Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Mathematik für Informatiker II

12. Übung

Aufgabe 1 **($5+2=7$ Punkte)** Betrachten Sie die Funktion $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\pi}x & , \quad -\pi\le x\le 0\\ \frac{2}{\pi}x & , \quad 0<x\le\pi\end{cases}.$$

i) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten zu f.

ii) Berechnen Sie den Wert der Fourierreihe zu f an der Stelle π, ohne Bemerkung 11.6 zu verwenden, wobei die Konvergenz der Reihe an der Stelle π durch das Majorantenkriterium als gesichert vorausgesetzt werden darf.

Hinweis: Sie dürfen in ii)

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

verwenden.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\mathcal{O}(n)=\left\{Q\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid Q^TQ=E_n\right\} \text{ und } \mathcal{SO}(n)=\{Q\in\mathcal{O}(n)\mid \det(Q)=1\}$$

Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation bilden.

Aufgabe 3 **($4+2=6$ Punkte)** Betrachten Sie für $k=1,\dots,n$ die Vektoren

$$v_k=\gamma_k\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{0,5}{n}(k-1)\pi\right)\\ \cos\left(\frac{1,5}{n}(k-1)\pi\right)\\ \vdots\\ \cos\left(\frac{n-0,5}{n}(k-1)\pi\right)\end{pmatrix} \text{ mit } \gamma_k=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}} & ,k=1\\ \sqrt{\frac{2}{n}} & ,1<k\le n\end{cases}.$$

i) Zeigen Sie, dass $B=(v_1,\dots,v_n)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem euklidischen Skalarprodukt bildet.

ii) Bestimmen Sie die Koordinaten eines beliebigen Vektors $y\in\mathbb{R}^n$ bezüglich der Basis B.

Hinweis: Sie dürfen für i) folgende Formeln verwenden

(1) $\sum_{j=1}^{n}\cos((j-0,5)x)=\frac{\sin(nx)}{2\sin(0,5x)}$, $0<x<2\pi$,

(2) $\cos(x)\cdot\cos(y)=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Für den Beweis der Formeln (1) und (2) erhalten Sie bis zu 3 Bonuspunkte.