)$ resp. $CB(Y, A)$, $x \in X$ resp. $x \in Y$ [ER88, p. 140].

2. Sei $\otimes_\alpha$ ein Operatorraum-Tensorprodukt. Seien A eine unitale C^*-Algebra, X ein Operatorraum. Der Operatorraum $X \otimes_\alpha A$ wird zu einem A-Operatorbimodul vermöge der Moduloperationen:

$$b \cdot (x \otimes a) \cdot c = x \otimes (bac),$$

   wobei $x \in X$, a, b, $c \in A$. Speziell erhellt dies für das injektive Operatorraum-Tensorprodukt:

$$X^* \overset{\vee}{\otimes} A \subset CB(X, A)$$

   ist ein A-Operatorbimodul (vgl. Beispiel 1.).

4.2 Vollständig beschränkte Modulhomomorphismen

Die zu den Operatormoduln gehörigen strukturerhaltenden Abbildungen sind die vollständig beschränkten Modulhomomorphismen.

Seien $A_1, A_2 \subset B(\mathcal{H})$ unitale C^*-Algebren mit $\mathbb{1}_\mathcal{H} \in A_1, A_2$, und seien X, Y zwei (A_1, A_2)-Operatormoduln, d.h. (algebraisch) A_1-Links-A_2-Rechts-Moduln. Eine Abbildung $\Phi \in L(M_1(X), M_1(Y))$ heißt (A_1, A_2)**-Modulhomomorphismus** (für $A_1 = A_2$ A**-Bimodulhomomorphismus**), falls gilt $\Phi(axb) = a\Phi(x)b$ für alle $a \in A_1$, $b \in A_2$, $x \in X$.

Ferner schreibt man $CB_{(A_1,A_2)}(X, Y)$ für die Menge der vollständig beschränkten (A_1, A_2)-Modulhomomorphismen zwischen X und Y. Der Raum $CB_{(A_1,A_2)}(X)$ mit der Komposition als Multiplikation ist eine Banachalgebra.

Für vollständig beschränkte Modulhomomorphismen gelten ein Fortsetzungssatz und ein Darstellungssatz.

Fortsetzungssatz ([Wit84a, Thm. 3.1], vgl. auch [MN94, Thm. 3.4] und [Pau86, Thm. 7.2]): Seien A eine injektive C^*-Algebra und $A_1, A_2 \subset A$ zwei unitale C^*-Unteralgebren. Weiterhin seien X_0 und X zwei (A_1, A_2)-Operatormoduln mit $X_0 \subset X$. Dann existiert zu jedem $\Phi_0 \in CB_{(A_1,A_2)}(X_0, A)$ eine Fortsetzung $\Phi \in CB_{(A_1,A_2)}(X, A)$ mit $\Phi|_{X_0} = \Phi_0$ und $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\Phi_0\|_{\mathrm{cb}}$.

Darstellungssatz: Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, M eine C^*-Algebra in $B(\mathcal{H})$, und A_1, A_2 seien C^*-Unteralgebren von M. Dann gilt:

(a) (vgl. [Pau86, Thm. 7.4]) Für jeden vollständig beschränkten (A_1, A_2)-Modulhomomorphismus $\Phi : M \to B(\mathcal{H})$ existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, eine *-Darstellung $\pi : M \to B(\mathcal{K})$ und lineare Operatoren $v, w \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ mit den nachstehenden Eigenschaften:

- (a1) $\Phi(x) = v^*\pi(x)w$ für alle $x \in M$, d.h. $(\mathcal{K}; \pi; v^*; w)$ ist eine Darstellung von Φ
- (a2) $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|v\|\|w\|$
- (a3) $\overline{\mathrm{lin}}(\pi(M)v\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{lin}}(\pi(M)w\mathcal{H}) = \mathcal{K}$
- (a4) $v^*\pi(a) = av^*$ für alle $a \in A_1$ und $\pi(b)w = wb$ für alle $b \in A_2$.

(b) (vgl. [Smi91, Thm. 3.1]) Ist $M \subset B(\mathcal{H})$ zusätzlich eine von Neumann-Algebra und $\Phi : M \to B(\mathcal{H})$ ein normaler vollständig beschränkter (A_1, A_2)-Modulhomomorphismus, so kann man in a) die *-Darstellung π normal wählen. Es existieren Familien $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i\in I}$ im Kommutanten von A_1 bzw. A_2 mit den folgenden Eigenschaften (die folgenden Summen sind sämtlich im WOT-Sinne zu verstehen):

- (b1) $\Phi(x) = \sum_{i\in I} a_i x b_i$ für alle $x \in M$
- (b2) $\sum_{i\in I} a_i a_i^* \in B(\mathcal{H})$, $\sum_{i\in I} b_i^* b_i \in B(\mathcal{H})$ und $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\sum_{i\in I} a_i a_i^*\|^{\frac{1}{2}} \|\sum_{i\in I} b_i^* b_i\|^{\frac{1}{2}}$.

Seien $A_1, A_2 \subset B(\mathcal{H})$ unitale C^*-Algebren mit $\mathbb{1}_\mathcal{H} \in A_1, A_2$, ferner $A \subset A_1 \cap A_2$ mit $\mathbb{1}_\mathcal{H} \in A$ eine unitale *-Unteralgebra von A_1 und A_2. Ein A-Bimodulhomomorphismus

$$\Phi : A_1 \to A_2$$

heißt **selbstadjungiert**, falls

$$\Phi(x)^* = \Phi(x^*)$$

für alle $x \in A_1$ gilt.

Für selbstadjungierte vollständig beschränkte Bimodulhomomorphismen besteht der folgende **Zerlegungssatz** ([Wit81, Satz 4.5] und vgl. [Pau86, Thm. 7.5]):

Seien A, A_1 und A_2 unitale C^*-Algebren. Ferner sei A_2 injektiv, und A sei Unteralgebra von A_1 und A_2 mit $\mathbb{1}_{A_1} = \mathbb{1}_{A_2} = \mathbb{1}_A$. Dann existieren zu jedem selbstadjungierten, vollständig beschränkten A-Bimodulhomomorphismus $\Phi : A_1 \to A_2$ zwei vollständig positive A-Bimodulhomomorphismen $\Phi_1 : A_1 \to A_2$ und $\Phi_2 : A_1 \to A_2$ mit den Eigenschaften $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ und $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\Phi_1 + \Phi_2\|_{\mathrm{cb}}$.

Seien M, N von Neumann-Algebren, ferner $A_1, A_2 \subset B(\mathcal{H})$ zwei C^*-Algebren, wobei $\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \in A_1,\ A_2$ und $A_1 \cup A_2 \subset M \cap N$. Es gilt der **Zerlegungssatz von Tomiyama-Takesaki** (vgl. [Tak79, Def. 2.15]): Jede Abbildung

$$\Phi \in CB_{(A_1,A_2)}(M,N)$$

schreibt sich eindeutig als

$$\Phi = \Phi^\sigma + \Phi^s,$$

$\Phi^\sigma,\ \Phi^s \in CB_{(A_1,A_2)}(M,N)$ normal bzw. singulär, mit $\|\Phi^\sigma\|_{\mathrm{cb}},\ \|\Phi^s\|_{\mathrm{cb}} \le \|\Phi\|_{\mathrm{cb}}$. Man erhält also die algebraisch direkte Summen-Zerlegung:

$$CB_{(A_1,A_2)}(M,N) \quad = \quad CB^\sigma_{(A_1,A_2)}(M,N) \oplus CB^s_{(A_1,A_2)}(M,N). \tag{1}$$

Dabei sind die Begriffe „normal“ bzw. „singulär“ analog zu denen bei Funktionalen auf einer von Neumann-Algebra M gebildet.[16]

Grundlegende „Eigenschaften“ der in (1) auftretenden Räume bzw. Abbildungen:

(a) Im Falle $M = N$ sind alle Räume in (1) Banachalgebren.

(b) Die folgenden Eigenschaften vererben sich von Φ auf Φ^σ und Φ^s : vollständig positiv, Homomorphismus, *-Homomorphismus.

(c) Sind $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ und $\beta \in \mathrm{Aut}(N)$ *-Automorphismen, so gilt $(\beta\Phi\alpha)^\sigma = \beta\Phi^\sigma\alpha$ und $(\beta\Phi\alpha)^s = \beta\Phi^s\alpha$.

(d) Für $\Phi \in CB(B(\mathcal{H}))$, $\mathcal{H}$ Hilbertraum, gilt: $\Phi \in CB^s(B(\mathcal{H})) \Leftrightarrow \Phi|_{K(\mathcal{H})} \equiv 0$.

---

[16] Es bezeichne M_* den (eindeutigen) Prädual von M. Dann gilt die ℓ_1-direkte Summen-Zerlegung

$$M^* = M_* \oplus_{\ell_1} (M^*)^s$$

in normale (d.h. w^*-stetige) und singuläre Funktionale. [In der Literatur findet man $M_*^\perp$ statt M^{*s}, passend zu $M_*(= M^{*\sigma})$.] Analog heißt $\Phi \in B(M,N)$, M, N von Neumann-Algebren, **normal** (d.h. w^*-w^*-stetig), falls $\Phi^*(N_*) \subset M_*$, und **singulär**, falls $\Phi^*(N_*) \subset M^{*s}$.

Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A_1, A_2 \subset B(\mathcal{H})$ C^*-Algebren mit $\mathbb{1}_{\mathcal{H}} \in A_1, A_2$. Dann erhält man [Pet97, Prop. 4.2.5]:

$$CB^{\sigma}_{(A_1,A_2)}(B(\mathcal{H})) \overset{\text{cb}}{\cong} CB_{(A_1,A_2)}(K(\mathcal{H}), B(\mathcal{H})) \tag{2}$$

$$CB^{s}_{(A_1,A_2)}(B(\mathcal{H})) \overset{\text{cb}}{\cong} CB_{(A_1,A_2)}(Q(\mathcal{H}), B(\mathcal{H})) \tag{3}$$

vollständig isometrisch, wobei $Q(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$ die Calkin-Algebra bezeichnet.

Sei X ein beliebiger Operatorraum. Dann läßt sich der Raum der vollständig beschränkten (A_1, A_2)-Modulhomomorphismen von X in $B(\mathcal{H})$ wie folgt mit dem Dual eines Modul-Haagerup-Tensorproduktes identifizieren ([Pet97, p. 67], vgl. auch [ER91, Cor. 4.6], [Ble92b, Prop. 2.3]):

$$CB_{(A_1,A_2)}(X, B(\mathcal{H})) \overset{\text{cb}}{\cong} (R_{\overline{\mathcal{H}}} \otimes_{hA_1} X \otimes_{hA_2} C_{\mathcal{H}})^*$$

vollständig isometrisch. Damit erkennt man $CB(B(\mathcal{H}))$ selbst und, mit Blick auf (2), (3), ebenso $CB^{\sigma}_{(A_1,A_2)}(B(\mathcal{H}))$ und $CB^{s}_{(A_1,A_2)}(B(\mathcal{H}))$ als duale Operatorräume [Pet97, p. 70].

4.3 Operatoralgebren

Analog zu konkreten Operatorräumen definiert man (vgl. [BRS90, Def. 1.1]): Eine **Operatoralgebra** ist eine abgeschlossene, nicht notwendig selbstadjungierte Unteralgebra X in $B(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

Beispiel: Für selbstadjungierte X gibt es die Theorie der C^*-Algebren.

Entsprechend dem Operatorraum-Fall kann man aber auch umgekehrt Banachalgebren betrachten, die zugleich Operatorräume sind und eine dieser Struktur adäquate Multiplikation tragen. Diese liefern eine abstrakte Charakterisierung der (konkreten) Operatoralgebren (s.u.: Analogon zum Satz von Ruan).

Sind X,Y,Z Operatorräume, $\Phi : X \times Y \to Z$ bilinear, so definiert (vgl.: Amplifikation bilinearer Abbildungen)

$$\begin{aligned} \Phi^{(n,l)} : M_{n,l}(X) \times M_{l,n}(Y) &\to M_n(Z) \\ ([x_{ij}], [y_{jk}]) &\mapsto \left[\sum_{j=1}^{l} \Phi(x_{ij}, y_{jk}) \right] \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

eine bilineare Abbildung, die **bilineare Amplifikation**[17] von Φ.

Φ heißt **vollständig beschränkt**, falls $\|\Phi\|_{\text{cb}} := \sup_n \|\Phi^{(n,n)}\| < \infty$, und **vollständig kontraktiv**, falls $\|\Phi\|_{\text{cb}} \leq 1$.[18] Man beachte bei dieser Definition auch den Zugang in: Vollständig beschränkte bilinearen Abbildungen.

[17] In der Literatur, etwa [BRS90, p. 190], wird häufig die bilineare Amplifikation $\Phi^{(n,n)}$ als *die* Amplifikation bezeichnet und mit $\Phi^{(n)}$ notiert.

[18] Zur Erklärung der vollständigen Beschränktheit von bilinearen Abbildungen genügt es, nur die $\Phi^{(n,n)}$ statt aller $\Phi^{(n,l)}$ zu betrachten; dies findet man häufig in der Literatur über vollständig beschränkte bi- und analog multilineare Abbildungen [BRS90, p. 190], [CES87, p. 281].

[Bei Banachalgebren mit Eins e soll fortan $\|e\| = 1$ gelten.] Ein Operatorraum $(X, \|\cdot\|_n)$ mit bilinearer, vollständig kontraktiver, assoziativer Abbildung $m: X \times X \to X$, der Multiplikation, heißt abstrakte Operatoralgebra (vgl. [BRS90, Def. 1.4]). Dabei ist auf $M_n(X)$ die Verknüpfung gerade die Matrizenmultiplikation m_n.
Im unitalen Fall ist m automatisch assoziativ [BRS90, Cor. 2.4].

Es gilt ein Analogon zum Satz von Ruan ([Ble95, Thm. 2.1], vgl. auch [BRS90, Thm. 3.1]): *Sei A unitale Banachalgebra und Operatorraum. Dann ist A vollständig isometrisch isomorph zu einer Operatoralgebra genau dann, wenn die Multiplikation auf A vollständig kontraktiv ist.*

Hieraus folgert man die Stabilitätsaussage: *Der Quotient einer Operatoralgebra mit einem abgeschlossenen Ideal ist wiederum eine Operatoralgebra* [BRS90, Cor. 3.2].
Mit Hilfe dessen gewinnt man das Resultat: *Die Klasse der Operatoralgebren ist stabil unter komplexer Interpolation* [BLM95, (1.12), p. 320].

Allgemeiner als im obigen Satz vom Ruan-Typ gilt [Ble95, Thm. 2.2]: Sei A Banachalgebra und Operatorraum. Dann ist A vollständig isomorph zu einer Operatoralgebra genau dann, wenn die Multiplikation auf A vollständig beschränkt ist. (Vgl. die Beispiele!)

Für einen Operatorraum X ist die Algebra $CB(X)$ zwar stets eine Banachalgebra, im allgemeinen jedoch keine Operatoralgebra. Genauer gilt für einen Operatorraum X folgendes Kriterium [Ble95, Thm. 3.4]: $CB(X)$ mit der Komposition als Multiplikation ist vollständig isomorph zu einer Operatoralgebra genau dann, wenn X vollständig isomorph zu einem Spalten-Hilbertraum ist. – Analoges besteht für den isometrischen Fall; will sagen:

$$CB(X) \overset{\text{cb}}{=} B(\mathcal{H}).$$

Seien $A \subset B(\mathcal{H})$ und $B \subset B(\mathcal{K})$ ($\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ Hilberträume) Operatoralgebren, wobei $\mathbb{1}_{B(\mathcal{H})} \in A$, $\mathbb{1}_{B(\mathcal{K})} \in B$. Dann ist jede unitale vollständige Isometrie $\varphi: A \to B$ bereits ein Algebrenhomomorphismus [ER90b, Prop. 3.1]. Man beachte, daß hierbei die Normabgeschlossenheit der Operatoralgebren A und B wesentlich ist.

Beispiele

Im folgenden versehen wir die Räume ℓ_p $(1 \le p \le \infty)$ mit dem punktweisen Produkt und betrachten sie so als Banachalgebren. Auf den Schatten-Klassen S_p $(1 \le p \le \infty)$ betrachten wir entweder die übliche Multiplikation oder das Schur-Produkt.

1. *Der Raum ℓ_2* [BLM95, Thm. 2.1]

   Mit den nachstehenden Operatorraum-Strukturen ist ℓ_2 vollständig isometrisch isomorph zu einer Operatoralgebra: $\mathcal{R}_{\ell_2}$, $\mathcal{C}_{\ell_2}$, OH_{ℓ_2}, $\mathcal{R}_{\ell_2} \cap \mathcal{C}_{\ell_2}$, MAX_{ℓ_2}.
   Allgemein ist der Raum ℓ_2 vollständig isometrisch isomorph zu einer Operatoralgebra, wenn man ihn mit einer Operatorraum-Struktur versieht, die sowohl $\mathcal{R}_{\ell_2}$ als auch $\mathcal{C}_{\ell_2}$ dominiert.

   Mit den nachstehenden Operatorraum-Strukturen ist ℓ_2 nicht vollständig isomorph zu einer Operatoralgebra: $\mathcal{R}_{\ell_2} + \mathcal{C}_{\ell_2}$, MIN_{ℓ_2}.

Allgemein ist der Raum ℓ_2 nicht vollständig isomorph zu einer Operatoralgebra, wenn er eine Operatorraum-Struktur trägt, die sowohl von $\mathcal{R}_{\ell_2}$ als auch von $\mathcal{C}_{\ell_2}$ dominiert wird.

2. *Die Räume*[19] $MIN(\ell_p)$, $MAX(\ell_p)$ *und* $O\ell_p = (MIN(\ell_\infty), MAX(\ell_1))_{\frac{1}{p}}$

   In den Randfällen $p = 1$ resp. $p = \infty$ erhält man zwei gegensätzliche Resultate [BLM95, Thm. 3.1]:

   (a) Mit jeder beliebigen Operatorraum-Struktur ist ℓ_1 vollständig isometrisch isomorph zu einer Operatoralgebra.

   (b) $MIN(\ell_\infty)$ ist bis auf vollständige Isomorphie die einzige Operatoralgebra-Struktur auf ℓ_∞.

   Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt (vgl. [BLM95, Thm. 3.4]):

   (a) $MIN(\ell_p)$ ist vollständig isomorph zu einer Operatoralgebra genau dann, wenn $p = 1$ oder $p = \infty$.

   (b) $MAX(\ell_p)$ ist im Falle $1 \leq p \leq 2$ vollständig isometrisch isomorph zu einer Operatoralgebra. Sonst ist $MAX(\ell_p)$ nicht vollständig isomorph zu einer Operatoralgebra.

   Dagegen liefert die durch komplexe Interpolation erhaltene Operatorraum-Struktur auf den ℓ_p-Räumen stets die einer Operatoralgebra. Genauer [BLM95, Cor. 3.3]:

   Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ ist $O\ell_p$ vollständig isometrisch isomorph zu einer Operatoralgebra.

3. *Die Schatten-Klassen* S_p

   Wir schreiben OS_p für die Operatorraum-Struktur, die G. Pisier auf S_p eingeführt hat. Man erhält diese Operatorraum-Struktur durch komplexe Interpolation zwischen $S_\infty = K(\ell_2)$ und $S_1 = K(\ell_2)^*$.

   (a) Betrachten wir zunächst das gewöhnliche Produkt auf den Schatten-Klassen S_p. Hierfür ergibt sich das nachstehende negative Resultat [BLM95, Thm. 6.3]: Für kein $1 \leq p < \infty$ ist der Operatorraum OS_p mit dem gewöhnlichen Produkt vollständig isomorph zu einer Operatoralgebra.

   (b) Betrachten wir nun das Schur-Produkt auf den Schatten-Klassen S_p. Hiermit sind, sogar für verschiedene Operatorraum-Strukturen, positive Ergebnisse möglich:

      (b1) $MAX(S_p)$ mit dem Schur-Produkt ist im Falle $1 \leq p \leq 2$ vollständig isometrisch isomorph zu einer Operatoralgebra [BLM95, Thm. 6.1].

[19] Zur Bildung der Operatorräume $O\ell_p$ siehe das Kapitel über komplexe Interpolation.

(b2) OS_p mit dem Schur-Produkt ist im Falle $2 \leq p \leq \infty$ vollständig isometrisch isomorph zu einer Operatoralgebra [BLM95, Cor. 6.4].

Man beachte: Der Randfall OS_1 (und ebenso OS_1^{op}) ist weder mit dem gewöhnlichen noch mit dem Schur-Produkt vollständig isomorph zu einer Operatoralgebra [BLM95, Thm. 6.3].

5 Tensorprodukte

Viele klassische Räume von Abbildungen kann man als Operatorraum-Tensorprodukte einfacher Operatorräume interpretieren. Operatorraum-Tensorprodukte haben teilweise bessere Eigenschaften als ihre Vorbilder in der Banachraumtheorie. Sie ermöglichen so Ergebnisse, die in der Banachraumtheorie nicht lösbar waren (z.B. [ER90a, Thm. 3.2]).

Das injektive Operatorraum-Tensorprodukt $\overset{\vee}{\otimes}$ ist das gröbste[20] und das projektive Operatorraum-Tensorprodukt $\overset{\wedge}{\otimes}$ das feinste[21] Operatorraum-Tensorprodukt [BP91, Prop. 5.10]. Vielfältige Anwendungen in der Theorie der Operatorräume und der vollständig beschränkten Abbildungen hat das Haagerup-Tensorprodukt $\otimes_h$.

5.1 Operatorraum-Tensorprodukte

Ein Operatorraum-Tensorprodukt entsteht durch Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes bezüglich einer Operatorraum-Tensornorm.

Eine **Operatorraum-Tensornorm** $\|\cdot\|_\alpha$ versieht für jedes Paar (X,Y) von Operatorräumen das algebraische Tensorprodukt $X \otimes Y$ mit der Struktur eines matrixnormierten Raumes, so daß die nachstehenden zwei Eigenschaften gelten [BP91, Def. 5.9].

Der durch Vervollständigung entstehende Operatorraum heißt α-**Operatorraum-Tensorprodukt** von X und Y und wird mit $X \otimes_\alpha Y$ bezeichnet.

