

## Diskrete Finanzmathematik

### 2. Übung

#### Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Es sei  $\mathcal{M}$  ein endlicher Markt mit  $T = 2$ ,  $D = 1$ ,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$ ,  $S_t^0 = 1$  für  $t = 0, 1, 2$  und

$$\begin{aligned}(S_0^1, S_1^1, S_2^1)(\omega_1) &= (1, 1, 1), & (S_0^1, S_1^1, S_2^1)(\omega_2) &= (1, 1, 2), \\(S_0^1, S_1^1, S_2^1)(\omega_3) &= (1, 2, 2), & (S_0^1, S_1^1, S_2^1)(\omega_4) &= (1, 2, 3).\end{aligned}$$

- (a) Finden Sie einen perfekten Hedge  $\varphi \in \mathcal{A}^{sf}$  für die Put-Option  $\text{Put}(44, 2, 1)$  und berechnen Sie  $V_0(\varphi)$ .
- (b) Wiederholen Sie Aufgabenteil (a) für die Put-Option  $\text{Put}(2, 2, 1)$ .

*Hinweis: In (a) entspricht die Put-Option einem einfacheren Kontrakt, dessen Hedge man direkt sehen kann. Arbeiten Sie sich in (b) vom Endzeitpunkt 2 zurück und lösen Sie dabei drei lineare  $2 \times 2$ -Gleichungssysteme.*

#### Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Sei  $\mathcal{M}$  ein endlicher Markt mit  $T = 1$ .

- (a) Betrachten Sie speziell den Markt aus Beispiel 1.2.4. Zeigen Sie, dass jeder Kontrakt mit Fälligkeit 1 mit einer selbstfinanzierenden Strategie repliziert werden kann. (Man sagt in einem solchen Fall, der Markt sei *vollständig*.)
- (b) Sei nun  $\mathcal{M}$  ein endlicher Markt mit  $N > D + 1$ . Zeigen Sie, dass nicht jeder Kontrakt replizierbar sein kann.