Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2017
28. Juni 2017

Mathematik für Informatiker II

11. Übung

Aufgabe 1 **($1 + 5 = 6$ Punkte)** Beweisen Sie folgende Aussagen.

i) Ist V ein Vektorraum ausgestattet mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann gilt für die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle.$$

ii) Im $\mathbb{R}^n$ kann man folgende Abbildungen definieren:

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Beweisen Sie, dass es sich hierbei um Normen handelt, diese aber nicht durch ein Skalarprodukt induziert werden.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)** Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Pol}_3([-1, 1])$ der Polynomfunktionen über dem Intervall $[-1, 1]$ mit Grad kleiner gleich 3, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Die Familie $(1, x, x^2, x^3)$ bildet eine Basis dieses Vektorraums. Transformieren Sie diese Basis mit Hilfe der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung zu einer Orthonormalbasis.

Aufgabe 3 **($1 + 3 = 4$ Punkte)** Betrachten Sie für $x \in \mathbb{R}^3$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung hat.

ii) Bestimmen Sie den Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^3$ der $\|Ax - b\|$ minimiert, wobei $\|\cdot\|$ der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^4$ entspricht. Berechnen Sie $\|Ax_0 - b\|$.