1. *Für die komplexen Zahlen gilt*

$$\mathbb{C} \otimes_\alpha \mathbb{C} = \mathbb{C}.$$

2. *Für alle $S \in CB(X_1, X_2)$ und $T \in CB(Y_1, Y_2)$ hat der Operator $S \otimes T : X_1 \otimes Y_1 \to X_2 \otimes Y_2$ eine stetige Fortsetzung*

$$S \otimes_\alpha T \in CB(X_1 \otimes_\alpha Y_1, X_2 \otimes_\alpha Y_2).$$

Die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes_\alpha : CB(X_1, X_2) \times CB(Y_1, Y_2) &\to CB(X_1 \otimes_\alpha Y_1, X_2 \otimes_\alpha Y_2) \\ (S,T) &\mapsto S \otimes_\alpha T \end{aligned}$$

[20] D.h., die injektive Operatorraum-Tensornorm ist die kleinste Operatorraum-Tensornorm.
[21] D.h., die projektive Operatorraum-Tensornorm ist die größte Operatorraum-Tensornorm.

ist allgemein vollständig kontrahierend.[22]

Man kann die Forderung 2 durch die Forderungen 3 und 4 ersetzen.[23]

3. *Ein Operatorraum-Tensorprodukt $\otimes_\alpha$ ist funktoriell: Für alle $S \in CB(X_1, X_2)$ und $T \in CB(Y_1, Y_2)$ hat der Operator $S \otimes T : X_1 \otimes Y_1 \to X_2 \otimes Y_2$ eine stetige Fortsetzung*
$$S \otimes_\alpha T \in CB(X_1 \otimes_\alpha Y_1, X_2 \otimes_\alpha Y_2),$$
und es gilt
$$\|S \otimes_\alpha T\|_{\mathrm{cb}} \leq \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}}.$$
Anmerkung: Dann gilt sogar $\|S \otimes_\alpha T\|_{\mathrm{cb}} = \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}}$.

4. *Der algebraische shuffle-Isomorphismus $M_p(X) \otimes M_q(Y) \cong M_{pq}(X \otimes Y)$ hat eine stetige Fortsetzung*
$$\mathbb{M}_p(X) \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y) \to \mathbb{M}_{pq}(X \otimes_\alpha Y).$$
Diese shuffle-Abbildung des Operatorraum-Tensorproduktes ist vollständig kontrahierend.

Äquivalent zu 4 ist, daß die beiden *shuffle*-Abbildungen
$$\begin{aligned} \mathbb{M}_p(X) \otimes_\alpha Y &\to \mathbb{M}_p(X \otimes_\alpha Y), \\ X \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y) &\to \mathbb{M}_q(X \otimes_\alpha Y) \end{aligned}$$

[22] D.h., wenn $[S_{ij}] \in M_p(CB(X_1, X_2))$, $[T_{kl}] \in M_q(CB(Y_1, Y_2))$, $p, q \in \mathbb{N}$, so gilt für den Operator
$$[S_{ij} \otimes_\alpha T_{kl}] \in M_{pq}(CB(X_1 \otimes_\alpha Y_1, X_2 \otimes_\alpha Y_2))$$
die Normabschätzung
$$\|[S_{ij} \otimes T_{kl}]\|_{\mathrm{cb}} \leq \|[S_{ij}]\|_{\mathrm{cb}} \|[T_{kl}]\|_{\mathrm{cb}}.$$
Anmerkung: Hierin gilt sogar die Gleichheit.

[23] (2)$\Rightarrow$(3),(4): Die Bedingung (3) ist ein Spezialfall von (2). Es seien $I \in M_p(CB(\mathbb{M}_p(X), X))$, $J \in M_q(CB(\mathbb{M}_q(Y), Y))$ Matrizen, die algebraisch die identischen Abbildungen der zugrundeliegenden Vektorräume $M_p(X)$ bzw. $M_q(Y)$ sind. Nach Voraussetzung (2) gilt
$$\begin{aligned} I \otimes_\alpha J &\in M_{pq}(CB(\mathbb{M}_p(X) \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y), X \otimes_\alpha Y)) = M_1(CB(\mathbb{M}_p(X) \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y), \mathbb{M}_{pq}(X \otimes_\alpha Y))), \\ \|I \otimes_\alpha J\|_{\mathrm{cb}} &\leq \|I\|_{\mathrm{cb}} \|J\|_{\mathrm{cb}} = 1. \end{aligned}$$
Nun ist $I \otimes_\alpha J : \mathbb{M}_p(X) \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y) \to \mathbb{M}_{pq}(X \otimes_\alpha Y)$ die *shuffle*-Abbildung aus (4).

(3),(4)$\Rightarrow$(2): Wenn $[S_{ij}] \in M_p(CB(X_1, X_2))$, $[T_{kl}] \in M_q(CB(Y_1, Y_2))$, $p, q \in \mathbb{N}$, so seien $S \in CB(X_1, \mathbb{M}_p(X_2))$, $T \in CB(Y_1, \mathbb{M}_q(Y_2))$ die entsprechenden Operatoren. Nach (3) gilt
$$\begin{aligned} S \otimes_\alpha T &\in CB(X_1 \otimes_\alpha Y_1, \mathbb{M}_p(X_2) \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y_2)), \\ \|S \otimes_\alpha T\|_{\mathrm{cb}} &\leq \|S\|_{\mathrm{cb}} \|T\|_{\mathrm{cb}} = \|[S_{ij}]\|_{\mathrm{cb}} \|[T_{kl}]\|_{\mathrm{cb}}. \end{aligned}$$
Wenden wir nun die *shuffle*-Abbildung $A : \mathbb{M}_p(X_2) \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y_2) \to \mathbb{M}_{pq}(X_2 \otimes_\alpha Y_2)$ an, so folgt aus (4)
$$\begin{aligned} [S_{ij} \otimes_\alpha T_{kl}] = A(S \otimes_\alpha T) &\in M_1(CB(X_1 \otimes_\alpha Y_1, \mathbb{M}_{pq}(X_2 \otimes_\alpha Y_2))) = M_{pq}(CB(X_1 \otimes_\alpha Y_1, X_2 \otimes_\alpha Y_2), \\ \|[S_{ij} \otimes_\alpha T_{kl}]\|_{\mathrm{cb}} &\leq \|S \otimes_\alpha T\|_{\mathrm{cb}} \leq \|[S_{ij}]\|_{\mathrm{cb}} \|[T_{kl}]\|_{\mathrm{cb}}. \end{aligned}$$
Also ist $\otimes_\alpha$ allgemein vollständig kontrahierend.

vollständig kontrahierend sind.

Operatorraum-Tensorprodukte können noch weitere spezielle Eigenschaften haben: *Ein Operatorraum-Tensorprodukt $\otimes_\alpha$ heißt*

symmetrisch, *wenn $X \otimes_\alpha Y \overset{\text{cb}}{=} Y \otimes_\alpha X$ eine vollständige Isometrie ist;*

assoziativ, *wenn $(X \otimes_\alpha Y) \otimes_\alpha Z \overset{\text{cb}}{=} X \otimes_\alpha (Y \otimes_\alpha Z)$ eine vollständige Isometrie ist;*

injektiv, *wenn für alle Unterräume $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ die Abbildung $X_1 \otimes_\alpha Y_1 \hookrightarrow X \otimes_\alpha Y$ eine vollständige Isometrie ist;*

projektiv, *wenn für alle Unterräume $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ die Abbildung $X \otimes_\alpha Y \to X/X_1 \otimes_\alpha Y/Y_1$ eine vollständige Quotientenabbildung ist;*

selbstdual, *wenn die algebraische Einbettung $X^* \otimes Y^* \subset (X \otimes_\alpha Y)^*$ eine vollständige isometrische Fortsetzung $X^* \otimes_\alpha Y^* \subset (X \otimes_\alpha Y)^*$ hat.*

In vielen Anwendungen tritt die Haagerup-Tensorprodukt auf. Es ist nicht symmetrisch, aber assoziativ, injektiv, projektiv und *selbstdual.*

Duales Operatorraum-Tensorprodukt

Ist $X \otimes_\alpha Y$ ein Operatorraum-Tensorprodukt, so kann man auf natürliche Weise das algebraische Tensorprodukt $X \otimes Y$ in $(X^* \otimes_\alpha Y^*)^*$ einbetten. Der Abschluß von $X \otimes Y$ in $(X^* \otimes_\alpha Y^*)^*$ heißt das **duale Operatorraum-Tensorprodukt** und wird mit $X \otimes_{\alpha^*} Y$ bezeichnet:

$$X \otimes_{\alpha^*} Y \subset (X^* \otimes_\alpha Y^*)^*.$$

$\|\cdot\|_{\alpha^*}$ bezeichnet die **duale Operatorraum-Tensornorm**. Das duale Operatorraum-Tensorprodukt $\otimes_{\alpha^*}$ ist ein Operatorraum-Tensorprodukt.

Eine Operatorraum-Tensornorm $\|\cdot\|_\alpha$ heißt **selbstdual**, wenn $\|\cdot\|_\alpha$ gleich der dualen Operatorraum-Tensornorm $\|\cdot\|_{\alpha^*}$ ist.

Kreuznormen

Eine Operatorraum-Norm $\|\cdot\|_\alpha$ auf $X \otimes Y$ heißt **Kreuznorm**, wenn $\|x \otimes y\|_{\alpha,pq} = \|x\|_p \, \|y\|_q$ für alle $p, q \in \mathbb{N}$, $x \in M_p(X)$, $y \in M_q(Y)$ gilt.

Für Kreuznormen ist $\mathbb{C} \otimes_\alpha X \overset{\text{cb}}{=} X$ vollständig isometrisch.

Zuweilen betrachtet man nur ein Operatorraum-Norm $\|\cdot\|_\alpha$ auf dem algebraischen Tensorprodukt zweier Operatorräume X und Y. Dann verlangt man zumindest die folgenden Eigenschaften (i)–(iii).[24] Operatorraum-Tensornormen haben immer diese Eigenschaften.

---

[24] Äquivalent zu (i)-(iii) ist, daß die bilinearen Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times Y &\to X \otimes_\alpha Y, \qquad && (x, y) \mapsto x \otimes y \\ X^* \times Y^* &\to (X \otimes_\alpha Y)^*, \qquad && (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi \end{aligned}$$

allgemein vollständig kontrahierend sind.

(i) $\|\cdot\|_\alpha$ *ist eine Kreuznorm.*

(ii) *Für Linearformen* $\varphi \in X^*$, $\psi \in Y^*$ *hat die Linearform*

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : X \otimes Y &\rightarrow \mathbb{C} \\ \langle x \otimes y, \varphi \otimes \psi \rangle &:= \langle x, \varphi \rangle \langle y, \psi \rangle \end{aligned}$$

für $x \in X$, $y \in Y$ *eine stetige lineare Fortsetzung auf* $X \otimes_\alpha Y$*.*

Die duale Operatorraum-Norm $\|\cdot\|_{\alpha^*}$ wird durch die vollständig isometrische Einbettung

$$X \otimes_{\alpha^*} Y \hookrightarrow (X^* \otimes_\alpha Y^*)^*$$

definiert.

(iii) *Die duale Norm* $\|\cdot\|_{\alpha^*}$ *ist eine Kreuznorm.*

Unter den Operatorraum-Normen auf $X \otimes Y$, für die $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_{\alpha^*}$ Kreuznormen sind, gibt es eine kleinste, die injektive Operatorraum-Tensornorm $\|\cdot\|_\vee$, und eine größte, die projektive Operatoraum-Tensornorm $\|\cdot\|_\wedge$ [BP91, Prop. 5.10]. Auf dem algebraischen Tensorprodukt $X \otimes Y$ kann man diese mit der injektiven Tensornorm $\|\cdot\|_\lambda$ und der projektiven Tensornorm $\|\cdot\|_\gamma$ normierter Räume vergleichen:

$$\|\cdot\|_\lambda \leq \|\cdot\|_{\vee,1} \leq \|\cdot\|_{\wedge,1} \leq \|\cdot\|_\gamma.$$

5.2 Injektives Operatorraum-Tensorprodukt

Durch Darstellungen der Operatorräume X in $B(\mathcal{H})$ und Y in $B(\mathcal{K})$ erhält man eine Darstellung des algebraischen Tensorprodukts von X und Y in $B(\mathcal{H} \otimes_2 \mathcal{K})$. Die so definierte Operatorraumstruktur ist unabhängig von der Darstellung und heißt **injektives**[25] **Operatorraum-Tensorprodukt** $X \overset{\vee}{\otimes} Y$ [BP91, p. 285]. Im Falle von C^*–Algebren stimmt also das injektive Operatorraumtensorprodukt mit dem minimalen C^*–Tensorprodukt überein.

Eine darstellungsunabhängige Formel [BP91, Thm. 5.1] für die injektive Operatorraum-Tensornorm von $u \in M_n(X \otimes Y)$ erhält man mit Hilfe der Dualität von Tensorprodukten

$$\|u\|_\vee = \sup \|\langle u, \varphi \otimes \psi \rangle\|_{M_{nkl}},$$

wobei $k, l \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathrm{Ball}(M_k(X^*))$, $\psi \in \mathrm{Ball}(M_l(Y^*))$ sind.

Faßt man wie üblich die Elemente des algebraischen Tensorprodukts als endlichrangige Operatoren auf, so erhält man die vollständig isometrischen Einbettungen [BP91, Cor. 5.2]

$$X \overset{\vee}{\otimes} Y \hookrightarrow CB(X^*, Y) \quad \text{bzw.} \quad X \overset{\vee}{\otimes} Y \hookrightarrow CB(Y^*, X).$$

[25] Andere Bezeichnungen sind *räumliches* Operatorraum-Tensorprodukt $X \otimes_{\min} Y$.

Die injektive Operatorraum-Tensornorm ist die die kleinste Kreuznorm, deren duale Norm ebenfalls eine Kreuznorm ist.

Das injektive Operatorraumtensorprodukt ist symmetrisch, assoziativ, injektiv, aber nicht projektiv [BP91, Cor. 5.2].

Die injektive Norm ist die duale Norm der projektiven Operatorraum-Tensornorm [BP91, Thm. 5.6]; i.a. ist aber die projektive Operatorraum-Tensornorm nicht dual zur injektiven Operatorraum-Tensornorm, selbst wenn einer der Räume endlichdimensional ist [ER90a, p. 168], [ER91, p. 264].

Formeln für das injektive Operatorraum-Tensorprodukt

Für normierte Räume E, F gilt vollständig isometrisch [BP91, Prop. 4.1]

$$MIN(E) \overset{\vee}{\otimes} MIN(F) \overset{\text{cb}}{=} MIN(E \otimes_\lambda F).$$

5.2.1 Exakte Operatorräume

Ein Operatorraum X heißt **exakt** [Pis95, §1], wenn mit der kurzen exakten Sequenz

$$0 \hookrightarrow K(\mathcal{H}) \hookrightarrow B(\mathcal{H}) \to Q(\mathcal{H}) \to 0$$

auch die Sequenz der injektiven Tensorprodukte

$$0 \hookrightarrow X \overset{\vee}{\otimes} K(\mathcal{H}) \hookrightarrow X \overset{\vee}{\otimes} B(\mathcal{H}) \to X \overset{\vee}{\otimes} Q(\mathcal{H}) \to 0$$ [26]

wieder exakt ist. Ein solcher Operatorraum läßt beliebige exakte Sequenzen von C^*-Algebren beim Tensorieren exakt (für C^*-Algebren siehe [Kir83]). Offensichtlich sind alle endlichdimensionalen Räume exakt.

Exaktheit vererbt sich auf Unterräume. Ebenso ist das injektive Tensorprodukt zweier exakter Operatorräume wieder exakt. Für alle exakten Räume X ist durch die Größe

$$\operatorname{ex}(X) = \|X \overset{\vee}{\otimes} Q(\mathcal{H}) \to (X \overset{\vee}{\otimes} B(\mathcal{H}))/(X \overset{\vee}{\otimes} K(\mathcal{H}))\|$$

ein Exaktheitsgrad gegeben, und es gilt $1 \leq \operatorname{ex}(X) < \infty$ [Pis95, §1], da die Abbildung

$$(X \overset{\vee}{\otimes} B(\mathcal{H}))/(X \overset{\vee}{\otimes} K(\mathcal{H})) \to X \overset{\vee}{\otimes} Q(\mathcal{H})$$

eine vollständige Kontraktion ist. Für nicht exakte Operatorräume X vereinbart man $\operatorname{ex}(X) = \infty$.

Für eine exakte C^*-Algebra A ist immer $\operatorname{ex}(A) = 1$. [27]

Für einen Operatorraum X gilt:

$$\operatorname{ex}(X) = \sup\{\operatorname{ex}(L) : L \subset X, \dim L < \infty\},$$

---

[26] $\mathcal{H}$ bezeichnet hier den separablen Hilbertraum.

[27] Eine Charakterisierung exakter C^*-Algebren findet sich in [Kir94] und [Kir95].

weshalb man sich bei der Untersuchung der Exaktheit auf endlichdimensionale Räume beschränken kann. Daraus folgt auch unmittelbar: $\mathrm{ex}(X_0) \leq \mathrm{ex}(X)$, wenn $X_0 \subset X$. Für endlichdimensionale Operatorräume läßt sich mit der vollständigen Variante der Banach-Mazur-Distanz

$$d_{CB}(X_1, X_2) = \inf\{\|\varphi\|_{\mathrm{cb}}\|\varphi^{-1}\|_{\mathrm{cb}}\}$$

(das Infimum wird dabei über alle Isomorphismen φ von X_1 nach X_2 gebildet) die Größe

$$d_{SK}(X) := \inf\{d_{CB}(X, L), \dim(L) = \dim(X), L \subset M_n, n \in \mathbb{N}\}$$

definieren[28].

Nach [Pis95, Thm. 1] gilt : $\mathrm{ex}(X) = d_{SK}(X)$, und es ist $\mathrm{ex}(X) \leq \sqrt{\dim(X)}$.

5.3 Projektives Operatorraum-Tensorprodukt

Das **projektive Operatorraumtensorprodukt** wird durch die universelle Eigenschaft [BP91, Def. 5.3]

$$CB(X \overset{\wedge}{\otimes} Y, Z) \overset{\mathrm{cb}}{=} JCB(X \times Y; Z)$$

charakterisiert. Dabei ist $JCB(X \times Y; Z)$ der Operatorraum der allgemein vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen.

Der Dual des projektiven Operatorraumtensorproduktes ist also der Raum der allgemein vollständig beschränkten Bilinearformen:

$$(X \overset{\wedge}{\otimes} Y)^* \overset{\mathrm{cb}}{=} JCB(X \times Y; \mathbb{C}) \overset{\mathrm{cb}}{=} CB(X, Y^*) \overset{\mathrm{cb}}{=} CB(Y, X^*).$$

Ein expliziter Ausdruck für die projektive Operatorraum-Tensornorm von $u \in M_n(X \otimes Y)$ ist (vgl. [ER91, Formel (2.10)])

$$\|u\|_\wedge = \inf\{\|\alpha\|\|x\|_p\|y\|_q\|\beta\| \ : \ u = \alpha(x \otimes y)\beta\},$$

wobei $p, q \in \mathbb{N}$, $x \in M_p(X)$, $y \in M_q(Y)$ und $\alpha \in M_{n,pq}$, $\beta \in M_{pq,n}$ sind.

Die projektive Operatorraum-Tensornorm ist symmetrisch, assoziativ und projektiv [ER91, p. 262]. Sie ist aber nicht injektiv.

Die projektive Operatorraum-Tensornorm ist die größte Operatorraum-Norm, die eine Kreuznorm ist [BP91, Thm. 5.5].

Ihre duale Norm ist die injektive Operatorraum-Tensornorm [BP91, Thm. 5.6]; i.a. ist aber die projektive Operatorraum-Tensornorm nicht dual zur injektiven Operatorraum-Tensornorm, selbst wenn einer der Räume endlichdimensional ist [ER90a, p. 168], [ER91, p. 264].

[28] Die Abkürzung SK steht für *Subspaces of* $K(\mathcal{H})$

Formeln für das projektive Operatorraum-Tensorprodukt

1. Für normierte Räume E, F gilt vollständig isometrisch [BP91, Prop. 4.1]

$$MAX(E) \overset{\wedge}{\otimes} MAX(F) \overset{\text{cb}}{=} MAX(E \otimes_\gamma F).$$

2. Für das projektive Operatorraum-Tensorprodukt von Spalten-Hilberträumen $\mathcal{C}$, Zeilen-Hilberträumen $\mathcal{R}$ und einem beliebigen Operatorraum X gilt [ER91], [Ble92b, Prop. 2.3]

   (i) $\mathcal{C}_\mathcal{H} \overset{\wedge}{\otimes} X \overset{\text{cb}}{=} X \otimes_h \mathcal{C}_\mathcal{H}$

   (ii) $\mathcal{R}_\mathcal{H} \overset{\wedge}{\otimes} X \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{R}_\mathcal{H} \otimes_h X$

   (iii) $\mathcal{C}_\mathcal{H} \overset{\vee}{\otimes} \mathcal{C}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_\mathcal{H} \otimes_h \mathcal{C}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_\mathcal{H} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{C}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{C}_{\mathcal{H}\otimes_2\mathcal{K}}$

   (iv) $\mathcal{R}_\mathcal{H} \overset{\vee}{\otimes} \mathcal{R}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{R}_\mathcal{H} \otimes_h \mathcal{R}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{R}_\mathcal{H} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{R}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{R}_{\mathcal{H}\otimes_2\mathcal{K}}$

   (v) $\mathcal{R}_{\overline{\mathcal{H}}} \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{C}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{R}_{\overline{\mathcal{H}}} \otimes_h \mathcal{C}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} T(\mathcal{K}, \mathcal{H})$,

   (vi) $\mathcal{R}_\mathcal{H} \overset{\wedge}{\otimes} X \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{C}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} \mathcal{R}_{\overline{\mathcal{H}}} \otimes_h X \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{C}_\mathcal{K} \overset{\text{cb}}{=} X \overset{\wedge}{\otimes} T(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

   (vii) $(\mathcal{R}_\mathcal{H} \overset{\wedge}{\otimes} X \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{C}_\mathcal{K})^* \overset{\text{cb}}{=} (\mathcal{R}_{\overline{\mathcal{H}}} \otimes_h X \overset{\wedge}{\otimes} \mathcal{C}_\mathcal{K})^* \overset{\text{cb}}{=} CB(X, B(\mathcal{K}, \mathcal{H}))$,

   wobei der Raum der Spurklasse-Operatoren $T(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ seine natürliche Operatorraumstruktur $T(\mathcal{H}, \mathcal{K}) :\overset{\text{cb}}{=} K(\mathcal{K}, \mathcal{H})^*$ trägt.

3. Es seien M, N von Neumann-Algebren und $M \overline{\otimes} N$ das von Neumann-Tensorprodukt[29]. Für die prädualen Räume gilt

$$M_* \overset{\wedge}{\otimes} N_* \overset{\text{cb}}{=} (M \overline{\otimes} N)_*$$

   vollständig isometrisch.

   Es seien G, H lokalkompakte topologische Gruppen und $VN(G)$, $VN(H)$ die Gruppen-von Neumann-Algebren. Es ist $VN(G) \overline{\otimes} VN(H) = VN(G \times H)$. Da man die Fourier-Algebra $A(G)$ mit dem Prädual der Gruppen-von Neumann-Algebra $VN(G)$ identifizieren kann [Eym64], folgt

$$A(G) \overset{\wedge}{\otimes} A(H) \overset{\text{cb}}{=} A(G \times H)$$

   vollständig isometrisch [ER90a].

[29] Wenn $M \subset B(\mathcal{H})$, $N \subset B(\mathcal{K})$ von Neumann-Algebren sind, dann ist $M \overline{\otimes} N$ der Abschluß des algebraischen Tensorproduktes $M \otimes N \subset B(\mathcal{H} \otimes_2 \mathcal{K})$ in der schwachen Operatortopologie.

