

Mathematik für Informatiker II

13. Übung

Aufgabe 1 (5 + 1 = 6 Punkte) Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathcal{O}(3)$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, sodass

$$A = BDB^T.$$

ii) Zeigen Sie, dass A positiv-definit ist und bestimmen Sie die Quadratwurzel $A^{\frac{1}{2}}$ von A .

Aufgabe 2 (3 Punkte) Betrachten Sie für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T Ay.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung f genau dann ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n bildet, wenn A nur positive Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$