Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

23. Oktober 2019

Analysis I

1. Übung

Aufgabe 1 $(4 + 2 = 6$ Punkte$)$

i) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:
   a) $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ ist teilbar durch 13 für alle $n \in \mathbb{N}$.
   b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

ii) Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Zahlen und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 $(2 + 4 = 6$ Punkte$)$ Zeigen Sie

i) In einer abelschen Gruppe $(G, *)$ sind neutrales Element und die inversen Elemente eindeutig bestimmt.

ii) In einem Körper $(K, +, \cdot)$ gelten die folgenden Eigenschaften
   a) $\forall a \in K : -a = (-1)a$
   b) $\forall a \in K : -(-a) = a$
   c) $\forall a, b \in K : (ab = 0) \Rightarrow ((a = 0) \vee (b = 0))$
   d) $\forall a, b \in K : (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

Aufgabe 3 $(4$ Punkte$)$ Betrachten Sie die folgenden Aussagen

i) Jede Entscheidung schafft unzufriedene Menschen.

ii) Wenn alle Rosen rot sind, dann ist der Himmel schwarz.

iii) $\forall q \in \mathbb{Q} : q > 0 \Rightarrow q + \frac{1}{q} \geq 2$.

iv) $\forall a, b \in \mathbb{Q} : \exists x \in \mathbb{Q} : (a \leq x) \wedge (b \geq x)$.

Negieren Sie die Aussagen und prüfen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussagen ii)-iv). Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 4 $(1 + 2 + 1 = 4$ Punkte$)$ Beweisen Sie die folgenden Aussagen

i) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $a + b + c \geq 1$ gilt, $a \geq \frac{1}{3}$ oder $b \geq \frac{1}{3}$ oder $c \geq \frac{1}{3}$.

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, $n^2 + n + 1$ ist ungerade.

iii) Für jede gerade Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, $4^n - 1$ ist nicht prim.