5.4 Haagerup-Tensorprodukt

Das Haagerup-Tensorprodukt von C*-Algebren wurde von Effros und Kishimoto [EK87] eingeführt. Es verallgemeinert eine Untersuchung von U. Haagerup [Haa80].

Es seien A, B C*-Algebren in $B(\mathcal{H})$. Auf dem algebraischen Tensorprodukt $A \otimes B$ ist die *Haagerup–Tensornorm* definiert durch

$$\|u\|_h := \inf \left\{ \|\sum_{\nu=1}^n a_\nu a_\nu^*\|^{\frac{1}{2}} \, \|\sum_{\nu=1}^n b_\nu^* b_\nu\|^{\frac{1}{2}} \quad : \; u = \sum_{\nu=1}^n a_\nu \otimes b_\nu \right\},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_\nu \in A$, $b_\nu \in B$ sind.

Die Haagerup-Norm von $\sum_{\nu=1}^n a_\nu \otimes b_\nu \in A \otimes B$ ist gleich der cb–Norm des elementaren Operators $B(\mathcal{H}) \ni x \mapsto \sum_{\nu=1}^n a_\nu x b_\nu$.

Die folgende Definition liefert eine vollständig isometrische Einbettung $A \otimes_h B \hookrightarrow CB(B(\mathcal{H}))$.

Für Operatorräume X, Y ist die **Haagerup–Operatorraum-Tensornorm** von $u \in M_n(X \otimes Y)$ definiert durch (vgl. [ER91, Formel (2.11)], [BP91, Lemma 3.2])

$$\|u\|_h = \inf \|x\|_{n,l} \, \|y\|_{l,n},$$

wobei $l \in \mathbb{N}$, $x \in M_{n,l}(X)$, $y \in M_{l,n}(Y)$ sind und u gleich dem tensoriellen Matrixprodukt $u = x \odot y$ ist. Es gibt weitere nützliche Formeln 1 2 und 3 für die Haagerup-Norm.

Dem Haagerup-Tensorprodukt entsprechen die vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen. Für den Dual gilt

$$(X \otimes_h Y)^* \overset{\text{cb}}{=} CB(X \times Y; \mathbb{C}).$$

Für einen Operatorraum Z gilt vollständig isometrisch

$$CB(X \otimes_h Y; Z) \overset{\text{cb}}{=} CB(X \times Y; Z).$$

Das Haagerup–Tensorprodukt ist nicht symmetrisch, wie Beispiele zeigen. Es ist aber assoziativ, injektiv [PS87, p. 272; Thm. 4.4], [BP91, Thm. 3.6], projektiv [ER91, Thm. 3.1] und selbstdual [ER91, Thm. 3.2]. Also ist die Einbettung

$$X^* \otimes_h Y^* \hookrightarrow (X \otimes_h Y)^*$$

vollständig isometrisch.

Die stetige Fortsetzung der identischen Abbildung des algebraischen Tensorproduktes zweier Operatorräume X, Y vom Haagerup-Tensorprodukt in das injektive Tensorprodukt ist injektiv. Man hat also eine kanonische Einbettung

$$X \otimes_h Y \subset X \overset{\vee}{\otimes} Y.$$

Die komplexe Interpolation von Operatorräumen und die Bildung des Haagerup-Tensorproduktes vertauschen [Pis96, Thm. 2.3]. Es seien (X_0, X_1) und (Y_0, Y_1) verträgliche Paare von Operatorräumen. Dann ist $(X_0 \otimes_h Y_0, X_1 \otimes Y_1)$ ein verträgliches Paar von Operatorräumen und es gilt vollständig isometrisch

$$(X_0 \otimes_h Y_0, X_1 \otimes Y_1)_\vartheta \overset{\text{cb}}{=} (X_0, X_1)_\vartheta \otimes_h (Y_0, Y_1)_\vartheta$$

für $0 \leq \vartheta \leq 1$.

Auf normierten Räumen gibt es keine Tensornorm, die zugleich assoziativ, injektiv, projektiv, selbstdual ist. Das Haagerup-Tensorprodukt kann man als eine Verallgemeinerung des von Grothendieck eingeführten **H-Tensorproduktes**[30] normierter Räume E, F auffassen [BP91, pp. 277-279, Prop. 4.1]. Auf der Grundstufe gilt nämlich isometrisch:

$$\begin{aligned} MIN(E) \otimes_h MIN(F) &= E \otimes_H F, \\ MAX(E) \otimes_h MAX(F) &= E \otimes_{H^*} F. \end{aligned}$$

Die Nichtassoziativität des H-Tensorproduktes spiegelt sich darin wieder, daß im allgemeinen $MIN(E) \otimes_h MIN(F)$ und $MIN(E \otimes_H F)$ nicht vollständig isometrisch sind.

Formeln für das Haagerup-Tensorprodukt

1. Es gilt
$$\|u\|_h = \inf\{\textstyle\sum_{\kappa=1}^k \|x_\kappa\|\|y_\kappa\| \ : \ u = \sum_{\kappa=1}^k x_\kappa \odot y_\kappa\}$$
wobei $k, l \in \mathbb{N}$, $x_\kappa \in M_{n,l}(X)$, $y_\kappa \in M_{l,n}(Y)$ sind. Es reicht aber ein Summand [BP91, Lemma 3.2].

2. Für Elemente $u \in M_n(X \otimes Y)$ des algebraischen Tensorproduktes gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ und Elemente $x \in M_{n,l}(X)$, $y \in M_{l,n}(Y)$, so daß
$$\begin{aligned} u &= x \odot y \\ \|u\|_h &= \|x\|\|y\| \end{aligned}$$
gilt.

   Das Infimum in der Normformel ist in diesem Fall ein Minimum [ER91, Prop. 3.5].

3. Es gibt auch eine *Supremumsformel* für die Haagerup-Norm von $u \in M_n(X \otimes_h Y)$: [31]
$$\|u\|_h = \sup \|\langle u, \varphi \odot \psi\rangle\|_{M_{n^2}},$$
wobei $l \in \mathbb{N}$, $\varphi \in M_{n,l}(X^*)$, $\psi \in M_{l,n}(Y^*)$, $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ [ER91, Prop. 3.4].

4. Aus der Definition der Haagerup-Norm folgt leicht, daß die *shuffle*-Abbildung
$$\mathbb{M}_p(X) \otimes_h \mathbb{M}_q(Y) \to \mathbb{M}_{pq}(X \otimes_h Y)$$

[30] Diese Tensornorm ist auch als γ_2 bekannt [Pis86].

[31] Die Definition der tensoriellen Matrixmultiplikation $\varphi \odot \psi$ von Abbildungen φ, ψ und der der Amplifikation der Dualität von Tensorprodukten ergibt

$$(\varphi \odot \psi)(x \otimes y) = \langle x \otimes y, \varphi \odot \psi\rangle = \left[\sum_{j=1}^{l} \langle x \otimes y, \varphi_{ij} \otimes \psi_{jk}\rangle\right] = \varphi(x)\psi(y) \in M_n,$$

für $x \in X$, $y \in Y$.

vollständig kontrahierend ist. Das Haagerup-Tensorprodukt hat also die Eigenschaft 2 eines Operatorraum-Tensorproduktes.

Die *shuffle*-Abbildung ist aber im allgemeinen keine Isometrie, wie das folgende Beispiel zeigt:[32]

$$\mathbb{M}_n(C_l) \otimes_h \mathbb{M}_n(R_l) \overset{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_l(\mathbb{M}_n((T_n)) \neq \mathbb{M}_l(\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n)) \overset{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(C_l \otimes R_l)).$$

Da die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes_h : CB(X_1, X_2) \times CB(Y_1, Y_2) &\to CB(X_1 \otimes_h X_2, Y_1 \otimes_h Y_2) \\ (S, T) &\mapsto S \otimes_h T \end{aligned}$$

kontrahierend ist, ist sie allgemein vollständig kontrahierend.[33]

Sie ist aber nach 7 sogar vollständig kontrahierend.

5. Im Falle von Spalten und Zeilen ist die *shuffle*-Abbildung sogar eine vollständige Isometrie. Es gilt das **Lemma von Blecher und Paulsen** [BP91, Prop. 3.5]:

$$C_n(X) \otimes_h R_n(Y) \overset{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_n(X \otimes_h Y).$$

Häufig reicht es, eine Beziehung für das Haagerup-Tensorprodukt auf der Grundstufe nachzuweisen und sie dann mit Hilfe der obigen Formel für alle Matrizenstufen zu folgern[34].

Spezialfälle des Lemmas von Blecher und Paulsen sind:

$$\begin{aligned} C_n \otimes_h R_n &\overset{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_n, \\ C_n \otimes_h X &\overset{\text{cb}}{=} C_n(X), \\ X \otimes_h R_n &\overset{\text{cb}}{=} R_n(X), \\ C_n \otimes_h X \otimes_h R_n &\overset{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_n(X). \end{aligned}$$

[32] Algebraisch hat man auf beiden Seiten die gleichen Räume von Matrizen. Auf der linken Seite erhält man aber die feinere Operatorraumstruktur $T_n := \mathbb{M}_n^*$ der Spurklasse

$$\begin{aligned} M_n(C_l) \otimes_h M_n(R_l) &\overset{\text{cb}}{=} C_l(\mathbb{M}_n) \otimes_h R_l(\mathbb{M}_n) \overset{\text{cb}}{=} M_l(\mathbb{M}_n \otimes_h \mathbb{M}_n) \\ &= \mathbb{M}_l(C_n \otimes_h R_n \otimes_h C_n \otimes_h R_n) = \mathbb{M}_l(C_n \otimes_h T_n \otimes_h R_n) \overset{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_l(M_n(T_n)). \end{aligned}$$

Dagegen ergibt die rechte Seite die gröbere Operatorraumstruktur M_n der Matrizen

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(C_l \otimes R_l) = \mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(M_l)) \overset{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_l(\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n)).$$

[33] Dies folgt aus der der Äquivalenz der Eigenschaft 2 mit den Eigenschaften 3 und 4 von Operatorraum-Tensorprodukten.

[34] Dieses Verfahren kann man bereits bei der Herleitung dieser vollständigen Isometrie anwenden. Man sieht leicht, daß auf der Grundstufe $C_n(X) \otimes R_n(Y) = M_n(X \otimes_h Y)$ isometrisch gilt. Hieraus folgt nun die vollständige Isometrie – für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt isometrisch:

$$\begin{aligned} M_p(C_n(X) \otimes_h R_n(Y)) &= C_p(C_n(X)) \otimes_h R_p(R_n(Y)) = C_{pn}(X) \otimes_h R_{pn}(Y) \\ &= M_{pn}(X \otimes_h Y) = M_p(\mathbb{M}_n(X \otimes_h Y)). \end{aligned}$$

6. Im Gegensatz zu 5 erhält man für $R_n \otimes_h C_n$ die feinere Operatorraumstruktur der Spurklasse
$$T_n := \mathbb{M}_n^* \overset{\text{cb}}{=} R_n \overset{\wedge}{\otimes} C_n \overset{\text{cb}}{=} R_n \otimes_h C_n.$$
Für einen Operatorraum X gilt [Ble92b, Prop. 2.3]:
$$\begin{aligned} R_n \otimes_h X &\overset{\text{cb}}{=} R_n \overset{\wedge}{\otimes} X, \\ X \otimes_h C_n &\overset{\text{cb}}{=} C_n \overset{\wedge}{\otimes} X, \\ R_n \otimes_h X \otimes_h C_n &\overset{\text{cb}}{=} T_n \overset{\wedge}{\otimes} X, \\ R_n \otimes_h X^* \otimes_h C_n &\overset{\text{cb}}{=} \mathbb{M}_n(X)^*. \end{aligned}$$

7. Nach Konstruktion ist die bilineare Abbildung $X \times Y \to X \otimes_h Y$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ vollständig kontrahierend.

   Also ist auch ihre Amplifikation, das tensorielle Matrixprodukt
$$\begin{aligned} \odot_h : \mathbb{M}_{n,l}(X) \times \mathbb{M}_{l,n}(Y) &\to \mathbb{M}_n(X \otimes_h Y) \\ (x, y) &\mapsto x \odot y, \end{aligned}$$
   vollständig kontrahierend. Die Linearisierung des tensoriellen Matrixprodukts ergibt die vollständige Kontraktion
$$\mathbb{M}_{n,l}(X) \otimes_h \mathbb{M}_{l,n}(Y) \to \mathbb{M}_n(X \otimes_h Y).$$

8. Die bilineare Abbildung
$$\begin{aligned} \otimes_h : CB(X_1, X_2) \times CB(Y_1, Y_2) &\to CB(X_1 \otimes_h Y_1, X_2 \otimes_h Y_2) \\ (S, T) &\mapsto S \otimes_h T \end{aligned}$$
   ist vollständig kontrahierend.[35][36]und erzeugt eine vollständige Kontraktion
$$CB(X_1, X_2) \otimes_h CB(Y_1, Y_2) \to CB(X_1 \otimes_h Y_1, X_2 \otimes_h Y_2).$$

[35]Es seien $S \in M_n(CB(X_1, X_2))$, $T \in M_n(CB(Y_1, Y_2))$. Für $x \in M_{p,q}(X_1)$, $y \in M_{q,p}(Y_1)$ ist
$$\begin{aligned} (S \odot T)^{(p)}(x \odot y) &= (S^{(p,q)}(x)) \odot (T^{(q,p)}(y)), \\ \|(S \odot T)^{(p)}(x \odot y)\|_{M_{pn}(X_2 \otimes_h Y_2)} &\leq \|S^{(p,q)}(x)\|\|T^{(q,p)}(y)\| \leq \|S\|_{\text{cb}}\|T\|_{\text{cb}}\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$
Nach Definition der Haagerupnorm in $X_1 \otimes_h Y_1$ ist also
$$\begin{aligned} \|(S \odot T)^{(p)}(x \odot y)\|_{M_{pn}(X_2 \otimes Y_2)} &\leq \|S\|_{\text{cb}}\|T\|_{\text{cb}}\|x \odot y\|_{M_p(X_1 \otimes_h Y_1)}, \\ \|S \odot_h T\|_{\text{cb}} &\leq \|S\|_{\text{cb}}\|T\|_{\text{cb}}. \end{aligned}$$
Das heißt, daß $\otimes_h$ vollständig kontrahierend ist.

[36]Die Amplifikation von $\otimes_h$ ist die tensorielle Matrixmultiplikation $\odot_h$ von Operatormatrizen.

9. Es seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume. Für den Spalten-Hilbertraum $\mathcal{C}$ und den Zeilen-Hilbertraum $\mathcal{R}$ erhält man als Haagerup-Tensorprodukt vollständig isometrisch den Raum der kompakten Operatoren K bzw. der Spurklasse-Operatoren[37] Operatoren T [ER91, Cor. 4.4]:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\overline{\mathcal{H}}} \otimes_h \mathcal{C}_{\mathcal{K}} &\overset{\text{cb}}{=} T(\mathcal{H}, \mathcal{K}), \\ \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \otimes_h \mathcal{R}_{\overline{\mathcal{H}}} &\overset{\text{cb}}{=} K(\mathcal{H}, \mathcal{K}). \end{aligned}$$

Das Beispiel zeigt auch, daß das Haagerup-Tensorprodukt nicht symmetrisch ist.

5.5 Vollständig beschränkte bilineare Abbildungen

Für bilineare Abbildungen von Operatorräumen gibt es zwei verschieden strenge Begriffe von *vollständiger Beschränktheit*, einerseits die **allgemein vollständig beschränkten** [BP91, Def. 5.3 (**jointly completely bounded**)] und andererseits die **vollständig beschränkten** bilinearen Abbildungen [CS87, Def. 1.1].

Die *allgemein vollständig beschränkten* bilinearen Abbildungen sind die umfassendere Klasse. Sie sind in Analogie zu den beschränkten Bilinearformen normierter Räume gebildet. Die *vollständig beschränkten* bilinearen Abbildungen haben ähnliche Darstellungs- und Fortsetzungssätze[38] wie vollständig beschränkte lineare Abbildungen. Den beiden Klassen von bilinearen Abbildungen entsprechen einerseits das projektive und andererseits das Haagerup-Tensorprodukt. Bei der Bildung der beiden Klassen verwendet man unterschiedliche Methoden, die Amplifikation einer bilinearen Abbildung $\Phi : X \times Y \to Z$ zu erklären.

Amplifikation

In der Literatur werden zwei unterschiedliche Definitionen der Amplifikation einer bilinearen Abbildung gebraucht.

Wir bezeichnen die erste Art 1 der Amplifikation als allgemeine Amplifikation. Diese allgemeine Amplifikation verwendet man, um aus einer einer Dualität $\langle X, X^* \rangle$ eine Matrix-Dualität zu bilden, die der Dualitätstheorie der Operatorräume zugrundeliegt. Die allgemeine Amplifikation führt auf den Begriff der allgemein vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen und auf das projektive Operatoraum-Tensorprodukt.

Die zweite Art 2 der Amplifikation nennen wir *die* Amplifikation einer bilinearen Abbildung. Diese Amplifikation führt auf den Begriff der vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen und auf das Haagerup Tensorprodukt.

Wir verwenden im folgenden die Symbole $\Phi : X \times Y \to Z$ für eine bilineare Abbildung und $\tilde{\Phi} : X \otimes Y \to Z$ für ihre Linearsierung.

---

[37] T trägt seine natürliche Operatorraumstruktur $T(\mathcal{H}, \mathcal{K}) :\overset{\text{cb}}{=} K(\mathcal{K}, \mathcal{H})^*$.

[38] Aus der Injektivität des Haagerup-Tensorproduktes folgen Fortsetzungssätze für vollständig beschränkte bilineare (und allgemeiner multilineare) Abbildungen.

Die beiden Definitionen der Amplifikationen einer bilinearen Abbildung Φ erfolgen mit Hilfe der **Amplifikation ihrer Linearisierung**:

$$\tilde{\Phi}^{(n)} : M_n(X \otimes Y) \to M_n(Z).$$

1. Die **allgemeine Amplifikation** von Φ ergibt die bilineare Abbildung

$$\Phi^{(p\times q)} : (x, y) \mapsto \tilde{\Phi}^{(pq)}(x \otimes y) = [\Phi(x_{ij}, y_{kl})] \in M_p(M_q(Z)) = M_{pq}(Z).$$

   der Operatormatrizen $x = [x_{ij}] \in M_p(X)$, $y = [y_{kl}] \in M_q(Y)$. Dabei ist das Tensorprodukt der Operatormatrizen erklärt als

$$x \otimes y = [x_{ij}] \otimes [y_{kl}] := [x_{ij} \otimes y_{kl}] \in M_{pq}(X \otimes Y) = M_p(M_q(X \otimes Y)).$$

2. Im Zusammenhang mit vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen verwendet man die **tensorielle Matrixmultiplikation** [Eff87]

$$x \odot y = [x_{ij}] \odot [y_{jk}] := \left[\sum_{j=1}^{l} x_{ij} \otimes y_{jk}\right] \in M_n(X \otimes Y)$$

   von Operatormatrizen $x = [x_{ij}] \in M_{n,l}(X)$, $y = [y_{jk}] \in M_{l,n}(Y)$.

   Weitere Formeln findet man im Abschnitt tensorielle Matrixmultiplikation.

   Die (n,l)-te **Amplifikation** einer bilinearen Abbildung $\Phi : X \times Y \to Z$ wird definiert als

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{(n,l)} : M_{n,l}(X) \times M_{l,n}(Y) & \to & M_n(Z) \\ (x, y) & \mapsto & \tilde{\Phi}^{(n)}(x \odot y) = \left[\sum_{j=1}^{l} \Phi(x_{ij}, y_{jk})\right] \in M_n(Z) \end{array}$$

   für $l, n \in \mathbb{N}$, $x = [x_{ij}] \in M_{n,l}(X)$, $y = [y_{jk}] \in M_{l,n}(Y)$. Wenn $n = l$, schreiben wir kurz[39]

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{(n)} := \Phi^{(n,n)} : M_n(x) \otimes M_n(Y) & \to & M_n(Z) \\ (x, y) & \mapsto & \Phi^{(n)}(x, y) := \tilde{\Phi}^{(n)}(x \odot y). \end{array}$$

Allgemein vollständige Beschränktheit

Es seien X, Y, Z Operatorräume. Eine bilineare Abbildung $\Phi : X \times Y \to Z$ heißt **allgemein vollständig beschränkt** [BP91, Def. 5.3 (**jointly completely bounded**)], wenn die Normen der allgemeinen Amplifikationen von Φ gleichmäßig beschänkt sind:

$$\|\Phi\|_{\mathrm{jcb}} := \sup \|\Phi^{(p\times q)}(x \otimes y)\| < \infty,$$

[39] In der Literatur wird die Amplifikation einer bilinearen Abbildung häufig nur für quadratische Operatormatrizen erklärt und als *die* Amplifikation $\Phi^{(n)}$ bezeichnet.

Im Lexikon benutzen wir auch die Amplifikation auf Rechteckmatrizen, da sich dann einige Aussagen, in denen man bei festen $n \in \mathbb{N}$ alle Amplifkationen $\Phi^{(n,l)}$, $l \in \mathbb{N}$, verwendet, genauer beschreiben lassen.

wobei $p, q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{Ball}(M_p(X))$, $y \in \mathrm{Ball}(M_q(Y))$ sind [BP91, Def. 5.3]. Die Norm $\|\Phi\|_{\mathrm{jcb}}$ ist gleich der Norm $\|\tilde{\Phi}\|_{\mathrm{cb}}$ der Linearisierung

$$\tilde{\Phi} : X \overset{\wedge}{\otimes} Y \to Z$$

auf dem projektiven Operatorraum-Tensorprodukt.

$JCB(X \times Y; Z)$ bezeichnet den Operatorraum der allgemein vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen. Die Matrizenstufen werden durch die Identifizierung

$$M_n(JCB(X \times Y; Z)) = JCB(X \times Y; \mathbb{M}_n(Z))$$

normiert.

Es gilt vollständig isometrisch

$$JCB(X \times Y; Z) \overset{\mathrm{cb}}{=} CB(X, CB(Y, Z)) \overset{\mathrm{cb}}{=} CB(Y, CB(X, Z)).$$

Durch Transposition $\Phi^t(y, x) := \Phi(x, y)$ erhält man eine vollständige Isometrie von $JCB(X \times Y; Z)$ mit $JCB(Y \times X; Z)$.

Vollständige Beschränktheit

Für die Definition der **vollständig beschränkten** bilinearen Abbildungen brauchen wir die Amplifikation $\Phi^{(n)}$, und die Linearisierung $\tilde{\Phi} : X \otimes Y \to Z$. und die tensorielle Matrixmultiplikation $x \odot y$ von Operatormatrizen x, y.

Eine bilineare Abbildung $\Phi : X \times Y \to Z$, $n \in \mathbb{N}$ heißt **vollständig beschränkt**, wenn

$$\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} := \sup \|\Phi^{(n)}(x, y)\| < \infty,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{Ball}(M_n(X))$, $y \in \mathrm{Ball}(M_n(Y))$ sind.

