Christina Bender Universität des Saarlandes SS 2010 7.5.2010
Peter Parczewski

Risikomanagement

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

(1) Berechnen Sie ausführlich den Value at Risk VaR_α und den Expected Shortfall ES_α der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Verwenden Sie wie in der Vorlesung nur die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung $\Phi(\cdot)$. *(Hinweis: Sei $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{x^2}{2})$, so kann man $x\varphi(x)$ direkt integrieren, d.h. ohne partielle Integration.)*

(2) Sei $L = \mu + \tilde{\sigma} Y$, wo $Y \sim t_n$-verteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\tilde{\sigma} > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz, den Value at Risk VaR_α und den Expected Shortfall ES_α des Verlustes L. *(Hinweis: $ES_\alpha(Y) = \frac{f_{t_n}(t_n^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \left(\frac{n+(t_n^{-1}(\alpha))^2}{n-1} \right)$, wobei f_{t_n} die Dichte und t_n^{-1} das Quantil der t_n-Verteilung ist. Man substituiere zuerst mit $x = t_n^{-1}(u)$ und dann mit $y = (1+\frac{x^2}{n})$.)*

(3) Sei nun ein Portfolio aus a Stücken einer Aktie S im Wert von $V_0 = aS_0 = 10000$ mit dem linearisierten Verlust $L_\tau = -V_0 X_\tau$ gegeben. Hierbei ist X_τ, der tägliche log-return der Aktie, entweder $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilt mit $\sigma = \frac{0.2}{\sqrt{250}}$ oder X_τ ist ein Vielfaches einer t_4-verteilten Zufallsvariable und hat ebenfalls σ als Standardabweichung. Berechnen und vergleichen Sie den Value at Risk und den Expected Shortfall für diesen linearen Verlust zu den Konfidenzniveaus $\alpha = 90\%, 95\%, 97.5\%, 99\%$ und 99.5%.

Aufgabe 2 Sei ein Portfolio aus $d = 100$ Bonds, die ausfallen können. Wir nehmen an, dass die Ausfälle verschiedener Bonds unabhängig sind. Die Ausfallwahrscheinlichkeit beträgt für jeden Bond 2%. Der Preis eines jeden Bonds zum Zeitpunkt 0 beträgt 100. Fällt ein Bond nicht aus, so gibt es zum Zeitpunkt τ eine Auszahlung von 105. Bei Ausfall gibt es keine Auszahlung. Also ist L_i, der Verlust des Bonds i, 100 wenn er ausfällt, und -5 wenn er nicht ausfällt. Sei $\mathbf{1}_i$ der Indikator für den Ausfall des Bonds i. Er ist 1 wenn der Bond i bis zum Zeitpunkt τ ausfällt und 0 sonst. Wir erhalten also

$$L_i = 100\mathbf{1}_i - 5(1 - \mathbf{1}_i) = 105\mathbf{1}_i - 5.$$

Wir betrachten wieder die beiden Portfolios A und B mit Anfangskapital $V_0 = 10000$. Das Portfolio A besteht aus 100 Einheiten des Bonds 1 und B besteht aus je einer Einheit des Bonds i für $i = 1, \ldots, 100$. Bestimmen und vergleichen Sie den Expected Shortfall zu dem Konfidenzniveau 95%.

Aufgabe 3

(1) Sei X eine d-dimensionale Normalverteilung für ein $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Komponenten von X sind unabhängig genau dann, wenn sie unkorreliert sind. *(Hinweis: Betrachten Sie die charakteristische Funktion.)*

(2) Ein d-dimensionaler Zufallsvektor Y ist normalverteilt genau dann, wenn $b^T Y$ normalverteilt ist für alle $b \in \mathbb{R}^n$.

(3) Seien $Z_1, \ldots, Z_d$ unabhängig. Dann gilt: Der Zufallsvektor $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)$ ist rotationsinvariant genau dann, wenn die Z_i unabhängig und identisch normalverteilt sind mit $Z_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ für ein $\sigma > 0$.