

# Risikomanagement

## Übungsblatt 6

**Aufgabe 1** Bestimmen Sie die Dichte von der Zufallsvariablen

$$p(Z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\rho}Z}{\sqrt{1-\rho}}\right), \quad (0.1)$$

wobei  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt ist.

(*Hinweis:* Transformationsatz für Dichten.)

Zeigen Sie, dass dies genau die Dichte der large pool approximation  $F_\infty(x)$  von Blatt 5, Aufgabe 3 ist.

**Aufgabe 2** Es seien zwei Portfolios wie folgt gegeben. Das Portfolio A enthalte 10 Kredite und das Portfolio B 10000. Die einzelnen Kreditnehmer  $(\mathbf{1}_i)_i$  folgen hierbei einem gemischten Bernoulli-Modell mit  $p(Z)$  gegeben durch (0.1). Es sei  $p = 0,01$  und  $\rho = 0,2$ .

- (i) Simulieren Sie jedes Portfolio und ermitteln eine empirische Verlustverteilung.
- (ii) Bestimmen Sie die Verlustverteilung der Portfolios mittels der large pool approximation.

Variieren Sie die Anzahl der Simulationen und stellen Sie die Verteilung graphisch dar.

**Aufgabe 3** Die momenterzeugende Funktion  $m_X(t)$  einer Zufallsvariablen  $X$  ist definiert als

$$m_X(t) = \mathbf{E}[\exp(tX)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \mathbf{E}[X^i]$$

sofern alle Erwartungswerte existieren. Es ist offenbar  $\frac{d^n}{dt^n} m_X(0) = \mathbf{E}[X^n]$ .

Die Gamma-Verteilung mit den Parametern  $a, b > 0$  hat die Dichte

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

- (i) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariable  $X \sim B_{1,p}$ ,  $p \in (0, 1)$ .
- (ii) Seien  $n$  unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen  $X_i \sim B_{1,p_i}$ ,  $p_i \in (0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wir betrachten die beiden Fälle
  - (a)  $p_i = p$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .
  - (b) Die  $p_i$  sind eventuell verschieden.

Bestimmen Sie in beiden Fällen die momenterzeugende Funktion von  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  und ermitteln daraus jeweils den Erwartungswert  $\mathbf{E}[Y]$ .

- (iii) Zeigen Sie für eine Gamma-verteilte Zufallsvariable  $\Lambda$  mit den Parametern  $a = b > 0$ , dass  $\mathbf{E}[\Lambda] = 1$  gilt.

**Aufgabe 4** Es seien folgende Marktdaten am 20.3.2009 gegeben: Der Zinssatz sei  
 von 0 – 3 Monate 1% p.a.  
 von 3 – 6 Monate 2% p.a.  
 von 6 – 12 Monate 3% p.a.

Der Spread eines Par-CDS (d.h.  $PV_{CDS} = 0$ ) sei für einen CDS mit  
 6 Monaten Laufzeit 0,31% p.a. und  
 12 Monaten Laufzeit 0,34% p.a.

Es wird jeweils eine Recovery von 40% angenommen. Bewerten Sie einen CDS am 20.3.2009, der noch bis zum 21.12.2010 läuft und alle drei Monate einen Spread von 0,5% p.a. zahlt. Unterstellen Sie eine Recovery von 30%.

*Hinweise:*

Es ist  $\Delta(t_{i-1}, t_i) := \frac{t_i - t_{i-1}}{365}$  und  $SP_0 = 1$ . Um den CDS zu bewerten, ermitteln Sie zuvor die notwendigen Diskontfaktoren und die Ausfallwahrscheinlichkeiten mit dem Bootstrapping Verfahren aus der Vorlesung. Setzen Sie zur Vereinfachung des Bootstrapping die Anzahl der Diskretisierungsschritte für das Protection leg auf die Anzahl der Prämienzahlungen am 20.6.2009, 20.9.2009 und am 21.12.2009. Nehmen Sie an, der Spread eines Par-CDS von 3 Monaten wäre gleich dem von 6 Monaten und der von 9 Monaten gleich dem Mittelwert der Spreads von 6 und 12 Monaten.

**Die Übungen können bis Donnerstag vor der nächsten Übung am 8.7.10 zur Korrektur in E2 4, Zimmer 208 abgegeben werden.**