

Mathematik für Informatiker II

3. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte) Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ alle Lösungen dieses Gleichungssystems.

Aufgabe 2 (2 Punkte) Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

i) Für alle $a, b \in G$ gilt:

$$(a^{-1})^{-1} = a \text{ und } (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

ii) Für $a, b, \tilde{b} \in G$ gelten die Kürzungsregeln

$$a * b = a * \tilde{b} \Rightarrow b = \tilde{b} \quad \text{und} \quad b * a = \tilde{b} * a \Rightarrow b = \tilde{b}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Betrachten Sie die Menge $V = \{0, 1, p, q\}$ mit den Verknüpfungen

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & p & q \\ \hline 0 & 0 & 1 & p & q \\ 1 & 1 & 0 & q & p \\ p & p & q & 0 & 1 \\ q & q & p & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \cdot : V \times V \rightarrow V, \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & p & q \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & p & q \\ p & 0 & p & q & 1 \\ q & 0 & q & 1 & p \end{array}.$$

Überprüfen Sie, ob $(V, +, \cdot)$ einen Körper bildet.