Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Christian Gärtner

Diskrete Finanzmathematik

8. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{F}, P, (S_t)_{t\in\{0,1,2\}}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,2\}}, \mathcal{A}^{sf})$ ein Markt mit zwei Anlagemöglichkeiten und 5 Zuständen, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_5\}$. Es sei $S_t^0 = 1$ für $t = 0, 1, 2$ sowie

$$
\begin{aligned}
&S_0^1 = 10, S_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_2) = 11,\\
&S_1^1(\omega_3) = S_1^1(\omega_4) = S_1^1(\omega_5) = 9,\\
&S_2^1(\omega_1) = 12,\ S_2^1(\omega_2) = S_2^1(\omega_3) = 10,\\
&S_2^1(\omega_4) = 9,\ S_2^1(\omega_5) = 8.
\end{aligned}
$$

Ferner sei

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\},\ \mathcal{F}_1 = \{(S_1^1)^{-1}(B);\ B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_2 = 2^\Omega.$$

(a) Zeigen Sie, dass ein äquivalentes Martingalmaß für dieses Modell durch $Q : 2^\Omega \to [0,1]$ mit $Q(\{\omega_1\}) = Q(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $Q(\{\omega_3\}) = \frac{1}{12}$ und $Q(\{\omega_4\}) = \frac{1}{3}$ gegeben ist.

(b) Betrachten Sie den Kontrakt $\xi = 2Call(9,2,1) - 3Put(10,2,1)$. Bestimmen Sie den fairen Preisprozess $V_t^{\xi,Q}$ für $t = 0, 1, 2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{F}, P, (S_t)_{t\in\{0,1,2\}}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,2\}}, \mathcal{A}^{sf})$ ein Markt mit zwei Anlagemöglichkeiten und 6 Zuständen, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$. Der Wertprozess der Anlagemöglichkeiten sei gegeben durch $S_t^0 = 1$, $t = 0, 1, 2$, sowie

$$
\begin{aligned}
S_0^1 &= 100,\ S_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_2) = S_1^1(\omega_3) = 110,\ S_1^1(\omega_4) = S_1^1(\omega_5) = S_1^1(\omega_6) = 90;\\
S_2^1(\omega_1) &= 120,\ S_2^1(\omega_2) = 110,\ S_2^1(\omega_3) = 105,\ S_2^1(\omega_4) = 100,\ S_2^1(\omega_5) = 90,\ S_2^1(\omega_6) = 75.
\end{aligned}
$$

Weiterhin gelte

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\},\ \mathcal{F}_1 = \{(S_1^1)^{-1}(B);\ B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_2 = 2^\Omega.$$

Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße für dieses Modell.