Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2017
30. Mai 2017

Mathematik für Informatiker II

7. Übung

Aufgabe 1 **($2+4=6$ Punkte)** Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n\in\mathbb{N}$ und eine Matrix $A\in V$.

i) Zeigen Sie, dass die durch $F(X)=X\cdot A-A\cdot X$ definierte Abbildung $F:V\to V$ linear ist.

ii) Wir wählen $n=2$ und
$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie den Rang und den Defekt von F.

Aufgabe 2 **(3 Punkte)** Betrachten Sie die Ebenen $H(a_1,b_1)$ und $H(a_2,b_2)$ im $\mathbb{R}^3$, mit
$$a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\ b_1=4 \text{ und } a_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix},\ b_2=-2,$$
wobei
$$H(a,b)=\left\{x\in\mathbb{R}^3\middle|a^Tx=b\right\}.$$
Bestimmen Sie die Menge $M=H(a_1,b_1)\cap H(a_2,b_2)$. Bildet M einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3 **($1+5$ Punkte)** Gegeben sei die Basis
$$B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$
des $\mathbb{R}^3$ und die Familie von Vektoren
$$B'=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right).$$

i) Zeigen Sie, dass B' ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

ii) Ein Vektor $v\in\mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Basis B die Koordinaten
$$x=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-2\end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich der Basis B'.