Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

15. Januar 2020

Analysis I

11. Übung

Aufgabe 1 **(3 Punkte)** Untersuchen Sie direkt, also mit Hilfe des Differentialquotienten für ein $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitung $f'(x_0)$ an allen Stellen $x_0 \in [0, \infty)$, an denen Differenzierbarkeit vorliegt.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)** Untersuchen Sie die folgenden Funktionen an allen Stellen ihres Definitionsbereichs auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ableitung:

i) $f_1 : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \arcsin(x)$
ii) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x|x|$
iii) $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_3(x) = x \sin(\ln(x))$
iv) $f_4 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f_4(x) = \tan(x)$
v) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_5(x) = \arctan(|x|)$
vi) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_6(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Untersuchen Sie zusätzlich die Ableitung der Funktion f_6 (dort, wo Sie definiert ist) auf Stetigkeit.

Hinweis zu v): Es gilt $\cos(x)^2 = \frac{1}{1+\tan(x)^2}$.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)** Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} f(x) = \infty$.

i) Zeigen Sie, dass mindestens ein $x_0 \in (-1, 1)$ existiert mit $f'(x_0) = 0$.
ii) Existiert zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ ein $x_0 \in (-1, 1)$ mit $f'(x_0) = a$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4 **(3 Punkte)** Beweisen sie die folgenden Aussagen:

i) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f eine konstante Funktion.
ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann existiert eine konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = ce^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Betrachten Sie für ii) die Hilfsfunktion $g(x) = f(x)e^{-x}$.