Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

8. Januar 2020

Analysis I

10. Übung

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** Charakterisieren Sie geometrisch (Skizze) alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

i) $0 \leq \mathrm{Re}(iz) \leq 1$

ii) $\mathrm{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0$

iii) $|z+2| + |z-2| = 5$

iv) $(1 \leq |z| \leq 2) \wedge (\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z))$

Wir bezeichnen die Punktemenge komplexer Zahlen in iv) als M. In welchen Intervallen müssen wir den Radius r und den Winkel φ wählen um alle Punkte in M mittels Polarkoordinaten darzustellen?

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

i) Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Hinweis: Nutzen Sie eines der Additionstheoreme in Satz 12.2 der Vorlesung.

ii) Zeigen Sie, dass der Cosinus auf dem Intervall $[0, 2]$ strikt monoton fallend ist und dort genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{i)} \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} \qquad \text{ii)} \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\cos(x)-1}{x} \qquad \text{ii)} \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{iv)} \lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} \tan(x)$$

Aufgabe 4 **(5 Punkte)** Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Einheitswurzeln w_k mit $k = 1, \ldots, n$ aus Satz 12.12.

i) Skizzieren Sie die Lage der Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$ in der komplexen Zahlenebene.

ii) Zeigen Sie, dass die Folge

$$x_n := \sum_{k=2}^{n} |w_k - w_{k-1}| + |w_1 - w_n|, \; n \in \mathbb{N},$$

für n gegen unendlich konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.