Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Christian Gärtner

Diskrete Finanzmathematik

6. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei Ω ein endlicher Stichprobenraum und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Zeigen Sie, dass das Atomsystem von $\mathcal{F}$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{F}, P, (S_t)_{t\in\{0,1,2\}}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,2\}}, \mathcal{A}^{sf})$ ein Markt mit zwei Anlagemöglichkeiten und 7 Zuständen, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_7\}$. Es sei $S_t^0 = 100 + 5t$ für $t = 0, 1, 2$ sowie

$$
\begin{aligned}
&S_0^1 = 100,\\
&S_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_2) = S_1^1(\omega_3) = 110,\ S_1^1(\omega_4) = S_1^1(\omega_5) = S_1^1(\omega_6) = 90, S_1^1(\omega_7) = 63;\\
&S_2^1(\omega_1) = 120,\ S_2^1(\omega_2) = 110,\\
&S_2^1(\omega_3) = S_2^1(\omega_4) = 100,\ S_2^1(\omega_5) = 90,\ S_2^1(\omega_6) = 75,\ S_2^1(\omega_7) = 66.
\end{aligned}
$$

Es gelte $P(\{\omega_n\}) > 0$ für alle $n = 1, \ldots, N$. Ferner sei

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\},\ \mathcal{F}_1 = \{(S_1^1)^{-1}(B);\ B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_2 = 2^\Omega.$$

Zerlegen Sie $\mathcal{M}$ in 1-Perioden-Untermodelle und untersuchen Sie diese auf Arbitragefreiheit.