Die Norm $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}}$ ist gleich der Norm $\|\tilde{\Phi}\|_{\mathrm{cb}}$ der Linearisierung

$$\tilde{\Phi} : X \otimes_h Y \to Z$$

auf dem Haagerup-Tensorprodukt.

Ferner bilden wir die Normen $\|\Phi\|_n$ über die tensoriellen Matrixprodukte aller[40] rechteckigen Matrizen mit n Zeilen bzw. n Spalten:

$$\|\Phi\|_n := \sup \|\Phi^{(n,l)}(x, y)\|,$$

wobei $l \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{Ball}(M_{n,l}(X))$, $y \in \mathrm{Ball}(M_{l,n}(Y))$ sind.

Es gilt

$$\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \sup \{\|\Phi\|_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

[40] Man beachte, daß die Norm der bilinearen Abbildung

$$\Phi^{(n)} : M_n(x) \otimes M_n(Y) \to M_n(Z)$$

im allgemeinen kleiner ist als die Norm $\|\Phi\|_n$.

Die Norm $\|\Phi\|_n$ ist gleich der Norm $\|\tilde{\Phi}^{(n)}\|$ der Amplifikation der Linearisierung

$$\tilde{\Phi}^{(n)} : M_n(X \otimes_h Y) \to M_n(Z)$$

auf dem Haagerup-Tensorprodukt.

Eine Bilinearform Φ ist bereits vollständig beschränkt, wenn $\|\Phi\|_1 < \infty$ ist. Dann ist $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\Phi\|_1$.[41]

$CB(X \times Y; Z)$ bezeichnet den Operatorraum der vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen. Die Matrizenstufen werden durch die Identifizierung

$$M_n(CB(X \times Y; Z)) = CB(X \times Y; \mathbb{M}_n(Z))$$

normiert.

Den vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen entsprechen die vollständig beschränkten linearen Abbildungen des Haagerup-Tensorproduktes. Es gilt vollständig isometrisch

$$CB(X \times Y; Z) \stackrel{\mathrm{cb}}{=} CB(X \otimes_h Y; Z).$$

Vollständig beschränkte bilineare Abbildungen sind allgemein vollständig beschränkt. Die Einbettung $CB(X \times Y; Z) \subset JCB(X \times Y; Z)$ ist vollständig kontrahierend.

Die Transponierte $\Phi^t(y, x) := \Phi(x, y)$ einer vollständig beschränkten bilinearen Abbildung Φ ist im allgemeinen nicht vollständig beschränkt.[42]

Für vollständig beschränkte bilineare (und allgemeiner multilineare) Abbildungen $\Phi \in CB(A \times B; B(\mathcal{H}))$ gibt es Verallgemeinerungen des Darstellungssatzes von Stinespring.

Darstellung

Vollständig beschränkte Bilinearformen wurden zuerst auf C*-Algebren A, B untersucht [EK87]. Für eine Bilinearform $\Phi : A \times B \to \mathbb{C}$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(1) Φ ist vollständig beschränkt.

(2) Es gibt eine Konstante c, so daß

$$|\sum_{j=1}^{l} \Phi(a_j, b_j)| \leq c \, \| \sum_{j=1}^{l} a_j a_j^* \|^{\frac{1}{2}} \, \| \sum_{j=1}^{l} b_j^* b_j \|^{\frac{1}{2}}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$, $a_j \in A$, $b_j \in B$ gilt.

(3) Es gibt eine Konstante c und Zustände $\omega \in S(A)$, $\rho \in S(B)$, so daß

$$|\Phi(a, b)| \leq c \, \omega(aa^*)^{\frac{1}{2}} \rho(b^*b)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt.

---

[41] Allgemeiner gilt $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\Phi\|_1$ für bilineare Abbildungen in eine kommutative C*-Algebra A, da jede beschränkte lineare Abbildung in A automatisch vollständig beschränkt ist und $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\Phi\|$ [Loe75, Lemma 1]. Für bilineare Abbildungen $\Phi : X \times Y \to M_n(A)$ gilt $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\Phi\|_n$.

[42] Dem entspricht, daß das Haagerup-Tensorprodukt nicht symmetrisch ist.

(4) Es gibt *-Darstellungen $\pi_\omega : A \to B(\mathcal{H}_\omega)$ und $\pi_\rho : A \to B(\mathcal{H}_\rho)$ mit zyklischen Vektoren $\xi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$, $\xi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ und einen Operator $T \in B(\mathcal{H}_\omega, \mathcal{H}_\rho)$, so daß $\Phi(a,b) = \langle T\pi_\omega(a)\xi_\omega, \pi_\rho(b)\xi_\rho\rangle$ für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt.

Man kann $c = \|T\| = \|\Phi\|_{\mathrm{cb}}$ und $\|\xi_\omega\| = \|\xi_\rho\| = 1$ wählen.[43]

5.6 Modul-Tensorprodukte

Bisher wurde als einziges Beispiel eines Modul-Tensorproduktes von Operatormoduln das Modul-Haagerup-Tensorprodukt untersucht [Rua89] [BMP].

5.6.1 Modul-Haagerup-Tensorprodukt

Sei X ein rechter Operatormodul über einer C^*-Algebra A, Y ein linker A-Operatormodul, W ein Operatorraum. Eine bilineare Abbildung $\Psi : X \times Y \to W$ heißt **ausgeglichen**, wenn gilt:

$$\Psi(x \cdot a, y) = \Psi(x, a \cdot y)$$

für alle $x \in X, y \in Y, a \in A$.

Unter dem **Modul-Haagerup-Tensorprodukt** versteht man den bis auf vollständige isometrische Isomorphie eindeutig bestimmten Operatorraum $X \otimes_{hA} Y$ mit einer bilinearen, vollständig kontrahierenden, ausgeglichenen Abbildung

$$\otimes_{hA} : X \times Y \to X \otimes_{hA} Y,$$

so daß gilt: Für jede bilineare, vollständig beschränkte, ausgeglichene Abbildung

$$\Psi : X \times Y \to W$$

existiert eine eindeutig bestimmte lineare, vollständig beschränkte Abbildung

$$\widetilde{\Psi} : X \otimes_{hA} Y \to W$$

mit $\widetilde{\Psi} \circ \otimes_{hA} = \Psi$ und $\|\widetilde{\Psi}\|_{\mathrm{cb}} = \|\Psi\|_{\mathrm{cb}}$.

Das Modul-Haagerup-Tensorprodukt läßt sich auf verschiedene Weise realisieren:

1. Sei
$$N := \mathrm{lin}\{(x \cdot a) \otimes y - x \otimes (a \cdot y) \mid a \in A, x \in X, y \in Y\}.$$
Der Quotient $(X \otimes_h Y)/\overline{N}$ wird mit seinen kanonischen Matrixnormen zu einem Operatorraum, der die Definition von $X \otimes_{hA} Y$ erfüllt [BMP].

2. Es bezeichne $X \otimes_A Y$ das algebraische Modul-Tensorprodukt, d.h. den Quotienten $(X \otimes_{\mathrm{alg}} Y)/N$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $u \in M_n(X \otimes_A Y)$ definiert
$$p_n(u) := \inf\left\{ \|S\|\|T\| \,\middle|\, u = \left[\sum_{k=1}^{l} S_{ik} \otimes_A T_{kj}\right], l \in \mathbb{N}, S \in M_{nl}(X), T \in M_{ln}(Y) \right\}$$

[43] Weitere Literaturangaben findet man in [CS89, Sec. 4].

eine Halbnorm auf $M_n(X \otimes_A Y)$. Es gilt: $\mathrm{Kern}(p_n) = M_n(\mathrm{Kern}(p_1))$, und die Seminormen p_n induzieren eine Operatorraumnorm auf $(X \otimes_A Y)/\mathrm{Kern}(p_1)$ [Rua89]. Die Vervollständigung dieses Raumes erfüllt die Definition von $X \otimes_{hA} Y$ [BMP].

Beispiele

Sei X ein beliebiger Operatorraum. Dann läßt sich der Raum der vollständig beschränkten (A_1, A_2)-Modulhomomorphismen von X in $B(\mathcal{H})$ wie folgt mit dem Dual eines Modul-Haagerup-Tensorproduktes identifizieren ([Pet97, p. 67], vgl. auch [ER91, Cor. 4.6], [Ble92b, Prop. 2.3]):

$$CB_{(A_1,A_2)}(X, B(\mathcal{H})) \overset{\text{cb}}{=} (R_{\overline{\mathcal{H}}} \otimes_{hA_1} X \otimes_{hA_2} C_{\mathcal{H}})^*$$

vollständig isometrisch.

6 Vollständige lokale Reflexivität

Ein Operatorraum X heißt **vollständig lokal reflexiv** [EJR98, §1], falls es zu jedem endlichdimensionalen Teilraum $L \subset X^{**}$ ein Netz vollständig kontraktiver Abbildungen $\varphi_\alpha : L \to X$ gibt, das gegen die Einbettung von $L \to X^{**}$ in der Punkt-schwach*-Topologie konvergiert. [44]

Diese Eigenschaft überträgt sich auf beliebige Unterräume. Dagegen überträgt sie sich im allgemeinen nicht auf Quotienten; wird aber nach einem M-Ideal (z.B. zweiseitiges Ideal einer C^*-Algebra) faktorisiert, so ist auch der Quotientenraum vollständig lokal reflexiv [ER94, Thm. 4.6].

Ein beliebiger Banachraum ist stets lokal reflexiv (*Prinzip der lokalen Reflexivtät* [Sch70]).

Dagegen sind **nicht alle** Operatorräume vollständig lokal reflexiv. Etwa sind die volle C^*-Algebra der freien Gruppe mit zwei Erzeugern $C^*(F_2)$ und $B(\ell_2)$ nicht vollständig lokal reflexiv [EH85, p. 124-125].

Ein Operatorraum X ist genau dann vollständig lokal reflexiv, wenn eine (und damit jede) der folgenden Bedingungen für alle endlichdimensionalen Operatorräume L erfüllt ist [EJR98, §1, 4.4, 5.8]:

1. $L \overset{\vee}{\otimes} X^{**} \overset{\text{cb}}{=} (L \overset{\vee}{\otimes} X)^{**}$, worin $\overset{\vee}{\otimes}$ das injektive Operatorraumtensorprodukt bezeichnet,
2. $CB(L^*, X^{**}) \overset{\text{cb}}{=} CB(L^*, X)^{**}$,
3. $L^* \overset{\wedge}{\otimes} X^* \overset{\text{cb}}{=} (L \overset{\vee}{\otimes} X)^*$, worin $\overset{\wedge}{\otimes}$ das projektive Operatorraumtensorprodukt und das injektive Operatorraumtensorprodukt bezeichnen,

[44] Der Unterschied zur Definition von lokaler Reflexivität ist also, daß die φ_α nicht nur kontrahierend, sondern sogar vollständig kontrahierend sein sollen.

4. $CN(X, L^*) \stackrel{\text{cb}}{=} CI(X, L^*)$, worin $CN(\cdot, \cdot)$ die vollständig nuklearen und $CI(\cdot, \cdot)$ die vollständig integralen Abbildungen bezeichnen,

5. $\iota(\varphi) = \iota(\varphi^*)$ für alle $\varphi \in I(X, L^*)$.

Es reicht bei den ersten drei Unterpunkten, die gewöhnliche Isometrie nachzuweisen; aus ihr folgt hier die vollständige Isometrie.

Beipiele

Folgende Klassen von Operatorräumen sind vollständig lokal reflexiv [EJR98, 6.1, 6.2], [EH85, Prop. 5.4]:

1. reflexive Operatorräume (z.B. endlichdimensionale Operatorräume L),

2. nukleare C^*- Algebren (z.B. $K(\mathcal{H})$ oder kommutative C^*-Algebren),[45]

3. Präduale beliebiger von Neumann-Algebren, also insbesondere Duale beliebiger C^*-Algebren (z.B. $T(\mathcal{H}) = K(\mathcal{H})^* = B(\mathcal{H})_*$).

7 Vollständig beschränkte multilineare Abbildungen

Ausgehend vom linearen Fall läßt sich eine Theorie der **vollständig beschränkten multilinearen Abbildungen** entwickeln. Die Motivation hierfür liegt in erster Linie im Studium höherdimensionaler Hochschild-Kohomologie über C^*- und von Neumann-Algebren[46] [CES87].

Wiederum treten die wichtigsten Eigenschaften vollständig beschränkter multilinearer Abbildungen in **Darstellungs-**, **Fortsetzungs-** sowie **Zerlegungssätzen** zutage.

Seien $X_1, \ldots, X_k, Y$ Operatorräume und $\Phi : X_1 \times \ldots \times X_k \to Y$ eine multilineare Abbildung. Wir definieren [CES87, p. 281] durch

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)} : M_n(X_1) \times \ldots \times M_n(X_k) &\to M_n(Y) \\ (x_1, \ldots, x_k) &\mapsto \left[\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}=1}^{n} \Phi(x_1^{l,j_1}, x_2^{j_1,j_2}, \ldots, x_k^{j_{k-1},m}) \right], \end{aligned}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, eine multilineare Abbildung, die **n-te Amplifikation** von Φ.

Φ heißt **vollständig beschränkt**, falls $\|\Phi\|_{\text{cb}} := \sup_n \|\Phi^{(n)}\| < \infty$, und **vollständig kontraktiv**, falls $\|\Phi\|_{\text{cb}} \leq 1$. Man beachte bei dieser Definition auch den Zugang in: Vollständig beschränkte bilineare Abbildungen.

---

[45] Für die Theorie nuklearer C^*-Algebren siehe z.B. [Mur90] und [Pat88].

[46] Im Zusammenhang hiermit steht das seit geraumer Zeit offene Derivations- und äquivalent [Kir96, Cor. 1] hierzu das Ähnlichkeitsproblem für C^*-Algebren. Man beachte, daß im Rahmen der Operatorraum-Theorie positive Ergebnisse erzielt wurden. So zeigte Christensen in [Chr82], daß die inneren Derivationen von einer C^*-Algebra nach $B(\mathcal{H})$ genau die vollständig beschränkten Derivationen sind (Satz von Christensen).

Vollständig beschränkte multilineare Abbildungen werden häufig über ihre Linearisierungen auf dem Haagerup-Tensorprodukt studiert. Hierbei besteht der folgende enge Zusammenhang [PS87, Prop. 1.3]; vgl. auch [SS95, Prop. 1.5.1]:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Operatorräume und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Seien weiterhin

$$\Phi : X_1 \times \ldots \times X_n \to B(\mathcal{H})$$

eine multilineare Abbildung und

$$\varphi : X_1 \otimes_h \ldots \otimes_h X_n \to B(\mathcal{H})$$

die zugehörige Linearisierung. Dann ist Φ vollständig beschränkt genau dann, wenn φ es ist, und in diesem Falle gilt: $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\varphi\|_{\mathrm{cb}}$.

Siehe hierzu auch das Kapitel: Vollständig beschränkte bilineare Abbildungen.

Darstellungssatz[47] [PS87, Thm. 3.2]:
Seien $A_1, \ldots, A_k$ C^*-Algebren, $X_1 \subset A_1, \ldots, X_k \subset A_k$ Operatorräume und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei ferner $\Phi : X_1 \times \ldots \times X_k \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig kontraktive multilineare Abbildung. Dann existieren Hilberträume $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, *-Darstellungen $\pi_i : A_i \to B(\mathcal{K}_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$, Kontraktionen $T_i : \mathcal{K}_{i+1} \to \mathcal{K}_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ sowie zwei Isometrien $V_i : \mathcal{H} \to \mathcal{K}_i$ $(i = 1, k)$, so daß

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = V_1^* \pi_1(x_1) T_1 \pi_2(x_2) T_2 \cdots T_{k-1} \pi_k(x_k) V_k.$$

Nach [Yli90, p. 296], siehe das dort aufgeführte „Theorem“, vgl. auch [CES87], ist es möglich, auf die „bridging maps“ T_i zu verzichten; man erhält folgende einfachere Form des **Darstellungssatzes**:

Seien $A_1, \ldots, A_k$ C^*-Algebren, $X_1 \subset A_1, \ldots, X_k \subset A_k$ Operatorräume und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei ferner

$$\Phi : X_1 \times \ldots \times X_k \to B(\mathcal{H})$$

eine vollständig kontraktive multilineare Abbildung. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, *-Darstellungen $\pi_i : A_i \to B(\mathcal{K})$ sowie zwei Operatoren $V_1, V_k \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, so daß

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = V_1^* \pi_1(x_1) \pi_2(x_2) \cdots \pi_k(x_k) V_k.$$

Vgl. den linearen Fall !

Aus diesem Resultat gewinnt man den nachstehenden

Fortsetzungssatz vgl. [PS87, Cor. 3.3], und [SS95]:
Seien $X_i \subset Y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ Operatorräume und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei ferner $\Phi : X_1 \times \ldots X_k \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig beschränkte multilineare Abbildung. Dann existiert eine multilineare Abbildung $\widetilde{\Phi} : Y_1 \times \ldots \times Y_k \to B(\mathcal{H})$, welche Φ fortsetzt unter Erhaltung der cb-Norm: $\|\Phi\|_{\mathrm{cb}} = \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathrm{cb}}$.

Vgl. auch den linearen Fall !

---

[47] Für eine entsprechende Formulierung über die Linearisierung auf dem Haagerup-Tensorprodukt vgl. [PS87, Thm. 2.9] !

Seien nun A und B C^*-Algebren. Wir definieren [CS87, pp. 154-155] zu einer k-linearen Abbildung $\Phi : A^k \to B$ die k-lineare Abbildung $\Phi^* : A^k \to B$ durch

$$\Phi^*(a_1, \dots, a_k) := \Phi(a_k^*, \dots, a_2^*, a_1^*)^*,$$

wobei $a_1, \dots, a_k \in A$. Eine k-lineare Abbildung $\Phi : A^k \to B$ heißt **symmetrisch**, falls $\Phi = \Phi^*$. Automatisch gilt dann auch $\Phi^{(n)^*} = \Phi^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Eine k-lineare Abbildung $\Phi : A^k \to B$ heißt **vollständig positiv**, falls

$$\Phi^{(n)}(A_1, \dots A_k) \geq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $(A_1, \dots, A_k) = (A_k^*, \dots, A_1^*) \in M_n(A)^k$, wobei $A_{\frac{k+1}{2}} \geq 0$ für ungerades k.

Vorsicht: Im multilinearen Fall impliziert vollständige Positivität nicht notwendig vollständige Beschränktheit!

Im Falle von C^*-Algebren erhält man eine multilineare Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes für vollständig beschränkte symmetrische lineare Abbildungen:

Zerlegungssatz [CS87, Cor. 4.3]:
Seien A und B C^*-Algebren, B injektiv, und sei weiterhin

$$\Phi : A^k \to B$$

eine vollständig beschränkte symmetrische k-lineare Abbildung. Dann existieren vollständig beschränkte, vollständig positive k-lineare Abbildungen

$$\Phi_+, \Phi_- : A^k \to B,$$

so daß

$$\Phi = \Phi_+ - \Phi_- \quad \text{und} \quad \|\Phi\|_{\text{cb}} = \|\Phi_+ + \Phi_-\|_{\text{cb}}.$$

Vgl. auch den linearen Fall !

Für Bilinearformen auf kommutativen C^*-Algebren besteht das folgende Resultat über automatische vollständige Beschränktheit:

Sei A eine kommutative C^*-Algebra. Dann ist jede stetige Bilinearform $\Phi : A \times A \to \mathbb{C}$ automatisch vollständig beschränkt und

$$\|\Phi\| \leq \|\Phi\|_{\text{cb}} \leq K_G \|\Phi\|,$$

wobei K_G die Grothendieck-Konstante bezeichnet. Ferner ist K_G die bestmögliche solche Konstante.

8 Konvexität

Da in der Funktionalanalysis bei der Betrachtung normierter oder geordneter Vektorräume konvexe Mengen eine wichtige Rolle spielen, suchte man auch nach nichtkommutativen Verallgemeinerungen von Konvexität, die für Vektorräume von Operatoren geeignet sind. Für C^*-Algebren wurden C^*-konvexe Mengen eingeführt, für Operatorräume matrixkonvexe Mengen. Die These ist, daß die matrixkonvexen Mengen die konvexen Mengen der Operatorräume sind.

In der Konvexitätstheorie führt man ausgezeichnete Punkte, die sogenannten Extremalpunkte, ein und untersucht, wie man Punkte kompakter konvexer Mengen als Konvexkombination von Extremalpunkten darstellen kann. Die Ergebnisse dazu sind im Satz von Krein-Milman und dessen Verschärfungen, den Darstellungssätzen von Choquet, gegeben.

Gelten für nichtkommutative Konvexität analoge Aussagen? Die beiden Unterkapitel Matrixextremalpunkte und C^*-extremale Punkte fassen bisherige Antworten auf diese Frage zusammen.

Veröffentlichungen über nichtkommutative Konvexität sind unter anderem [EW97b], [WW99], [FZ98], [Mor94], [Fuj94].

8.1 Matrixkonvexität

Eine **Menge** K **von Matrizen über** V besteht aus je einer Teilmenge $K_n \subset M_n(V)$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$. Ist nicht für jedes n eine Menge $K_n \subset M_n(V)$ gegeben, so kann man dennoch von einer Menge von Matrizen sprechen, indem man fehlende Stufen als $\emptyset$ setzt.[48]

Eine Menge K von Matrizen über V heißt **matrixkonvex** [Wit84b], falls für alle $x \in K_n$ und $y \in K_m$

$$x \oplus y \in K_{n+m},$$

und für alle $x \in K_n$ und $\alpha \in M_{n,m}$ mit $\alpha^*\alpha = \mathbb{1}_m$

$$\alpha^* x \alpha \in K_m.$$

Eine Menge K von Matrizen über V heißt **absolut matrixkonvex** [EW97a], falls für alle $x \in K_n$ und $y \in K_m$

$$x \oplus y \in K_{n+m},$$

und für alle $x \in K_n$, $\alpha \in M_{n,m}$ und $\beta \in M_{m,n}$ mit $\|\alpha\|, \|\beta\| \leq 1$

$$\alpha x \beta \in K_m.$$

[48] Mit der Bezeichnung $M(V) = \bigcup\{M_n(V) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Menge K von Matrizen über V einfach eine Teilmenge von $M(V)$. Ihre Stufen K_n erhält man als $K_n = K \cap M_n(V)$.

