Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2017
7. Juni 2017

Mathematik für Informatiker II

8. Übung

Aufgabe 1 **(6 Punkte)** Gegeben seien die Matrizen

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},\ S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$.
Sind diese Matrizen über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 2 **($\mathbf{2+2+2=6}$ Punkte)** Betrachten Sie die Matrix

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad \text{mit } a_{i,j} = \begin{cases} 1 & ,\ i=j=1 \text{ oder } (i \geq 2,\ j=i+1) \\ \mu & ,\ i=j\geq 2 \\ 0 & ,\ sonst. \end{cases}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \mu < 1$.

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.
ii) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$A^k = \left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{i,j=1,\dots,n}, \quad \text{mit } a_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} 1 & ,\ i=j=1 \\ \binom{k}{j-i}\mu^{k-(j-i)}, & ,\ j \geq i \geq 2 \text{ und } k+i \geq j \\ 0 & ,\ sonst. \end{cases}$$

Hinweis: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ *und* $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k-mal}$.

iii) Betrachten Sie für einen Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ die Vektoriteration $x^{(k)} = Ax^{(k-1)},\ k \in \mathbb{N}$.
Bestimmen Sie für die Startvektoren $x^{(0)} = e_1 + e_j,\ j \in \{2,\dots,n\}$ und $k \geq n$,

$$x^{(k)} - e_1,$$

wobei $e_j,\ j \in \{1,\dots,n\}$ den j-ten Einheitsvektor der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ darstellt.

Aufgabe 3 **($\mathbf{3+2=5}$ Punkte)** Sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) |\ a_k = 0 \text{ für } k > n\}$. Betrachten Sie die beiden Abbildungen

$$D : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R}),\ f \mapsto f' \quad \text{und} \quad I : \mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}),\ f \mapsto \int_0^x f(y)\,dy.$$

i) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen der beiden Abbildungen D und I bezüglich der Basen $\{1,\dots,x^n\}$ und $\{1,\dots,x^{n-1}\}$.
ii) Bestimmen Sie $D \circ I$ und $I \circ D$ mittels Matrixmultiplikation.