Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Steffen Meyer
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
SoSe 2017

20. Juni 2017

Mathematik für Informatiker II

9. Übung

Aufgabe 1 **(4 + 3 + 1 = 8 Punkte)** Man betrachte drei Internetseiten S_1, S_2, S_3, deren Verlinkungen sich wie folgt veranschaulichen lassen:

$$S_1 \rightleftarrows S_2 \quad S_3$$

Zusätzlich definieren wir die Matrizen $L, S, G \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und Vektoren $a, e \in \mathbb{R}^3$ wie folgt

$$L = (l_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,3,\\ j=1,\dots,3}}, \quad \text{wobei } l_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{c_j} & \text{, falls } S_j \text{ auf Seite } S_i \text{ verlinkt} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

$$c_j := \text{Anzahl der Seiten, auf die Seite } S_j \text{ verlinkt}, \quad j = 1, \dots, 3$$

$$a_j := \begin{cases} 1 & \text{, falls } S_j \text{ auf keine andere Seite verlinkt} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, 3$$

$$a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \; e := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; S := L + \frac{1}{3}\left(ea^T\right), \; G := dS + (1-d)\frac{1}{3}\left(ee^T\right).$$

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix S und die zugehörigen Eigenräume (mit den bisher erlernten Verfahren aus der Vorlesung).
ii) Überprüfen Sie, welche Eigenvektoren der Matrix S auch Eigenvektoren der Matrix G (zu einem gegebenenfalls anderen Eigenwert) sind.
iii) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix G.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Abbildung det: $\mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ mit

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

eine Determinante nach Definition 9.3 darstellt.

Aufgabe 3 **(1 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte)** Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A \cdot B = B \cdot A$ und sei A zusätzlich diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und B nicht die Nullmatrix.

i) Zeigen Sie, dass Bv Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 ist, falls v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 ist.
ii) Welche Dimension haben die Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, n$?
iii) Zeigen Sie, dass v ein Eigenvektor der Matrix B (zu einem ggf. anderen Eigenwert) ist, falls v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 ist.
iv) Zeigen Sie, dass eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, so dass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ Diagonalmatrizen sind.