Die folgenden Definitionen lesen sich dann so:
Sei $K \subset M(V)$. K heißt **matrixkonvex**, falls

$$K \oplus K \subset K \text{ und } \alpha^* K \alpha \subset K \text{ für alle Matrizen } \alpha \text{ mit } \alpha^*\alpha = \mathbb{1}.$$

K heißt **absolut matrixkonvex**, falls

$$K \oplus K \subset K \text{ und } \alpha K \beta \subset K \text{ für alle Matrizen } \alpha, \beta \text{ mit } \|\alpha\|, \|\beta\| \leq 1.$$

K heißt **Matrixkegel**, falls

$$K \oplus K \subset K \text{ und } \alpha^* K \alpha \subset K \text{ für alle Matrizen } \alpha.$$

Eine Menge K von Matrizen über V heißt **Matrixkegel** [Pow74], falls für alle $x \in K_n$ und $y \in K_m$

$$x \oplus y \in K_{n+m},$$

und für alle $x \in K_n$ und $\alpha \in M_{n,m}$

$$\alpha^* x \alpha \in K_m.$$

Eine Menge K von Matrizen über V ist genau dann matrixkonvex, falls alle Matrixkonvexkombinationen von Elementen von K wieder in K liegen. K ist genau dann absolut matrixkonvex,falls alle Matrixabsolutkonvexkombinationen von Elementen von K wieder in K liegen. Dabei ist eine **Matrixkonvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \in K_{k_i}$) eine Summe der Form $\sum_{i=1}^n \alpha_i^* x_i \alpha_i$ mit Matrizen $\alpha_i \in M_{k_i,j}$, so daß $\sum_{i=1}^n \alpha_i^* \alpha_i = \mathbb{1}_j$. Eine **Matrixabsolutkonvexkombination** von $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Summe der Form $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \beta_i$ mit Matrizen $\alpha_i \in M_{j,k_i}$ und $\beta_i \in M_{k_i,j}$, so daß $\sum_{i=1}^n \alpha_i \alpha_i^* \leq \mathbb{1}_j$ und $\sum_{i=1}^n \beta_i^* \beta_i \leq \mathbb{1}_j$.

Ist V ein topologischer Vektorraum, so sind topologische Begriffe stufenweise zu verstehen: Eine Menge K von Matrizen über V heißt zum Beispiel **abgeschlossen**, falls alle Stufen K_n abgeschlossen sind.

Beispiele

Matrixkonvexität

1. Die Einheitskugel eines Operatorraums X, gegeben durch alle $\mathrm{Ball}_n = \{x \in M_n(X) \mid \|x\| \leq 1\}$,[49] ist absolut matrixkonvex und abgeschlossen.

2. Die Menge der Matrixzustände einer unitalen C^*-Algebra A, gegeben durch alle $\mathrm{CS}(A)_n = \{\varphi : A \to M_n \mid \varphi$ vollständig positiv und unital$\}$, ist matrixkonvex und schwach-$*$-kompakt.

3. Ist A eine C^*-Algebra, so bilden die positiven Elemente $M_n(A)^+$ aller Stufen einen abgeschlossenen Matrixkegel.

8.1.1 Trennungssätze

Ein wichtiges Hilfsmittel der Theorie sind die folgenden **Trennungssätze**.

Sei $\langle V, W\rangle$ eine (nicht ausgeartete) Dualität von Vektorräumen. Dadurch sind V und W mit schwachen Topologien versehen und die Matrizenstufen mit der zugehörigen Produkttopologie. Zu $v = [v_{i,j}] \in M_n(V)$ und $w = [w_{k,l}] \in M_m(W)$ ist $\langle v, w\rangle$ erklärt als die Amplifikation der Dualität:

$$\langle v, w\rangle = [\langle v_{i,j}, w_{k,l}\rangle]_{(i,k),(j,l)}.$$

Man beachte, daß die Matrizen nicht total geordnet sind; $\not\leq$ bedeutet also nicht $>$.

Satz:[50] Sei $\langle V, W\rangle$ eine Dualität von Vektorräumen, K eine abgeschlossene Menge von Matrizen über V, und $v_0 \in M_n(V) \setminus K_n$.

[49] Also $\mathrm{Ball} = \{x \in M(X) \mid \|x\| \leq 1\}$.

[50] Aus diesem Satz kann man leicht die folgende schärfere Fassung der Teile a), b) und d) gewinnen:

a) [WW99, Thm. 1.6] Ist K matrixkonvex, so gibt es ein $w \in M_n(W)$ und $\alpha \in (M_n)_{\mathrm{sa}}$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ und $v \in K_m$

$$\mathrm{Re}\langle v, w\rangle \le \mathbb{1}_m \otimes \alpha, \text{ aber } \mathrm{Re}\langle v_0, w\rangle \not\le \mathbb{1}_n \otimes \alpha.$$

b) [EW97b, Thm. 5.4] Ist K matrixkonvex und $0 \in K_1$, so gibt es ein $w \in M_n(W)$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ und $v \in K_m$

$$\mathrm{Re}\langle v, w\rangle \le \mathbb{1}_{nm}, \text{ aber } \mathrm{Re}\langle v_0, w\rangle \not\le \mathbb{1}_{n^2}.$$

c) [Bet97, p. 57] Ist K ein Matrixkegel, so gibt es ein $w \in M_n(W)$ so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ und $v \in K_m$

$$\mathrm{Re}\langle v, w\rangle \le 0, \text{ aber } \mathrm{Re}\langle v_0, w\rangle \not\le 0.$$

d) [EW97a, Thm. 4.1] Ist K absolut matrixkonvex, so gibt es ein $w \in M_n(W)$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ und $v \in K_m$

$$\|\langle v, w\rangle\| \le 1, \text{ aber } \|\langle v_0, w\rangle\| > 1.$$

Ein Beweis des Satzes von Ruan beruht auf dem Trennungssatz für absolut matrixkonvexe Mengen, angewandt auf die Einheitskugel eines Operatorraums.

8.1.2 Bipolarensätze

Sei $\langle V, W\rangle$ eine Dualität von Vektorräumen und K eine Menge von Matrizen über V.

Die **Matrixpolare** von K ist eine Menge D von Matrizen über W, gegeben durch[51]

$$D_n = \{w \in M_n(W) \mid \mathrm{Re}\langle v, w\rangle \le \mathbb{1}_{nm} \text{ für alle } m \in \mathbb{N},\ v \in K_m\}$$

Die **absolute Matrixpolare** von K ist eine Menge D von Matrizen über W, gegeben durch[52]

$$D_n = \{w \in M_n(W) \mid \|\langle v, w\rangle\| \le 1 \text{ für alle } m \in \mathbb{N},\ v \in K_m\}$$

Analog sind Polaren von Mengen von Matrizen über W erklärt.

Es gelten die **Bipolarensätze**: Sei $\langle V, W\rangle$ eine Dualität von Vektorräumen und K eine Menge von Matrizen über V.

---

a) Ist K matrixkonvex, so gibt es ein $w \in M_n(W)$, $\alpha \in (M_n)_{\mathrm{sa}}$ und $\varepsilon > 0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ und $v \in K_m$

$$\mathrm{Re}\langle v, w\rangle \le \mathbb{1}_m \otimes (\alpha - \varepsilon \mathbb{1}_n), \text{ aber } \mathrm{Re}\langle v_0, w\rangle \not\le \mathbb{1}_n \otimes \alpha.$$

b) Ist K matrixkonvex und $0 \in K_1$, so gibt es ein $w \in M_n(W)$ und $\varepsilon > 0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ und $v \in K_m$

$$\mathrm{Re}\langle v, w\rangle \le (1-\varepsilon)\mathbb{1}_{nm}, \text{ aber } \mathrm{Re}\langle v_0, w\rangle \not\le \mathbb{1}_{n^2}.$$

d) Ist K absolut matrixkonvex, so gibt es ein $w \in M_n(W)$ und $\varepsilon > 0$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}$ und $v \in K_m$

$$\|\langle v, w\rangle\| \le 1 - \varepsilon, \text{ aber } \|\langle v_0, w\rangle\| > 1.$$

[51] $D = \{w \in M(W) \mid Re\langle v, w\rangle \le \mathbb{1} \text{ für alle } v \in K\}$

[52] $D = \{w \in M(W) \mid \|\langle v, w\rangle\| \le 1 \text{ für alle } v \in K\}$

a) [EW97b] K stimmt genau dann mit seiner Matrixbipolaren überein, wenn K abgeschlossen und matrixkonvex ist und $0 \in K_1$.

b) [EW97a] K stimmt genau dann mit seiner absoluten Matrixbipolaren überein, wenn K abgeschlossen und absolut matrixkonvex ist.

Die Matrixbipolare einer Menge K von Matrizen über V ist daher die kleinste abgeschlossene und matrixkonvexe Menge, die K und 0 enthält.

Die absolute Matrixbipolare einer Menge K von Matrizen über V ist daher die kleinste abgeschlossene und absolut matrixkonvexe Menge, die K enthält.

Damit erhält man eine Charakterisierung der Einheitskugeln von $MIN(E)$ und $MAX(E)$ für einen Banachraum E: Die Einheitskugel von $MIN(E)$ ist die absolute Matrixpolare der Menge von Matrizen $\mathrm{Ball}(E^*)$. Die Einheitskugel von $MAX(E)$ ist gegeben als die absolute Matrixbipolare der Menge von Matrizen $\mathrm{Ball}(E)$.

8.2 Matrixextremalpunkte

Sei V ein Vektorraum. Eine matrixkonvexe Menge von Matrizen über V wird kürzer matrixkonvexe Menge in V oder, noch kürzer, **m-konvexe** Menge in V genannt. Sei A eine Menge von Matrizen über V. Die **m-konvexe Hülle** von A ist die kleinste m-konvexe Menge in V, die A umfaßt. Ihr (komponentenweiser) Abschluß ist die kleinste abgeschlossene m-konvexe Menge, die A umfaßt, weil der Abschluß von m-konvexen Mengen wieder m-konvex ist. Zwei Elemente $x, y \in M_n(V)$ heißen **unitär äquivalent**, wenn es ein unitäres $u \in M_n$ gibt, so daß $x = u^*yu$ gilt. Sei $U(S)$ die Menge aller Elemente, die zu Elementen von $S \subset M_n(V)$ unitär äquivalent sind. $x \in M_n(V)$ wird **reduzibel** genannt, wenn es unitär äquivalent zu einer Blockmatrix $\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \in M_n(V)$ ist. Eine m-Konvexkombination $\sum_{i=1}^k \alpha_i^* x_i \alpha_i$ nennt man **eigentlich**, wenn alle α_i quadratisch und ungleich 0 sind.

Sei K eine m-konvexe Menge in V. Dann heißt $x \in K_n$ **strukturelles Element**[53] von K_n, wenn in allen eigentlichen m-Konvexkombinationen $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i^* x_i \alpha_i$ die Elemente $x_i \in K_n$ unitär äquivalent zu x sind [Fis96]. Die Menge der strukturellen Elemente von K_n heiße $\mathrm{str}(K_n)$. Die Menge der strukturellen Elemente von K ist die Menge von Matrizen über V, die aus $\mathrm{str}(K_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht.

Beispiel: Sei L ein Operatorsystem. Der verallgemeinerter Zustandsraum von L ist die m-konvexe Menge $\mathrm{CS}(L)$ im Dual L^*, die aus den Matrixzuständen

$$\mathrm{CS}(L)_n = \{\psi \mid \psi : L \to M_n \text{ vollständig positiv und unital}\}.$$

besteht. Der verallgemeinerte Zustandsraum ist schwach*-kompakt. Mit [CE77, Lemma 2.2] läßt sich zeigen, daß die strukturellen Elemente von $\mathrm{CS}(L)_n$ genau die reinen vollständig positiven und unitalen Abbildungen in $\mathrm{CS}(L)_n$ sind. Ferner gibt es zu jeder kompakten und m-konvexen Menge ein Operatorsystem, dessen verallgemeinerter

[53] Der Begriff „strukturelles Element“geht auf Morenz zurück [Mor94]. Eine weitere äquivalente Definition wird in [WW99] gegeben. Dort heißen die strukturellen Elemente jedoch „matrix extreme points“.

Zustandsraum mit dieser übereinstimmt [WW99, Prop. 3.5].

Sei V ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. $M_n(V)$ werde mit der Produkttopologie ausgestattet. Der **matrixkonvexe Satz von Krein-Milman** lautet nun: Sei K eine kompakte m-konvexe Menge in V. Dann ist K gleich der abgeschlossenen m-konvexen Hülle der Menge der strukturellen Elemente von K. Wenn V endlichdimensional ist, kann man auf den Abschluß verzichten.

In der anderen Richtung gilt folgender Satz: Sei K eine kompakte m-konvexe Menge in V. Sei S eine abgeschlossene Menge von Matrizen über V, so daß $S_n \subset K_n$ und $v^* S_l v \subset S_m$ für alle partiellen Isometrien $v \in M_{lm}$ und für alle $n, m, l \in \mathbb{N}$, $l \geq m$. Wenn die abgeschlossene m-konvexe Hülle von S gleich K ist, dann liegen alle strukturellen Elemente von K in S (vgl. [WW99], [Fis96]).

Für speziellere m-konvexe Mengen lassen sich diese Ergebnisse verschärfen. Eine m-konvexe Menge K in V heiße **einfach**[54], wenn $n \in \mathbb{N}$ und $A \subset M_n(V)$ existieren, so daß K gleich der m-konvexen Hülle von A ist. Für eine einfache m-konvexe Menge K gibt es $n \in \mathbb{N}$, so daß $\mathrm{str}(K_m) = \emptyset$ für alle $m > n$.

Sei K eine m-konvexe Menge in V. Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ heiße $x \in K_m$ **Matrix-Extremalpunkt von** K, wenn $x \in \mathrm{str}(K_m)$ und

$$x \notin \cup_{m<l} \mathbb{1}_{lm}^* \mathrm{str}(K_l) \mathbb{1}_{lm}$$

gilt [Fis96]. Die Menge sei die Menge von Matrizen über V, die aus allen Matrixextremalpunkten von K besteht. Damit gilt:

Sei K eine einfache, kompakte und m-konvexe Menge in V. Dann ist K gleich der abgeschlossenen m-konvexen Hülle ihrer Matrixextremalpunkte. Ist V endlichdimensional, so gilt schärfer, K ist die m-konvexe Hülle ihrer Matrixextremalpunkte. Zusätzlich läßt sich dann zeigen: Ist S eine Menge von Matrizen über V, die keine reduziblen Elemente enthält und deren m-konvexe Hülle gleich K ist, dann gilt $\text{m-ext}(K)_m \subset U(S_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ (vgl. [Mor94], [Fis96]).

Im allgemeinen kann $\text{m-ext}(K)$ für eine m-konvexe Menge K leer sein, auch wenn K kompakt ist. Als Beispiel sei der verallgemeinerte Zustandsraum $\mathrm{CS}(A)$ einer C^*-Algebra A genannt. Seine Matrixextremalpunkte sind genau die endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen von A. Diese müssen i. a. nicht existieren.

8.3 C^*-Konvexität

Eine **C^*-konvexe** Menge ist eine Teilmenge K einer unitalen C^*-Algebra A, so daß

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^* x_i a_i \in K$$

für alle $x_i \in K$ und $a_i \in A$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i = \mathbb{1}$.

[54] In [Fis96] heißen diese m-konvexen Mengen „endlich“.

Dabei heißt eine Summe der Form $\sum_{i=1}^n a_i^* x_i a_i$ **C^*-Konvexkombination**.

Eine **C^*-absolutkonvexe** Menge ist eine Teilmenge K einer C^*-Algebra A, so daß

$$\sum_{i=1}^n a_i^* x_i b_i \in K$$

für alle $x_i \in K$ und a_i, $b_i \in A$ mit $\sum_{i=1}^n a_i^* a_i$, $\sum_{i=1}^n b_i^* b_i \leq \mathbb{1}$ [Mag98a].

Insbesondere sind C^*-konvexe Mengen konvex, und C^*-absolutkonvexe Mengen sind absolutkonvex.

Beispiele für C^*-konvexe Mengen: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und fest. Man definiert den Matrix-Wertevorrat

$$W(T)_n := \{\varphi(T) | \varphi : B(\mathcal{H}) \to M_n \text{ vollständig positiv und unital}\}.$$

$W(T)_n$ ist eine kompakte und C^*-konvexe Teilmenge von M_n.

Zu jeder kompakten C^*-konvexen Teilmenge K von M_n existiert ein separabler Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $S \in B(\mathcal{H})$ mit $K = W(S)_n$ (vgl. [LP81, Prop. 31]).

Desweiteren sind die Mengen

$$\mathrm{Ball}(B(\mathcal{H})) = \{x \in B(\mathcal{H}) | \|x\| \leq 1\} \quad \text{und} \quad P = \{x \in B(\mathcal{H}) | 0 \leq x \leq \mathbb{1}\}$$

C^*-konvexe und WOT-kompakte Teilmengen von $B(\mathcal{H})$. $\mathrm{Ball}(B(\mathcal{H}))$ ist zusätzlich C^*-absolutkonvex.

C^*-konvexe Mengen wurden von Loebl und Paulsen in [LP81] eingeführt und Anfang der neunziger Jahre insbesondere von Farenick und Morenz ([Far92],[FM93]) untersucht. Diese Untersuchungen beschäftigten sich mit der Frage nach einer Analogie zum Satz von Krein-Milman. Schließlich gelang es Morenz eine solche zu zeigen [Mor94, Th. 4.5]. Ende der neunziger Jahre variierte Magajna die Definition von C^*-konvex leicht und zeigte einige Trennungssätze [Mag98a, Th. 1.1] und auch eine Analogie zum Satz von Krein-Milman [Mag98b, Th. 1.1].

8.3.1 Trennungssätze

Seien $A, B \subset B(\mathcal{H})$ unitale C^*-Algebren und $Y \subset B(\mathcal{H})$ ein (A, B)-Bimodul. Dann heißt $K \subset Y$ **(A, B)-absolutkonvex**, wenn

$$\sum_{i=1}^n a_i^* x_i b_i \in K$$

für alle $x_i \in K$ und $a_i \in A$, $b_i \in B$ mit $\sum_{i=1}^n a_i^* a_i$, $\sum_{i=1}^n b_i^* b_i \leq \mathbb{1}$. Sei Y ein A-Bimodul. Dann heißt K **A-konvex**, wenn

$$\sum_{i=1}^n a_i^* x_i a_i \in K$$

für alle $x_i \in K$ und $a_i \in A$ mit $\sum_{i=1}^n a_i^* a_i = \mathbb{1}$. Im Fall $Y = A$ stimmt diese Definition also mit der von C^*-konvexen Mengen überein.

Es gelten folgende Trennungssätze [Mag98a, Thm. 1.1]: Seien $A, B \subset B(\mathcal{H})$ unitale C^*-Algebren und $Y \subset B(\mathcal{H})$ ein (A, B)-Bimodul. Sei $K \subset Y$ normabgeschlossen und $y_0 \in Y \setminus K$.

1. Wenn $A = B$, $0 \in K$ und K A-konvex, dann existieren ein Hilbertraum $\mathcal{H}_\pi$, eine zyklische Darstellung $\pi : A \to B(\mathcal{H}_\pi)$ und ein vollständig beschränkter A-Bimodul-Homomorphismus $\phi : Y \to B(\mathcal{H}_\pi)$, so daß für alle $y \in K$
$$\operatorname{Re}\phi(y) \leq \mathbb{1}, \text{ aber } \operatorname{Re}\phi(y_0) \not\leq \mathbb{1}.$$

2. Wenn K (A, B)-absolutkonvex ist, dann existieren ein Hilbertraum $\mathcal{H}_\pi$, Darstellungen $\pi : A \to B(\mathcal{H}_\pi)$ und $\sigma : B \to B(\mathcal{H}_\pi)$ und ein vollständig beschränkter (A, B)-Bimodul-Homomorphismus $\phi : Y \to B(\mathcal{H}_\pi)$, so daß für alle $y \in K$
$$\|\phi(y)\| \leq 1, \text{ aber } \|\phi(y_0)\| > 1.$$

8.4 C^*-extremale Punkte

Sei A eine unitale C^*-Algebra. Für eine Teilmenge $Y \subset A$ ist die C^*-konvexe Hülle die kleinste C^*-konvexe Menge, die Y umfaßt.

Ein Element x einer C^*-konvexen Menge $K \subset A$ heißt C^***-Extremalpunkt**, wenn für alle C^*-Konvexkombinationen $x = \sum_{i=1}^n a_i^* x_i a_i$ mit invertierbaren $a_i \in A$ folgt, zu $x_i \in K$ existieren unitäre $u_i \in A$ mit $x = u_i^* x_i u_i$ für $i = 1, \ldots, n$ [LP81].

Sei nun $A = M_n$ und sei $K \subset M_n$ kompakt und C^*-konvex. Sei $\tilde{K}$ die matrixkonvexe Hülle von K. Dann ist $\tilde{K}$ eine einfache kompakte und m-konvexe Menge in $\mathbb{C}$, so daß $\tilde{K}_n = K$ [Fis96]. In diesem Sinn kann eine C^*-konvexe Teilmenge von M_n auch als m-konvexe Menge in $\mathbb{C}$ aufgefaßt werden. Man hat nun den matrixkonvexen Satz von Krein-Milman zur Verfügung. Ferner ergibt sich aus Ergebnissen von Farenick und Morenz [FM93], daß die strukturellen Elemente von $\tilde{K}_n$ genau die nicht reduziblen C^*-Extremalpunkte von K sind. Man kann daher zeigen: Sei $K \subset M_n$ kompakt und C^*-konvex, dann ist K gleich der C^*-konvexen Hülle der C^*-Extremalpunkte von K.

Um ein allgemeineres Ergebnis zu erhalten, kann man die Definition der Extremalpunkte ändern. Sei R ein hyperfiniter Faktor und $K \subset R$ eine C^*-konvexe Teilmenge. $x \in K$ heißt R**-Extremalpunkt**, wenn für alle C^*-Konvexkombinationen $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i a_i$ mit $x_i \in K$ und positiven und invertierbaren $a_i \in A$ folgt, daß $x = x_i$ und $a_i x = x a_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.[55]

Damit läßt sich folgender Satz beweisen [Mag98b, Thm. 1.1]: Sei $K \subset R$ C^*-konvex und ultraschwach kompakt. Dann ist K gleich dem ultraschwachen Abschluß der C^*-konvexen Hülle ihrer R-Extremalpunkte.

[55] Im Fall $R = M_n$ sind das die C^*-Extremalpunkte. Ansonsten sind R-Extremalpunkte auch C^*-extremal, aber i.a. nicht umgekehrt.

9 Hilbert-C^*-Moduln

Hilbert-C^*-Moduln verallgemeinern die Idee der Hilberträume, indem statt eines skalaren inneren Produktes ein inneres Produkt betrachtet wird, dessen Bild in einer C^*-Algebra liegt. Einige der Konstruktionen, die einen Hilbertraum mit einer Operatorraumstruktur versehen, lassen sich auf Hilbert-C^*-Moduln übertragen. Dadurch erhalten die Hilbert-C^*-Moduln eine Operatorraumstruktur.

Einen Überblick über die algebraische Struktur der Hilbert-C^*-Moduln geben die Artikel [Pas73], [BGR77], [Bro77] und die Monographie [Lan95]. Der Operatorraumaspekt von Hilbert-C^*-Moduln wurde erstmals in [Ble97] untersucht. Teilergebnisse finden sich in [Ble96] und [BMP].

