Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

22. Januar 2020

Analysis I

12. Übung

Aufgabe 1 (**4 Punkte**) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{i) } \lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{x^3-8}{x^2-4} \qquad \text{ii) } \lim_{x\nearrow 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) \qquad \text{iii) } \lim_{x\searrow 0}\frac{e^x-e^{-x^2}}{\tan(x)}$$

Aufgabe 2 (**8 Punkte**) Betrachten Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(x^2-1)e^{-x^2} & ,\ x\geq 0\\ \frac{x^3-x^2-2x-1}{(x+1)^2} & ,\ x<0\end{cases}$$

i) Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ihre Ableitung dort, wo sie definiert ist.

ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion f und geben Sie ihr Monotonieverhalten an.

iii) Überprüfen Sie die Funktion auf globale Maxima und Minima und geben Sie diese im Existenzfall an.

Aufgabe 3 (**3 Punkte**) Zeigen Sie: Jede monotone Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Aufgabe 4 (**5 Punkte**) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ auf Riemann-Integrierbarkeit und berechnen Sie im Existenzfall $\int_a^b f(x)dx$ als Grenzwert von Riemann-Summen.

i) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}1 & ,x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ -1 & ,x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

ii) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x$

iii) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\cos(x)$

Zusatzaufgabe 1 (**5 Bonuspunkte**) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Integrale mit Hilfe der partiellen Integration

$$\text{i) } \int_0^{\pi}\sin(x)^2dx \qquad \text{ii) } \int_0^1 x^2e^{2x}dx$$

Zusatzaufgabe 2 (**5 Bonuspunkte**) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Integrale mittels Substitution

$$\text{i) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin(2x)\cos(2x)\sqrt{\cos(2x)^2+1}\,dx \qquad \text{ii) } \int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Hinweis: Nutzen Sie für die Substitution in ii) die Funktion $t(x)=x^2+1$.