9.1 Rechte und linke Hilbert-C^*-Moduln

Ein **rechter Hilbert-C^*-Modul** X über einer C^*-Algebra $(A, \|\cdot\|_A)$, kurz: ein rechter Hilbert-A-Modul, ist ein Banachraum $(X, \|\cdot\|_X)$, für den zusätzlich gilt:

1. X ist ein rechter A-Modul.
2. Es gibt ein A-wertiges **inneres Produkt** auf X, d.h. eine Abbildung
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_A : X \times X \to A\,,$$
so daß für alle $x, y, z \in X$ und für alle $a \in A$ gilt:
   (a) $\langle x+y, z\rangle_A = \langle x, z\rangle_A + \langle y, z\rangle_A$
   (b) $\langle x, y\rangle_A = \langle y, x\rangle_A^*$
   (c) $\langle x, y\cdot a\rangle_A = \langle x, y\rangle_A\, a$
   (d) $\langle x, x\rangle_A \geq 0$
   (e) $\langle x, x\rangle_A = 0$ impliziert $x = 0$.
3. Für alle $x \in X$ gilt:
$$\|x\|_X = \|\langle x, x\rangle_A\|_A^{\frac{1}{2}}\,.$$

Analog definiert man **linke Hilbert-C^*-Moduln**, indem man (d) ersetzt durch

(d') ${}_A\langle x, a\cdot y\rangle = {}_A\langle x, y\rangle a^*$.

Beispiele

1. Jedes abgeschlossene Rechtsideal R in einer C^*-Algebra A wird durch $\langle x, y\rangle_A := x^*y$ zu einem rechten Hilbert-A-Modul.
2. Jedes abgeschlossene Linksideal L in einer C^*-Algebra A wird durch ${}_A\langle x, y\rangle := xy^*$ zu einem linken Hilbert-A-Modul.
3. Insbesondere wird jede C^*-Algebra A durch $\langle x, y\rangle_A := x^*y$ zu einem rechten und durch ${}_A\langle x, y\rangle := xy^*$ zu einem linken Hilbert-A-Modul.

9.2 Die kanonische Operatorraumstruktur

Für einen rechten Hilbert–C^*-Modul X über einer C^*-Algebra A definiert man die **kanonische Operatorraumstruktur** für $x \in M_n(X)$ durch

$$\|x\|_n := \left\| \left[\sum_{k=1}^{n} \langle x_{ki}, x_{kj} \rangle_A \right] \right\|_{M_n(A)}^{1/2} .$$

Mit diesen Matrizennormen wird X zu einem A-Operatormodul. Man beachte, daß $(M_n(X), \|\cdot\|_n)$ ein rechter Hilbert-C^*-Modul über $M_n(A)$ ist. Das Skalarprodukt für $x, y \in M_n(X)$ wird erklärt durch

$$\langle x, y \rangle_{M_n(A)} := \left[\sum_{k=1}^{n} \langle x_{ki}, y_{kj} \rangle_A \right],$$

die Moduloperation durch

$$[x_{ij}] \cdot [a_{ij}] := \left[\sum_{k=1}^{n} x_{\mu k} \cdot a_{k\nu} \right].$$

Für einen linken Hilbert-C^*-Modul X definiert man die **kanonische Operatorraumstruktur** durch

$$\|x\|_n := \left\| \left[\sum_{k=1}^{n} {}_A\langle x_{ik}, x_{jk} \rangle \right] \right\|_{M_n(A)}^{1/2}$$

für $x \in M_n(X)$. Man beachte, daß $M_n(X)$ mit $\|\cdot\|_n$ zu einem linken Hilbert-C^*-Modul über $M_n(A)$ wird, dessen Skalarprodukt für $x, y \in M_n(X)$ gegeben ist durch

$$\langle x, y \rangle_{M_n(A)} := \left[\sum_{k=1}^{n} {}_A\langle x_{ik}, y_{jk} \rangle \right].$$

Die Moduloperation entspricht der Matrizenmultiplikation von links.

Beispiele

Im folgenden sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum mit einem Skalarprodukt, das wie üblich in der ersten Komponente linear ist.

1. $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein linker Hilbert-$\mathbb{C}$ -Modul. Obige Konstruktion bietet eine Möglichkeit, $\mathcal{H}$ mit einer Operratorraumstruktur zu versehen. Man erhält den Zeilen-Hilbertraum $R_{\mathcal{H}}$.

2. Um aus $\mathcal{H}$ einen rechten Hilbert-$\mathbb{C}$-Modul zu machen, definiert man auf $\mathcal{H}$ ein neues inneres Produkt durch $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \overline{\langle x, y \rangle}$. Der Operatorraum, der durch obige Konstruktion entsteht, ist gerade der Spalten-Hilbertraum $C_{\mathcal{H}}$.

3. Die Abbildung
$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_{B(\mathcal{H})} : \mathcal{H}\times\mathcal{H} &\to B(\mathcal{H})\\ (x,y) &\mapsto \langle\cdot,y\rangle x\end{aligned}$$
definiert auf $\mathcal{H}$ ein inneres Produkt mit Werten in $B(\mathcal{H})$, das in der ersten Komponente linear und in der zweiten konjugiert linear ist. Mit diesem inneren Produkt wird $\mathcal{H}$ zu einem linken Hilbert-C^*-Modul über $B(\mathcal{H})$. Der Operatorraum, der durch die obige Konstruktion entsteht, ist gerade der Spalten-Hilbertraum $C_{\mathcal{H}}$.

4. Die Abbildung
$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_{B(\mathcal{H})} : \mathcal{H}\times\mathcal{H} &\to B(\mathcal{H})\\ (x,y) &\mapsto \langle\cdot,x\rangle y\end{aligned}$$
definiert auf $\mathcal{H}$ ein inneres Produkt, mit Werten in $B(\mathcal{H})$, das in der ersten Komponente konjugiert linear ist und in der zweiten linear. Mit diesem inneren Produkt und der Modulabbildung
$$\mathcal{H}\times B(\mathcal{H})\to\mathcal{H}\ ,\ \xi\cdot T := T^*(\xi)$$
wird $\mathcal{H}$ zu einem rechten Hilbert-C^*-Modul über $B(\mathcal{H})$. Der Operatorraum, der durch die obige Konstruktion entsteht, ist gerade der Zeilen-Hilbertraum $R_{\mathcal{H}}$.

5. Die inneren Produkte aus den Beispielen im Kapitel Rechte und linke Hilbert-C^*-Moduln, die eine C^*-Algebra A zu einem linken bzw. rechten Hilbert-A-Modul machen, induzieren beide eine Operatorraumstruktur, die mit der kanonischen Operatorraumstruktur von A als C^*-Algebra übereinstimmt.

9.3 Grundkonstruktionen

Direkte Summe und Spaltenraum

Seien $(A,\|\cdot\|_A)$ eine C^*-Algebra und X_i, $i=1,\ldots,n$, rechte Hilbert-C^*-Moduln über A. Die Norm
$$\|\cdot\| : \bigoplus_{i=1}^n X_i \ \to \mathbb{R}$$
$$\left\|\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\| := \left\|\sum_{i=1}^n \langle\, x_i, x_i\,\rangle_A\right\|_A^{1/2}$$
macht aus der algebraisch direkten Summe der X_i einen rechten Hilbert-C^*-Modul über A. Die Modulabbildung wird durch
$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\cdot a := \begin{pmatrix} x_1\cdot a\\ x_2\cdot a\\ \vdots\\ x_n\cdot a\end{pmatrix}$$

erklärt. Das innere Produkt definiert man durch:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle_A := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i \, , \, y_i \rangle_A$$

Wenn gilt $X_1 = X_2 = \cdots = X_n =: X$, so schreibt man für diesen Hilbert-C^*-Modul $C_n(X)$. Die Einbettung von $C_n(X)$ in $\mathbb{M}_n(X)$ als erste Spalte ist eine vollständige Isometrie.

Für einen linken Hilbert-C^*-Modul X bezeichne $C_n(X)$ die Teilmenge von $M_n(X)$, deren Elemente nur in der ersten Spalten Einträge haben. Als Unterraum von $M_n(X)$ ist $C_n(X)$ ein linker Hilbert-C^*-Modul über $M_n(A)$.

Seien X_n für $n \in \mathbb{N}$ rechte Hilbert-C^*-Moduln über einer C^*-Algebra $(A, \|\cdot\|_A)$. Die Menge $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$ wird definiert durch

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| x_n \in X_n \text{ und } \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, x_n \rangle_A \text{ konvergiert in } A \right\}$$

Mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle_A := \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, y_n \rangle_A$$

wird $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_i$ zu einem rechten Hilbert-C^*- Modul über A. Wenn gilt $X_1 = X_2 = \cdots =: X$, so schreibt man für diesen Hilbert-C^*-Modul $C_\infty(X)$.

Der Zeilenraum

Es sei $\bigoplus_{i=1}^{n} X$ die algebraisch direkte n-fache Summe eines rechten Hilbert-C^*-Moduls X über einer C^*-Algebra A. Schreibt man Elemente aus $\bigoplus_{i=1}^{n} X$ als Zeilen, so liest sich die folgende Modulabbildung wie die Multiplikation einer Zeile mit einer Matrix:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} X \times M_n(A) \to \bigoplus_{i=1}^{n} X$$

$$((x_1, \ldots, x_n), [a_{ij}]) := \left(\sum_{l=1}^{n} x_l \cdot a_{l1}, \ldots, \sum_{l=1}^{n} x_l \cdot a_{ln} \right)$$

Zusammen mit der bilinearen Abbildung

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \bigoplus_{i=1}^{n} X \times \bigoplus_{i=1}^{n} X \to M_n(A)$$

$$\langle (\; x_1, \cdots, x_n \;), (\; y_1, \cdots, y_n \;) \rangle_{M_n(A)} := [\langle x_i, y_j \rangle_A]$$

wird $\bigoplus_{i=1}^{n} X$ zu einem rechten Hilbert-C^*-Modul über $M_n(A)$. Er wird mit $R_n(X)$ bezeichnet. Die Einbettung von $R_n(X)$ in $M_n(X)$ als erste Zeile ist eine vollständige Isometrie.

Für einen linken Hilbert-C^*-Modul X bezeichne $R_n(X)$ die Teilmenge von $M_n(X)$, deren Elemente nur in der ersten Zeile Einträge haben. Als Unterraum von $M_n(X)$ erbt $R_n(X)$ ein inneres Produkt mit Werten in $M_n(A)$. Betrachtet man sich jedoch den Ausdruck des inneren Produktes für zwei Elemente von $R_n(X)$, so sieht man, daß die entstehende Matrix nur einen Eintrag hat. $R_n(X)$ hat also ein inneres Produkt mit Werten in A. Mit der Moduloperation

$$a \cdot \left(\; x_1, \cdots, x_n \; \right) := \left(\; a \cdot x_1, \cdots, a \cdot x_n \; \right)$$

ist $R_n(X)$ ein linker Hilbert-A-Modul.

Konjugierter Hilbert-C^*-Modul

Sei $(X, \langle .,. \rangle, \{\|.\|_n\})$ ein rechter Hilbert-C^*-Modul über einer C^*-Algebra A. Unter dem zu X **konjugierten Hilbert-C^*-Modul** $\overline{X}$ verstehen wir den zu X konjugierten Banachraum mit der durch

$$a \cdot \overline{x} := \overline{x \cdot a^*}$$

definierten linken A-Modulstrukur und dem inneren Produkt

$$_A\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle := \langle x, y \rangle_A.$$

$\overline{X}$ ist ein linker Hilbert-C^*-Modul über A. Versieht man ihn mit seiner kanonischen Operatorraumstruktur, so gilt:

$$\|[\overline{x_{ij}}]\|_n = \|[x_{ji}]\|_n \tag{4}$$

$\overline{X}$ läßt sich durch $\overline{x} \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ vollständig isometrisch in $CB(X, A)_A$ einbetten [BMP].

Beispiele für konjugierte Hilbert-C^*-Moduln

1. Der komplex konjugierte Raum eines Hilbertraumes ist mit $\langle \overline{\xi}, \overline{\eta} \rangle := \overline{\langle \xi, \eta \rangle}$ wieder ein Hilbertraum. Betrachtet man den rechten Hilbert-$\mathbb{C}$-Modul $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}})$, so ist sein konjugierter Hilbert-$\mathbb{C}$-Modul $\overline{\mathcal{H}}$ gerade der komplex konjugierte Hilbertraum. $\overline{\mathcal{H}}$ ist vollständig isometrisch zum Zeilen-Hilbertraum $R_{\overline{\mathcal{H}}}$.

2. Für einen rechten Hilbert-C^*-Modul sind der konjugierte Spaltenraum $\overline{C_n(X)}$ und der Zeilenraum $R_n(\overline{X})$ vollständig isometrisch isomorph als linke Hilbert-C^*-Moduln über A. Der Spaltenraum $C_n(\overline{X})$ und der konjugierte Zeilenraum $\overline{R_n(X)}$ sind vollständig isometrisch isomorph als linke Hilbert-C^*-Moduln über $M_n(A)$.

3. Ist X ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, so ergeben sich aus 2. mit $n = 1$ die Spezialfälle:

$$\overline{C_{\mathcal{H}}} \overset{\text{cb}}{=} R_{\overline{\mathcal{H}}} \quad \text{und} \quad C_{\overline{\mathcal{H}}} \overset{\text{cb}}{=} \overline{R_{\mathcal{H}}}.$$

   $C_{\mathcal{H}}$ ist der Spalten-Hilbertraum. Die vollständigen Isometrien ist in beiden Fällen durch die Identität auf dem gemeinsamen Grundraum gegeben.

9.4 Tensorprodukte

Mit dem inneren und dem äußeren Tensorprodukt sind zwei Möglichkeiten gegeben, aus zwei Hilbert-C^*-Moduln X, Y einen neuen Hilbert-C^*-Modul zu konstruieren. Die Operatorraumstruktur des inneren Tensorproduktes ist die Operatorraumstuktur des Modul-Haagerup-Tensorprodukts $X \otimes_{hA} Y$. Die Operatorraumstruktur des äußeren Tensorproduktes ist die Operatorraumstuktur des injektiven Operatorraum-Tensorprodukts $X \overset{\vee}{\otimes} Y$.

9.4.1 Das innere Tensorprodukt von Hilbert-C^*-Moduln

Es seien A und B zwei C^*-Algebren, X ein rechter Hilbert-A-Modul, Y ein rechter Hilbert-B-Modul, $\Theta : A \to B^{\text{ad}}(Y)$ ein *-Homomorphismus. Durch den *-Homomorphismus Θ wird der Operatorraum Y zu einem linken Operator-A-Modul. Auf dem algebraischen Modul-Tensorprodukt $X \otimes_A Y$ läßt sich durch

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_B := \langle y_1, \Theta(\langle x_1, x_2 \rangle_A)\, y_2 \rangle_B$$

ein B-wertiges inneres Produkt definieren. Mit der Moduloperation

$$(x \otimes y) \cdot b := x \otimes (y \cdot b)$$

und dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ wird die Vervollständigung von $X \otimes_A Y$ zu einem rechten Hilbert-C^*-Modul über B. Dieser Hilbert-C^*-Modul heißt **inneres Tensorprodukt von X und Y bzgl. Θ** und wird mit $X \otimes_\Theta Y$ bezeichnet.

Ist Θ nichtentartet, d.h. liegt

$$\text{lin}\{\Theta(a)y \mid a \in A, y \in Y\}$$

dicht in Y, so gilt: Das Modul-Haagerup-Tensorprodukt $X \otimes_{hA} Y$ ist vollständig isometrisch zum inneren Tensorprodukt von X und Y bzgl. Θ [Ble97]:

$$X \otimes_{hA} Y \overset{\text{cb}}{=} X \otimes_\Theta Y.$$

9.4.2 Das äußere Tensorprodukt von Hilbert-C^*-Moduln

Sind A und B C^*-Algebren, X ein rechter Hilbert-C^*-Modul über A, Y ein rechter Hilbert-C^*-Modul über B, so definiert

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{A \otimes B} := \langle x_1, x_2 \rangle_A \otimes \langle y_1, y_2 \rangle_B$$

ein inneres Produkt auf $X \otimes Y$ mit Werten im räumlichen C^*-Tensorprodukt $A \overset{\vee}{\otimes} B$. Mit der Moduloperation

$$(x \otimes y) \cdot (a \otimes b) := (x \cdot a) \otimes (y \cdot b)$$

und dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A \otimes B}$ wird die Vervollständigung von $X \otimes Y$ zu einem rechten Hilbert-C^*-Modul über $A \overset{\vee}{\otimes} B$. Dieser Hilbert-$C^*$-Modul heißt **äußeres Tensorprodukt** von X und Y und wird mit $X \otimes_{\text{ext}} Y$ bezeichnet. Es gilt vollständig isometrisch [Ble97]:

$$X \otimes_{\text{ext}} Y \overset{\text{cb}}{=} X \overset{\vee}{\otimes} Y.$$

9.5 Modulabbildungen zwischen Hilbert-C^*-Moduln

Es seien X und Y rechte Hilbert-C^*-Moduln über einer C^*-Algebra A. Es bezeichne $B(X,Y)_A$ den Raum der linearen, beschränkten Rechts-A-Modulhomomorphismen von X nach Y, $CB(X,Y)_A$ den Raum der Abbildungen aus $B(X,Y)_A$, die zusätzlich vollständig beschränkt sind. Es gilt isometrisch isomorph:

$$B(X,Y)_A \cong CB(X,Y)_A.$$

Das heißt: Jeder beschränkte A-Rechts-Modulhomomorphismus T ist vollständig beschränkt, und es gilt: $\|T\|_{\text{cb}} = \|T\|$ [Ble97]. Zusätzlich gilt [Pas73]:

$$\langle Tx, Tx \rangle_A \leq \|T\|^2 \langle x, x \rangle_A.$$

Ein Operator $T^* \in B(Y,X)_A$ heißt **adjungierter Operator** zu einem Operator $T \in B(X,Y)_A$, wenn für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt:

$$\langle Tx, y \rangle_A = \langle x, T^* y \rangle_A.$$

Existiert zu T ein solches T^*, so heißt T **adjungierbar**. Nicht jeder Operator $T \in B(X,Y)_A$ ist adjungierbar.

Die Menge der adjungierbaren Operatoren $T \in B(X,Y)_A$ wird im folgenden mit $B^{\text{ad}}(X,Y)$ bezeichnet. $B^{\text{ad}}(X)$ ist eine C^*-Algebra.

Ein Operator der Form $T_{y,x} : X \to Y$, $z \mapsto y \langle x, z \rangle_A$ heißt **elementarer Operator**. Ein wichtiger Unterraum von $B^{\text{ad}}(X,Y)$ ist $\mathbf{K}(X,Y)$, die abgeschlossene lineare Hülle aller elementaren Operatoren, abgeschlossen bzgl. der von $CB(X,Y)$ induzierten Norm. Die Operatorraumstruktur, die $\mathbf{K}(X)$ als Teilmenge von $CB(X)$ erbt, entspricht der Operatorraumstruktur, die $\mathbf{K}(X)$ in kanonischer Weise als C^*-Algebra trägt. Es gilt

$$\mathbf{K}(X,Y) \overset{\text{cb}}{=} Y \otimes_{hA} \overline{X}$$

vollständig isometrisch via $y\langle x, \cdot \rangle \mapsto y \otimes \overline{x}$ [Ble97].

9.6 Charakterisierungen von Hilbert-C^*-Moduln

Jeder Hilbert-C^*-Modul über einer C^*-Algebra A trägt eine kanonische Operatorraumstruktur. Die folgenden beiden Kriterien [Ble97] erlauben, einem gegebenen rechten Operator-A-Modul X anzusehen, ob seine Operatorraumstruktur von einem A-wertigen inneren Produkt induziert wird, d.h. ob X ein rechter Hilbert-C^*-Modul ist. Die zweite Charakterisierung macht vom Modul-Haagerup-Tensorprodukt Gebrauch:

a) Ein rechter Operator-A-Modul X ist *genau dann* ein rechter Hilbert-C^*-Modul über A mit seiner kanonischen Operatorraumstruktur, wenn gilt: Es gibt ein Netz positiver ganzer Zahlen $n(\alpha)$ und vollständig kontrahierende A-Modulhomomorphismen

$$\Phi_\alpha : X \to C_{n(\alpha)}(A)$$

und

$$\Psi_\alpha : C_{n(\alpha)} \to X,$$

so daß

$$\lim_\alpha \Psi_\alpha(\Phi_\alpha(x)) = x.$$

In diesem Fall existiert der Grenzwert $\lim_\alpha \langle \Phi_\alpha(x), \Phi_\alpha(y) \rangle_A$ und ist gleich dem eindeutig bestimmten inneren Produkt $\langle x, y \rangle$, das die Operatorraumstrukur induziert.

b) Ein rechter A-Operatormodul X ist *genau dann* ein rechter Hilbert-C^*-Modul über A, wenn es eine treue, nichtentartete $*$-Darstellung Θ von A auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt, so daß gilt:

i) $X \otimes_{hA} \mathcal{C}_\mathcal{H}$ ist ein Hilbertraum.

ii) Die Abbildung

$$\begin{array}{rll} \chi : & X & \to B(\mathcal{H}, X \otimes_{hA} \mathcal{C}_\mathcal{H}) \\ & x & \mapsto (\chi(x) : \xi \mapsto x \otimes \xi) \end{array}$$

ist eine vollständige Isometrie.

iii) Für alle $x \in X$ gilt $(\chi(x))^* \chi(x) \in \Theta(A)$.

Das A-wertige innere Produkt, das die Operatorraumstruktur von X induziert, erhält man durch die Beziehung

iv) $\langle x, y \rangle = \Theta^{-1}((\chi(x))^* \chi(y))$.

Wenn i)-iv) für *eine* treue, nichtentartete, *-Darstellung erfüllt sind, so sind sie es für jede.

10 Abbildungsräume

Seien E, F Banachräume. Wir betrachten einen linearen Teilraum $A(E, F)$ des Raumes $B(E, F)$ der stetigen Operatoren zwischen E und F, der alle endlichrangigen Abbildungen enthält und bezüglich einer Norm ein Banachraum ist. Üblicherweise verlangt man noch, daß $A(E, F)$ für alle Paare von Banachräumen E und F erklärt ist. Einen solchen Raum bezeichnet man nach Grothendieck als **Abbildungsraum** (Mapping space).

Analog bezeichnen wir einen Operatorraum $A(X, Y)$, der ein linearer Teilraum von $CB(X, Y)$ ist, als ***CB*-Abbildungsraum**. Man beachte, daß i.a. die algebraische Identifizierung von $M_n(A(X, Y))$ mit $A(X, M_n(Y))$ nicht isometrisch ist und daß die Normen auf $A(X, M_n(Y))$ keine Operatorraumstruktur für $A(X, Y)$ erzeugen.

Zwischen Abbildungsräumen und Tensorprodukten besteht ein enger Zusammenhang. So sind der Raum $F(X, Y)$ der endlichrangigen Abbildungen zwischen X und Y und das algebraische Tensorprodukt von X^* mit Y isomorph:

$$X^* \otimes_{\text{alg}} Y \cong F(X, Y).$$

Diese Identifikation ermöglicht es, Normen von dem einen Raum auf den anderen zu übertragen. Man betrachte hierzu die Fortsetzung der Abbildung $X^* \otimes Y \to F(X, Y)$ auf die Vervollständigung $X^* \widetilde{\otimes} Y$:

$$\Phi : X^* \widetilde{\otimes} Y \to CB(X, Y).$$

Diese muß weder injektiv noch surjektiv sein. Als Abbildungsraum erhält man daher

$$\text{Bild}(\Phi) \subset CB(X, Y)$$

mit der Norm von

$$(X^* \tilde{\otimes} Y)/\text{Kern}(\Phi).$$

Wir betrachten im folgenden Vorschriften, die jedem Paar von Operatorräumen einen Abbildungsraum $A(\cdot, \cdot)$ mit Operatorraumnorm $\alpha(\cdot)$ zuordnen. In der Banachraumtheorie wurde von Pietsch der Begriff des Abbildungsraumes zum Begriff des Operatorideals verschärft [Pie78]. Analog betrachten wir in der Operatorraumtheorie Zuordnungen, die eine ***CB*-Idealeigenschaft** [ER94] haben, d.h. die Komposition

$$\begin{array}{rcl} CB(X_1, X_2) \times A(X_2, Y_2) \times CB(Y_2, Y_1) & \to & A(X_1, Y_1) \\ (\Psi_1, \Phi, \Psi_2) & \mapsto & \Psi_2 \circ \Phi \circ \Psi_1 \end{array}$$

ist für alle Operatorräume X_1, X_2, Y_1, Y_2 erklärt und allgemein vollständig kontrahierend.

Ein CB-Abbildungsraum mit der CB-Idealeigenschaft heißt lokal [EJR98], wenn für seine Norm gilt:

$$\alpha(\varphi) = \sup\{\alpha(\varphi|_L) : L \subset X, \ \dim L < \infty\}.$$

10.1 Vollständig nukleare Abbildungen

Seien X und Y Operatorräume. Die **vollständig nuklearen** Abbildungen von X nach Y [ER94, §2], [EJR98, §3], werden über die projektive Operatorraumtensornorm erklärt. Man betrachtet die Fortsetzung der kanonischen Identität $X^* \otimes Y = F(X, Y)$:

$$\Phi : X^* \overset{\wedge}{\otimes} Y \to X^* \overset{\vee}{\otimes} Y \subset CB(X, Y).$$

Es ist $\overset{\vee}{\otimes}$ das injektive Tensorprodukt und $\overset{\wedge}{\otimes}$ das projektive Tensorprodukt.

Eine Abbildung heißt **vollständig nuklear**, wenn sie im Bild von Φ liegt. Man bezeichnet mit

$$CN(X,Y) := (X^* \overset{\wedge}{\otimes} Y)/\mathrm{Kern}(\Phi)$$

den Raum der vollständig nuklearen Abbildungen und versieht ihn mit der Quotientenoperatorraumstruktur. Die Operatorraumnorm wird mit $\nu(\cdot)$ bezeichnet. $M_n(CN(X,Y))$ und $CN(X, M_n(Y))$ sind i.a. nicht isometrisch.

Nukleare [56] Abbildungen sind vollständig nuklear. [ER94, 3.10]

Die projektive Tensornorm erhält i.a. keine vollständigen Isometrien. Deshalb ist (anders als bei den vollständig beschränkten Abbildungen) auch für Unterräume $Y_o \subset Y$ die kanonische Einbettung $CN(X, Y_0) \to CN(X,Y)$ i.a. nur vollständig kontrahierend und nicht isometrisch. Da die projektive Tensornorm Quotientenabbildungen erhält, gibt es zu jeder nuklearen Abbildung $\varphi : X_0 \to Y$ mit $\nu(\varphi) < 1$, von einem Unterraum $X_0 \subset X$ eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ auf ganz X mit $\nu(\tilde{\varphi}) < 1$.

Die vollständig nuklearen Abbildungen haben die CB-Idealeigenschaft. Weiter ist mit φ auch φ^* vollständig nuklear, und es gilt: $\nu(\varphi^*) \leq \nu(\varphi)$ [EJR98, Lemma 3.2].

Eine Abbildung φ ist genau dann vollständig nuklear, wenn es eine Faktorisierung der Form

$$\begin{array}{ccc} B(\ell_2) & \overset{M(a,b)}{\rightarrow} & T(\ell_2) \\ \uparrow r & & \downarrow s \\ X & \overset{\varphi}{\rightarrow} & Y \end{array}$$

gibt. Dabei sind a, b Hilbert-Schmidt-Operatoren und definieren die Abbildung $M(a,b) : x \mapsto axb$. Für die vollständig nukleare Norm gilt dann: $\nu(\varphi) = 1$ genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein Diagramm mit $\|r\|_{cb}\|a\|_2\|b\|_2\|s\|_{cb} \leq 1 + \epsilon$ existiert [57] [ER94, Thm. 2.1].

Man beachte, daß die vollständig nuklearen Abbildungen nicht lokal sind.

10.2 Vollständig integrale Abbildungen

Vollständig integrale Abbildungen definiert man unter Zuhilfenahme der vollständig nuklearen Abbildungen. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt **vollständig in-**

[56] Die Definition der vollständig nuklearen Abbildungen ist an den nuklearen Abbildungen der Banachraumtheorie orientiert. Dort betrachtet man entsprechend eine Abbildung $\Phi_B : E^* \otimes_\gamma F \to B(E,F)$ für zwei Banachräume E und F.

[57] In der Banachraumtheorie hat man eine analoge Aussage: Eine Abbildung φ ist genau dann nuklear, wenn es ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \ell_\infty & \overset{d}{\rightarrow} & \ell_1 \\ r\uparrow & & \downarrow s \\ E & \overset{\varphi}{\rightarrow} & F, \end{array}$$

gibt, wobei d ein Diagonaloperator ist, d.h. es gibt ein $(d_i) \in \ell_1$, so daß $d((a_i)) = (d_i \cdot a_i)$ für alle $(a_i) \in \ell_\infty$ ist. Für die nukleare Norm gilt: $\nu_B(\varphi) = \inf \|r\|\|d\|_{\ell_1}\|s\|$, wobei das Infimum über alle Faktorisierungen genommen wird.

tegral, wenn es eine Konstante $c > 0$ und ein Netz von endlichrangigen $\varphi_\alpha \in CN(X, Y)$ gibt mit $\nu(\varphi_\alpha) \leq c$, das gegen φ in der Punkt-Norm-Topologie [58] konvergiert.

Die Menge aller dieser Abbildungen bildet den Raum $CI(X, Y)$ der vollständig integralen Abbildungen.

Es gibt die kleinste all dieser Konstanten c, die die obige Bedingung erfüllen, die mit $\iota(\varphi)$ bezeichnet wird. $\iota(\cdot)$ definiert eine Norm, mit der $CI(X, Y)$ zu einem Banachraum wird. Die Einheitskugel von $CI(X, Y)$ ist also gerade der Punkt-Norm-Abschluß der Einheitskugel von $CN(X, Y)$.

Die kanonische Operatorraumstruktur erhält man, indem man die Einheitskugel von $M_n(CI(X, Y))$ als Punkt-Norm-Abschluß der Einheitskugel von $M_n(CN(X, Y))$ setzt.

Es gilt nach Definition $\iota(\varphi) \leq \nu(\varphi)$; bei endlichdimensionalem X ist sogar [EJR98, Lemma 4.1]

$$CI(X, Y) \overset{\text{cb}}{=} CN(X, Y).$$

Integrale [59] Abbildungen sind vollständig integral [ER94, 3.10].

Die kanonische Einbettung

$$CI(X, Y) \hookrightarrow (X \overset{\vee}{\otimes} Y^*)^*$$

ist eine vollständige Isometrie [EJR98, Cor. 4.3]. Man hat ferner [EJR98, Cor. 4.6] φ ist genau dann vollständig integral, wenn es eine Faktorisierung der Form:

$$\begin{array}{ccccc} B(\mathcal{H}) & & \overset{M(\omega)}{\to} & & B(\mathcal{K})^* \\ \uparrow r & & & & \downarrow s \\ X & \overset{\varphi}{\to} & Y & \hookrightarrow & Y^{**} \end{array}$$

mit schwach*-stetigem s gibt. Die Abbildung $M(\omega) : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})^*$ ist für zwei Elemente $a \in B(\mathcal{H})$, $b \in B(\mathcal{K})$ über $(M(\omega)(a))(b) = \omega(a \otimes b)$ definiert. Für die Norm gilt: $\iota(\varphi) = 1$, wenn es eine Faktorisierung mit $\|r\|_{cb}\|\omega\|\|s\|_{cb} = 1$ gibt (man beachte i.a. $\|M(\omega)\|_{cb} \neq \|\omega\|$).

Die vollständig integralen Abbildungen erfüllen ebenfalls die *CB*-Idealeigenschaft. Im Gegensatz zu den vollständig nuklearen Abbildungen sind sie aber lokal. Man hat aber im allgemeinen nur $\iota(\varphi) \leq \iota(\varphi^*)$ [EJR98].

---

[58] $\varphi_\alpha \to \varphi$ in der Punkt-Norm-Topologie, wenn $\|\varphi_\alpha(x) - \varphi(x)\| \to 0$ für alle $x \in X$.

[59] Die integralen Abbildungen der Banachraumtheorie sind gerade der Punkt-Norm-Abschluß der nuklearen Abbildungen. Man beachte, daß die Formeln $\iota_B(\varphi) = \iota_B(\varphi^*)$ und $I_B(E, F^*) = (E \otimes_\lambda F)^*$ in dieser Form nur für integrale Abbildungen gelten.

11 Anhang

11.1 Tensorprodukte

11.1.1 Tensorprodukt von Operatormatrizen

Wie üblich erklären wir das algebraische Tensorprodukt von Operatormatrizen $x = [x_{ij}] \in M_p(X)$, $y = [y_{kl}] \in M_q(Y)$ durch

$$x \otimes y := [x_{ij} \otimes [y_{kl}]_{k,l}]_{i,j} \in M_p(X \otimes M_q(Y))$$

Hierbei wurde die Definition $M_p(X) = M_p \otimes X$ und das Assoziativgesetz

$$M_p(X) \otimes M_q(Y) = M_p \otimes (X \otimes M_q(Y)) = M_p(X \otimes M_q(Y)) \tag{5}$$

benutzt. Für die weitere Identifikation beachte man, daß die *shuffle*-Abbildung ein algebraischer Isomorphismus ist:

$$X \otimes (M_q \otimes Y) \to M_q \otimes (X \otimes Y), \tag{6}$$

$$x \otimes (\beta \otimes y) \mapsto \beta \otimes (x \otimes y),$$

für $\beta \in M_q$, $x \in X$, $y \in Y$. Mit Hilfe des *shuffle*-Isomorphismus identifizieren wir weiter:

$$x \otimes y = [x_{ij} \otimes [y_{kl}]_{k,l}]_{i,j} = [[x_{ij} \otimes y_{kl}]_{k,l}]_{i,j} \in M_p(M_q(X \otimes Y)).$$

Zuletzt identifizieren[60] wir noch wie üblich $M_p(M_q) = M_{pq}$

$$[[x_{ij} \otimes y_{kl}]_{k,l}]_{i,j} = [x_{ij} \otimes y_{kl}]_{(i,k),(j,l)}$$

und erhalten

$$M_p(X) \otimes M_q(Y) = M_{pq}(X \otimes Y). \tag{7}$$

Wir nennen diesen algebraischen Isomorphismus den ***shuffle*-Isomorphismus**

Man beachte, daß für Operatorraum-Tensorprodukte die algebraischen Identifikationen (5) und (6) nur vollständige Kontraktionen sind:

$$\mathbb{M}_p(X) \otimes_\alpha Y \quad \to \quad \mathbb{M}_p(X \otimes_\alpha Y), \tag{8}$$

$$X \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y) \quad \to \quad \mathbb{M}_q(X \otimes_\alpha Y). \tag{9}$$

Im allgemeinen sind dies nicht einmal auf der Grundstufe Isometrien.

Für ein Operatorraum-Tensorprodukt ist also die ***shuffle*-Abbildung**

$$\mathbb{M}_p(X) \otimes_\alpha \mathbb{M}_q(Y) \to \mathbb{M}_{pq}(X \otimes_\alpha Y) \tag{10}$$

im allgemeinen nur vollständig kontrahierend.

[60] In der entstehenenden Matrix sind (i,k) die Zeilenindizes und (j,l) die Spaltenindizes, wobei $i, j = 1, \ldots, p$ und $k, l = 1, \ldots, q$. Die Indizes (i,k) bzw. (j,l) sind lexikographisch angeordnet.

Im Falle des injektiven Operatorraum-Tensorproduktes ist dies natürlich eine vollständige Isometrie.

Man betrachtet die *shuffle*–Abbildung allgemeiner für Rechteckmatrizen[61]:

$$\mathbb{M}_{m,n}(X) \otimes_\alpha \mathbb{M}_{p,q}(Y) \to \mathbb{M}_{mp,nq}(X \otimes_\alpha Y).$$

Ein Beispiel ist auch die Gleichung von Blecher und Paulsen.

11.1.2 Allgemeine Amplifikation einer Dualität

Die **Matrix-Dualität**,die der Dualitätstheorie der Operatorräume zugrundeliegt, ist ein Spezialfall der allgemeinen Amplifikation einer bilinearen Abbildung.

Die allgemeine Amplifikation einer Dualität $\langle X, X^* \rangle$ von Vektorräumen ist demgemäß definiert als

$$\langle x, \varphi \rangle^{p\times q} = \langle [x_{ij}], [\varphi_{\kappa\lambda}] \rangle^{p\times q} := [\langle x_{ij}, \varphi_{\kappa\lambda} \rangle] \in M_p(M_q) = M_{pq}$$

für $x = [x_{ij}] \in M_p(X)$, $\varphi = [\varphi_{\kappa\lambda}] \in M_q(X^*)$.

Liest man φ als Abbildung $\varphi : X \longrightarrow M_q$ so gilt

$$\varphi^{(p)}(x) = \langle x, \varphi \rangle^{p\times q}$$

Zur **Dualität von Tensorprodukten**[62] $\langle X \otimes Y, X^* \otimes Y^* \rangle$ gehört die allgemeine Amplifikation

$$\langle M_p(X \otimes Y), M_q(X^* \otimes Y^*) \rangle.$$

Es gilt insbesondere

$$\begin{aligned} &\langle x \otimes y, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle [x_{ij}] \otimes [y_{kl}], [\varphi_{\kappa\lambda}] \otimes [\psi_{\mu\nu}] \rangle \\ &:= \quad [\langle x_{ij}, \varphi_{\kappa\lambda} \rangle \langle y_{kl}, \psi_{\mu\nu} \rangle]_{(ik\kappa\mu),(jl\lambda\nu)} \in M_{p_1}(M_{p_2}(M_{q_1}(M_{q_2}))) = M_{p_1 p_2 q_1 q_2} \end{aligned}$$

für $x = [x_{ij}] \in M_{p_1}(X)$, $y = [y_{kl}] \in M_{p_2}(Y)$, $\varphi = [\varphi_{\kappa\lambda}] \in M_{q_1}(X^*)$, $\psi = [\psi_{\mu\nu}] \in M_{q_2}(Y^*)$.

11.1.3 Tensorielle Matrixmultiplikation

Bei der Definition von vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen und der Bildung des Haagerup-Tensorproduktes verwendet man die **tensorielle Matrixmultiplikation** [Eff87]

$$x \odot y = [x_{ij}] \odot [y_{jk}] := \left[\sum_{j=1}^{l} x_{ij} \otimes y_{jk}\right] \in M_n(X \otimes Y)$$

[61] Man kann untersuchen, wie sich die *shuffle*-Abbildung

$$(U \otimes X) \otimes (V \otimes Y) \to (U \otimes V) \otimes (X \otimes Y),$$

$$(u \otimes x) \otimes (v \otimes y) \mapsto (u \otimes v) \otimes (x \otimes y).$$

für Operatorraume U,V,X,Y und verschiedene Kombinationen von Operatorraum-Tensorprodukten verhält [EKR93, Chap. 4].

[62] Die Dualität $\langle X \otimes Y, X^* \otimes Y^* \rangle$ wird durch $\langle x \otimes y, \varphi \otimes \psi \rangle := \langle x, \varphi \rangle \langle y, \psi \rangle$ für $x \in X$, $y \in Y$, $\varphi \in X^*$, $\psi \in Y^*$ erklärt.

von Operatormatrizen $x = [x_{ij}] \in M_{n,l}(X)$, $y = [y_{jk}] \in M_{l,n}(Y)$.

Die Amplifikation der bilinearen Abbildung $\otimes : X \times Y \to X \otimes Y$ ist

$$\otimes^{(n,l)} = \odot : M_{n,l}(X) \times M_{l,n}(Y) \to M_n(X \otimes Y).$$

Für skalare Matrizen $\alpha, \gamma \in M_n$, $\beta \in M_l$ gilt

$$(\alpha x \beta) \odot (y\gamma) = \alpha(x \odot (\beta y))\gamma.$$

Wir schreiben kurz $\alpha x \beta \odot y\gamma$.

Für lineare Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \Phi = [\Phi_{ij}] : x & \to & M_{n,l}(V), \\ \Psi = [\Phi_{jk}] : x & \to & M_{l,n}(W) \end{array}$$

bezeichnet $\Phi \odot \Psi$ die Abbildung

$$\Phi \odot \Psi = \left[\sum_{j=1}^{l} \Phi_{ij} \otimes \Psi_{jk} \right] : X \otimes Y \to M_n(V \otimes W),$$

$$\Phi \odot \Psi : x \otimes y \mapsto \left[\sum_{j=1}^{l} \Phi_{ij}(x) \otimes \Psi_{jk}(y) \right].$$

Es gilt

$$(\Phi \odot \Psi)^{(p)}(x \odot y) = (\Phi^{(p,q)}(x)) \odot (\Psi^{(q,p)}(y))$$

für $x \in M_{p,q}(X)$, $y \in M_{q,p}(Y)$.

Es sei $\otimes_\alpha$ ein Operatorraum-Tensorprodukt. Wir definieren die tensorielle Matrixmultiplikation $\odot_\alpha$ von Operatormatrizen $S = [S_{i,j}] \in M_{n,l}(CB(X_1, X_2))$, $T = [T_{k,l}] \in M_{l,n}(CB(Y_1, Y_2))$ vollständig beschränkter Abbildungen als

$$S \odot_\alpha T = \left[\sum_{j=1}^{l} S_{ij} \otimes_\alpha T_{jk} \right] \in M_n(CB(X_1 \otimes_\alpha Y_1, X_2 \otimes_\alpha Y_2))$$

11.2 Interpolation

Schnitt und Summe

Seien X und Y Operatorräume, so daß $M_1(X)$ und $M_1(Y)$ eingebettet sind in einen Hausdorffschen topologischen Vektorraum. Dann normieren wir $M_n(X \cap Y)$ gemäß $M_n(X \cap Y) := M_n(X) \cap M_n(Y)$, also

$$\|[x_{ij}]\|_{M_n(X \cap Y)} = \max \left\{ \|[x_{ij}]\|_{M_n(X)}, \|[x_{ij}]\|_{M_n(Y)} \right\}.$$

$X \cap Y$ heißt **Operatorraumschnitt**.
Für Operatorräume[63] X, Y betten wir $X \oplus Y$ in $(X^* \oplus_\infty Y^*)^*$ ein und erhalten so eine Operatorraumstruktur $X \oplus_1 Y$. Sei $\diamondsuit := \{(x, -x)\} \subset X \oplus_1 Y$. Die Quotienten-Operatorraumstruktur $(X \oplus_1 Y)/\diamondsuit$ heißt **Operatorraumsumme** und wird mit $X+Y$ bezeichnet. Wir haben also

$$\|[x_{ij}]\|_{M_n(X+Y)} = \inf_{[x_{ij}]=[x_{ij}]_X+[x_{ij}]_Y} \|[(x_{ij_X}, x_{ij_Y})]\|_{M_n(X \oplus_1 Y)}.$$

Interpolation

Seien E_0, E_1 Banachräume. Das Paar (E_0, E_1) heißt verträglich im Sinne der Interpolationstheorie [BL76], wenn es einen Hausdorffschen topologischen Vektorraum V und lineare stetige Inklusionen $E_0 \hookrightarrow V$ und $E_1 \hookrightarrow V$ gibt. Diese erlauben es, den Interpolationsraum $E_\theta := (E_0, E_1)_\theta$ für $0 < \theta < 1$ zu definieren.

Pisier führte die analoge Konstruktion für Operatorräume ein [Pis96, §2]: Seien X_i $(i = 0, 1)$ Operatorräume. Dann haben wir spezifische Normen auf $M_n(X_i)$ und stetige lineare Inklusionen $M_n(X_i) \hookrightarrow M_n(V)$.[64] Der **interpolierte Operatorraum** X_θ wird jetzt über $M_n(X_\theta) := (M_n(X_0), M_n(X_1))_\theta$ definiert.
Seien X ein Operatorraum, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, und es gebe eine beschränkte, lineare und injektive Abbildung $V : \mathcal{H} \to X$ mit dichtem Bild, so daß die Abbildung[65] $VV^* : \overline{X^*} \to X$ ebenfalls beschränkt, linear und injektiv mit dichtem Bild ist. Dann gilt vollständig isometrisch: $(\overline{X^*}, X)_{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{cb}}{=} OH_\mathcal{H}$ [Pis96, Cor. 2.4].

Beispiele

1. $(\mathcal{R}_\mathcal{H}, \mathcal{C}_\mathcal{H})_{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{cb}}{=} OH_\mathcal{H} \stackrel{\text{cb}}{=} (MIN_\mathcal{H}, MAX_\mathcal{H})_{\frac{1}{2}}$

2. $(\mathcal{C}_\mathcal{H} \otimes_h \mathcal{R}_\mathcal{H}, \mathcal{R}_\mathcal{H} \otimes_h \mathcal{C}_\mathcal{H})_{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{cb}}{=} OH_\mathcal{H} \otimes_h OH_\mathcal{H} \stackrel{\text{cb}}{=} OH_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}}$

Auf diese Art erhält man auch Operatorraumstrukturen auf den Schattenidealen $S_p = (S_\infty, S_1)_{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq p \leq \infty$.

---

[63] Seien E, F Banachräume. Dann haben wir ihre 1-direkte Summe $E \oplus_1 F$ mit der Norm

$$\|(x_E, x_F)\| = \|x_E\| + \|x_F\|$$

und ihre Summe $E + F$ mit der Quotienten-Norm

$$\|x\|_{E+F} = \inf_{x=x_E+x_F} \left(\|x_E\|_E + \|x_F\|_F\right).$$

[64] $M_n(V)$ wird mit V^{n^2} identifiziert.
[65] Wir identifizieren wie üblich $\mathcal{H}$ mit seinem Dual.

12 Symbolverzeichnis

Mengen

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen

Banachräume

E, F	Banachräume
$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$	Hilberträume
$\bigoplus_2$	Hilbertraum-direkte Summe
$\mathcal{H}^n$	$\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}$
ℓ_2^n	der n-dimensionale Hilbertraum

Algebren

$B(\mathcal{H})$	Algebra der linearen beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$
A, B	C^*-Algebren
A^{op}	*opposite algebra* einer Algebra A
$\mathbb{1}_A$	die Identität in A
M, N	von Neumann-Algebren

Ideale

S_p	die Schatten-p-Klassen
$K(\cdot,\cdot)$	das Ideal der kompakten Operatoren
$\mathbf{K}(\cdot,\cdot)$	die abgeschlossene, lineare Hülle der elementaren Operatoren; Ideal in $B^{\mathrm{ad}}(\cdot,\cdot)$
$N(\cdot,\cdot)$	das Ideal der nuklearen Operatoren
$HS(\cdot,\cdot)$	das Ideal der Hilbert-Schmidt-Operatoren (S_2)
$\Pi_2(\cdot,\cdot)$	das Ideal der absolut-2-summierenden Operatoren
$\pi_2(\cdot)$	die absolut-2-summierende Norm

Abbildungsräume

$\Gamma_2(\cdot,\cdot)$	durch den Spalten-Hilbertraum faktorisierende Operatoren
$\gamma_2(\cdot)$	die Norm auf Γ_2
$CN(\cdot,\cdot)$	vollständig nukleare Operatoren
$\nu(\cdot)$	die Norm auf CN
$CI(\cdot,\cdot)$	vollständig integrale Operatoren
$\iota(\cdot)$	die Norm auf CI

Operatorräume

X, Y	Operatorräume
$B(\mathcal{H})$	Algebra der linearen beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$
$M_n(X)$	$M_n \otimes X$ algebraisch, die Matrizen mit Einträgen aus X
$M_1(X)$	Grundstufe des Operatorraumes X
$CB(X,Y)$	Operatorraum der vollständig beschränkten Abbildungen
$CB(X,Y)_A$	Operatorraum der vollständig beschränkten rechten A-Modulabbildungen
$CB(X \times Y; Z)$	Operatorraum der vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen
$JCB(X \times Y; Z)$	Operatorraum der allgemein vollständig beschränkten bilinearen Abbildungen
$\|\cdot\|_{\mathrm{jcb}}$	Norm einer allgemein vollständig beschränkten bilinearen Abbildung
X_0, Y_0	Operatorunterräume der korrespondierenden Operatorräume
X^*	Dual des Operatorraums X

spezielle Operatorräume

$MIN(E)$	der minimale Operatorraum auf E
$MAX(E)$	der maximale Operatorraum auf E
$MIN_{\mathcal{H}}$	der minimale Operatorraum auf $\mathcal{H}$
$MAX_{\mathcal{H}}$	der maximale Operatorraum auf $\mathcal{H}$
$\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$	der Zeilen-Hilbertraum
$\mathcal{R}_n$	$\mathcal{R}_{\ell_2^n}$
$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$	der Spalten-Hilbertraum
$\mathcal{C}_n$	$\mathcal{C}_{\ell_2^n}$
$OH_{\mathcal{H}}$	der Operatorhilbertraum

Normen

$\|\cdot\|_{\mathrm{cb}}$	vollständig beschränkte Norm
$\|\cdot\|_{\mathrm{row}}$	Zeilennorm
$\|\cdot\|_{\mathrm{col}}$	Spaltennorm
$\|\cdot\|_n$	Norm auf $M_n(X)$
$\|\cdot\|_{m,n}$	Norm auf $M_{m,n}(X)$

Matrizen

$M_{n,m}(X)$	$n \times m$-Matrizen über X
$M_n(X)$	$M_{n,n}(X)$
$M_{n,m}$	$M_{n,m}(\mathbb{C})$
M_n	$M_{n,n}$
$\mathbb{M}_{n,m}(X)$	der Operatorraum der $n \times m$-Matrizen über X
$\mathbb{M}_n(X)$	$\mathbb{M}_{n,n}(X)$
$\mathbb{M}_{n,m}$	$\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{C})$
$\mathbb{M}_n$	$\mathbb{M}_{n,n}$
$C_n(X)$	$\mathbb{M}_{n,1}(X)$, die Spalten eines Operatorraums
$R_n(X)$	$\mathbb{M}_{1,n}(X)$, die Zeilen eines Operatorraums

Tensorprodukte

$\odot$	tensorielles Matrixprodukt
$\otimes$	algebraisches Tensorprodukt
$\otimes_A$	algebraisches Modul-Tensorprodukt
$\widetilde{\otimes}$	vervollständigtes Tensorprodukt
$\otimes_\alpha$	Operatorraum-Tensorprodukt
$\otimes_{\alpha^*}$	duales Operatorraum-Tensorprodukt
$\otimes_h$	das Haagerup-Tensorprodukt
$\otimes_{hA}$	das Modul-Haagerup-Tensorprodukt
$\overset{\vee}{\otimes}$	das injektive Tensorprodukt
$\overset{\wedge}{\otimes}$	das projektive Tensorprodukt
$\otimes_\lambda$	injektives Banachraum-Tensorprodukt
$\otimes_\gamma$	projektives Banachraum-Tensorprodukt
$\otimes_{\text{ext}}$	das äußere Tensorprodukt
$\otimes_\Theta$	das innere Tensorprodukt
$S \otimes_\alpha T$	α-Tensorprodukt der vollständig beschränkten Operatoren S, T

Tensornormen

$\\|\cdot\\|_\alpha$	α-Operatorraum-Tensornorm
$\\|\cdot\\|_{\alpha,n}$	α-Operatorraum-Tensornorm auf der $n$ten Stufe
$\\|\cdot\\|_{\alpha^*}$	duale Operatorraum-Tensornorm zu $\\|\cdot\\|_\alpha$
$\\|\cdot\\|_\vee$	injektive Operatorraum-Tensornorm
$\\|\cdot\\|_\wedge$	projektive Operatorraum-Tensornorm
$\\|\cdot\\|_h$	Haagerup-Operatorraum-Tensornorm
$\\|\cdot\\|_\lambda$	injektive Banachraum-Tensornorm
$\\|\cdot\\|_\gamma$	projektive Banachraum-Tensornorm

Operatormoduln

$A_1,\ A_2$	C^*-Algebren
$M,\ N$	von Neumann-Algebren
$\mathrm{Aut}(M)$	die Menge der *-Automorphismen über M
$CB_{(A_1,A_2)}(X,Y)$	der Operatorraum der vollständig beschränkten A_1-Links-A_2-Rechts-Modulhomomorphismen zwischen X und Y
$CB^\sigma_{(A_1,A_2)}(X,Y)$	der Operatorraum der normalen vollständig beschränkten A_1-Links-A_2-Rechts-Modulhomomorphismen zwischen X und Y
$CB^s_{(A_1,A_2)}(X,Y)$	der Operatorraum der singulären vollständig beschränkten A_1-Links-A_2-Rechts-Modulhomomorphismen zwischen X und Y

Hilbert-C^*-Moduln

$\overline{X}$	konjugierter Hilbert-C^*-Modul
$B(\cdot,\cdot)_A$	Raum der beschränkten A-Rechts-Modulhomomorphismen
$\langle\cdot,\cdot\rangle_A$	inneres Produkt eines rechten Hilbert-A-Moduls
${}_A\langle\cdot,\cdot\rangle$	inneres Produkt eines linken Hilbert-A-Moduls
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	inneres Produkt eines Hilbertraumes
$B^{\mathrm{ad}}(X,Y)$	Operatorraum der adjungierbaren A-Modulabbildungen zwischen Hilbert-C^*-Moduln X und Y

Abbildungen

$\mathbb{1}_{B(\mathcal{H})}$	die Identität in $B(\mathcal{H})$
$\mathbb{1}_n$	Identität in M_n
π	Darstellungen
$\Phi^{(n)}$	n-te Amplifikation einer linearen Abbildung Φ
$\Phi^{(n,l)}$	(n,l)-te Amplifikation einer bilinearen Abbildung Φ
$\Phi^{(n)}$	$\Phi^{(n,n)}$, n-te Amplifikation einer bilinearen Abbildung Φ
$\Phi^{(n)}$	n-te Amplifikation einer multilinearen Abbildung Φ
$\Phi^{(p\times q)}$	allgemeine Amplifikation einer bilinearen Abbildung Φ
$\tilde{\Phi}$	Linearisierung einer bilinearen Abbildung Φ
Φ^σ	der normale (=w^*-w^*-stetige) Anteil einer Abbildung Φ zwischen dualen Räumen
Φ^s	der singuläre Anteil einer Abbildung Φ zwischen dualen Räumen
Θ	treue, nichtentartete $*$-Darstellung einer C^*-Algebra

Isomorphismen

$\overset{\mathrm{cb}}{\cong}$	vollständig isometrisch isomorph
$\overset{\mathrm{cb}}{\simeq}$	vollständig isomorph
$\simeq$	isomorph

Sonstiges

Ball	Einheitskugel
$\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$	n-fache direkte Summe
$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$	abzählbare direkte Summe
T^*	adjungierter Operator

Literatur

[Arv69] William B. Arveson. Subalgebras of C^*-algebras. *Acta Math.*, 123:141–224, 1969. 3

[Bet97] Benedikt Betz. Matrixkonvexe Analysis. Diplomarbeit, Universität der Saarlandes, 1997. 44

[BGR77] Lawrence G. Brown, Philip Green, and Marc A. Rieffel. Stable isomorphism and strong Morita equivalence of C^*-algebras. *Pacific J. Math.*, 71(2):349–363, 1977. 49

[BL76] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. 63

[Ble92a] David P. Blecher. The standard dual of an operator space. *Pacific J. Math.*, 153(1):15–30, 1992. 7, 7, 8, 8, 9, 10

[Ble92b] David P. Blecher. Tensor products of operator spaces. II. *Canad. J. Math.*, 44(1):75–90, 1992. 8, 8, 10, 10, 12, 12, 14, 14, 19, 28, 32, 38

[Ble95] David P. Blecher. A completely bounded characterization of operator algebras. *Math. Ann.*, 303(2):227–239, 1995. 11, 13, 20, 20, 20

[Ble96] David P. Blecher. A generalization of Hilbert modules. *J. Funct. Anal.*, 136(2):365–421, 1996. 49

[Ble97] David P. Blecher. A new approach to Hilbert C^*-modules. *Math. Ann.*, 307(2):253–290, 1997. 49, 54, 55, 55, 55, 55

[BLM95] David P. Blecher and Christian Le Merdy. On quotients of function algebras and operator algebra structures on l_p. *J. Operator Theory*, 34(2):315–346, 1995. 20, 20, 21, 21, 21, 21, 21, 22, 22

[BMP] David P. Blecher, Paul S. Muhly, and Vern I. Paulsen. Categories of operator modules (Morita equivalence and projective modules). *Mem. Amer. Math. Soc.* 37, 37, 38, 49, 53

[BP91] David P. Blecher and Vern I. Paulsen. Tensor products of operator spaces. *J. Funct. Anal.*, 99(2):262–292, 1991. 6, 7, 22, 22, 25, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 30, 30, 31, 33, 34, 35

[Bro77] Lawrence G. Brown. Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C^*-algebras. *Pacific J. Math.*, 71(2):335–348, 1977. 49

[BRS90] David P. Blecher, Zhong-jin Ruan, and Allan M. Sinclair. A characterization of operator algebras. *J. Funct. Anal.*, 89(1):188–201, 1990. 19, 19, 19, 20, 20, 20, 20

[CC92] Jean-Pierre Changeux and Alain Connes. *Matière à pensée*. Editions Odile Jacob, Paris, 1992. Reprint of the 1989 edition. 15

[CE77] Man Duen Choi and Edward G. Effros. Injectivity and operator spaces. *J. Functional Analysis*, 24(2):156–209, 1977. 3, 45

[CES87] Erik Christensen, Edward G. Effros, and Allan Sinclair. Completely bounded multilinear maps and C^*-algebraic cohomology. *Invent. Math.*, 90(2):279–296, 1987. 19, 39, 39, 40

[Chr82] Erik Christensen. Extensions of derivations. II. *Math. Scand.*, 50(1):111–122, 1982. 39

[CS87] Erik Christensen and Allan M. Sinclair. Representations of completely bounded multilinear operators. *J. Funct. Anal.*, 72(1):151–181, 1987. 33, 41, 41

[CS89] Erik Christensen and Allan M. Sinclair. A survey of completely bounded operators. *Bull. London Math. Soc.*, 21(5):417–448, 1989. 3, 37

[Eff87] Edward G. Effros. Advances in quantized functional analysis. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 906–916, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc. 3, 34, 61

[EH85] Edward G. Effros and Uffe Haagerup. Lifting problems and local reflexivity for C^*-algebras. *Duke Math. J.*, 52(1):103–128, 1985. 38, 39

[EJR98] Edward G. Effros, Marius Junge, and Zhong-Jin Ruan. Integral mappings and the principle of local reflexivity for non-commutative l_1-spaces. *Math.Ann.*, ??(?):??–??, 1998. 38, 38, 39, 57, 57, 58, 59, 59, 59, 59

[EK87] Edward G. Effros and Akitaka Kishimoto. Module maps and Hochschild–Johnson cohomology. *Indiana Univ. Math. J.*, 36(2):257–276, 1987. 29, 36

[EKR93] Edward G. Effros, Jon Kraus, and Zhong-Jin Ruan. On two quantized tensor products. In *Operator algebras, mathematical physics, and low-dimensional topology (Istanbul, 1991)*, pages 125–145. A K Peters, Wellesley, MA, 1993. 61

[ER88] Edward G. Effros and Zhong-jin Ruan. Representations of operator bimodules and their applications. *J. Operator Theory*, 19(1):137–158, 1988. 15, 16

[ER90a] Edward G. Effros and Zhong-jin Ruan. On approximation properties for operator spaces. *Internat. J. Math.*, 1(2):163–187, 1990. 22, 26, 27, 28

[ER90b] Edward G. Effros and Zhong-jin Ruan. On nonselfadjoint operator algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 110(4):915–922, 1990. 20

[ER91] Edward G. Effros and Zhong-jin Ruan. Self-duality for the Haagerup tensor product and Hilbert space factorizations. *J. Funct. Anal.*, 100(2):257–284, 1991. 10, 11, 11, 12, 12, 12, 14, 14, 14, 14, 14, 19, 26, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 29, 30, 30, 33, 38

[ER93] Edward G. Effros and Zhong-jin Ruan. On the abstract characterization of operator spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119(2):579–584, 1993. 5

[ER94] Edward G. Effros and Zhong-Jin Ruan. Mapping spaces and liftings for operator spaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 69(1):171–197, 1994. 38, 57, 57, 58, 58, 59

[EW97a] Edward G. Effros and Corran Webster. Operator analogues of locally convex spaces. In *Operator algebras and applications (Samos, 1996)*, pages 163–207. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997. 42, 44, 45

[EW97b] Edward G. Effros and Soren Winkler. Matrix convexity: operator analogues of the bipolar and Hahn-Banach theorems. *J. Funct. Anal.*, 144(1):117–152, 1997. 42, 44, 45

[Eym64] Pierre Eymard. L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact. *Bull. Soc. Math. France*, 92:181–236, 1964. 28

[Far92] D. R. Farenick. C^*-convexity and matricial ranges. *Canad. J. Math.*, 44(2):280–297, 1992. 47

[Fis96] Hans-Jörg Fischer. Struktur Matrix konvexer Mengen (sic!). Diplomarbeit, Universität der Saarlandes, 1996. 45, 46, 46, 46, 46, 48

[FM93] D. R. Farenick and Phillip B. Morenz. C^*-extreme points of some compact C^*-convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(3):765–775, 1993. 47, 48

[Fuj94] Ichiro Fujimoto. Decomposition of completely positive maps. *J. Operator Theory*, 32(2):273–297, 1994. 42

[FZ98] Douglas R. Farenick and Hongding Zhou. The structure of C^*-extreme points in spaces of completely positive linear maps on C^*-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(5):1467–1477, 1998. 42

[GK69] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18. 11

[Haa80] Uffe Haagerup. Decomposition of completely bounded maps on operator algebras. September 1980. 3, 29

[Kir83] Eberhard Kirchberg. The Fubini theorem for exact C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 10(1):3–8, 1983. 26

[Kir94] Eberhard Kirchberg. Commutants of unitaries in UHF algebras and functorial properties of exactness. *J. Reine Angew. Math.*, 452:39–77, 1994. 26

[Kir95] Eberhard Kirchberg. On subalgebras of the CAR-algebra. *J. Funct. Anal.*, 129(1):35–63, 1995. 26

[Kir96] Eberhard Kirchberg. The derivation problem and the similarity problem are equivalent. *J. Operator Theory*, 36(1):59–62, 1996. 39

[KS71] M. Ĭ. Kadets and M. G. Snobar. Certain functionals on the Minkowski compactum. *Mat. Zametki*, 10:453–457, 1971. 9

[Lam97] Anselm Lambert. Homogene hilbertsche Operatorräume und ihre vollständig beschränkten Abbildungen. Diplomarbeit, Universität der Saarlandes, 1997. 9, 11

[Lan95] E. C. Lance. *Hilbert C^*-modules*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. A toolkit for operator algebraists. 49

[Loe75] Richard I. Loebl. Contractive linear maps on C^*-algebras. *Michigan Math. J.*, 22(4):361–366 (1976), 1975. 9, 36

[LP81] Richard I. Loebl and Vern I. Paulsen. Some remarks on C^*-convexity. *Linear Algebra Appl.*, 35:63–78, 1981. 47, 47, 48

[Mag98a] Bojan Magajna. c^*-convex sets and completely bounded bimodule homomorphisms. Preprint, 1998. 47, 47, 48

[Mag98b] Bojan Magajna. On c^*-extreme points. Preprint, 1998. 47, 48

[Mat94] Ben Mathes. Characterizations of row and column Hilbert space. *J. London Math. Soc. (2)*, 50(1):199–208, 1994. 11, 13, 13, 13, 13

[MN94] Paul S. Muhly and Qi Yuan Na. Extension of completely bounded A-B bimodule maps. *Glasgow Math. J.*, 36(2):145–155, 1994. 17

[Mor94] Phillip B. Morenz. The structure of C^*-convex sets. *Canad. J. Math.*, 46(5):1007–1026, 1994. 42, 45, 46, 47

[MP94] B. Maurey and G. Pisier. *Espaces de Banach classiques et quantiques*. Société Mathématique de France, Paris, 1994. 3

[MP95] D. Benjamin Mathes and Vern I. Paulsen. Operator ideals and operator spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(6):1763–1772, 1995. 10, 11

[Mur90] Gerard J. Murphy. *C^*-algebras and operator theory*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1990. 39

[Pas73] William L. Paschke. Inner product modules over B^*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 182:443–468, 1973. 49, 55

[Pat88] Alan L. T. Paterson. *Amenability*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. 39

[Pau82] Vern I. Paulsen. Completely bounded maps on C^*-algebras and invariant operator ranges. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 86(1):91–96, 1982. 3

[Pau86] Vern I. Paulsen. *Completely bounded maps and dilations*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1986. 3, 4, 4, 17, 17, 18

[Pau92] Vern I. Paulsen. Representations of function algebras, abstract operator spaces, and Banach space geometry. *J. Funct. Anal.*, 109(1):113–129, 1992. 9, 11, 11

[Pet97] Uwe Peters. Duale Operatorräume und der Standard-Prädual von $CB^s(B(H))$. Diplomarbeit, Universität der Saarlandes, 1997. 19, 19, 19, 38

[Pie67] A. Pietsch. Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen. *Studia Math.*, 28:333–353, 1966/1967. 11

[Pie78] Albrecht Pietsch. *Operator ideals*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978. 57

[Pis86] Gilles Pisier. *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, D.C., 1986. 30

[Pis95] Gilles Pisier. Exact operator spaces. *Astérisque*, (232):159–186, 1995. Recent advances in operator algebras (Orléans, 1992). 26, 26, 27

[Pis96] Gilles Pisier. The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 122(585):viii+103, 1996. 4, 10, 10, 10, 29, 63, 63

[Pis97] Gilles Pisier. Espaces d'opérateurs: une nouvelle dualité. *Astérisque*, (241):Exp. No. 814, 4, 243–272, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96. 3

[Pop98] Cyprian Pop. Bimodules normés représentables sur des espaces hilbertiens. Preprint, 1998. 16, 16

[Pow74] Robert T. Powers. Selfadjoint algebras of unbounded operators. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 187:261–293, 1974. 43

[PS87] V. I. Paulsen and R. R. Smith. Multilinear maps and tensor norms on operator systems. *J. Funct. Anal.*, 73(2):258–276, 1987. 29, 40, 40, 40, 40

[Rob91] A. Guyan Robertson. Injective matricial Hilbert spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 110(1):183–190, 1991. 12

[Rua88] Zhong-jin Ruan. Subspaces of C^*-algebras. *J. Funct. Anal.*, 76(1):217–230, 1988. 3, 3, 5

[Rua89] Zhong-jin Ruan. Injectivity of operator spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1):89–104, 1989. 37, 38

[Sch70] Robert Schatten. *Norm ideals of completely continuous operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1970. Second printing. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 27. 11, 38

[Smi83] R. R. Smith. Completely bounded maps between C^*-algebras. *J. London Math. Soc. (2)*, 27(1):157–166, 1983. 5

[Smi91] R. R. Smith. Completely bounded module maps and the Haagerup tensor product. *J. Funct. Anal.*, 102(1):156–175, 1991. 17

[SS95] Allan M. Sinclair and Roger R. Smith. *Hochschild cohomology of von Neumann algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. 40, 40

[Sti55] W. Forrest Stinespring. Positive functions on C^*-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6:211–216, 1955. 3

[Tak79] Masamichi Takesaki. *Theory of operator algebras. I.* Springer-Verlag, New York, 1979. 18

[Wit81] Gerd Wittstock. Ein operatorwertiger Hahn–Banach Satz. *J. Funct. Anal.*, 40(2):127–150, 1981. 3, 18

[Wit84a] G. Wittstock. Extension of completely bounded C^*-module homomorphisms. In *Operator algebras and group representations, Vol. II (Neptun, 1980)*, pages 238–250. Pitman, Boston, Mass., 1984. 3, 17

[Wit84b] Gerd Wittstock. On matrix order and convexity. In *Functional analysis: surveys and recent results, III (Paderborn, 1983)*, pages 175–188. North-Holland, Amsterdam, 1984. 42

[Woj91] P. Wojtaszczyk. *Banach spaces for analysts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991. 9

[WW99] Corran Webster and Soren Winkler. The Krein-Milman theorem in operator convexity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(1):307–322, 1999. 42, 44, 45, 46, 46

[Yli90] K. Ylinen. Representing completely bounded multilinear operators. *Acta Math. Hungar.*, 56(3-4):295–297, 1990. 40

Index