Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

6. November 2019

Analysis I

3. Übung

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** Seien $A, B, C \subset \mathbb{R}$ nichtleere und nach oben beschränkte Mengen. Zeigen Sie:

i) Gilt $A \subset B$, dann folgt $\sup(A) \leq \sup(B)$.
ii) Es gilt $\sup(C) = -\inf(-C)$, wobei $-C := \{x \in \mathbb{R} | -x \in C\}$.
iii) Für die Menge $A + B := \{x + y : x \in A \wedge y \in B\}$ gilt, $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)** Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

i) $A := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \wedge q^2 \leq 2\}$
ii) $B := \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
iii) $C := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x^2 \geq 7\}$
iv) $D := \{x - y : x \in (1, 3] \wedge y \in [2, 4)\}$

Überprüfen Sie diese Mengen auf die Existenz eines Supremums, Maximums, Infimums und Minimums und geben Sie diese im Existenzfall an.

Aufgabe 3 **(7 Punkte)** Wir definieren für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, alle ganzzahligen Potenzen von x durch

$$\begin{aligned} x^0 &:= 1 \\ x^n &:= x^{n-1}x \ , n \in \mathbb{N} \\ x^{-n} &:= (x^{-1})^n \ , n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(x^n)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^n$
ii) Für alle $m, p \in \mathbb{Z}$ gilt: $x^{m+p} = x^m x^p$
iii) Für alle $m, p \in \mathbb{Z}$ gilt: $(x^m)^p = x^{mp}$
iv) Für alle $m, p \in \mathbb{Z}$ und $n, q \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$

Für rationales $s = \frac{m}{n}(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ ist also

$$x^s := \sqrt[n]{x^m}$$

wohldefiniert. Zeigen Sie, dass

v) für alle $s, t \in \mathbb{Q}$ gilt: $x^{s+t} = x^s x^t$

Aufgabe 4 **(4 Punkte)** Finden Sie die Grenzwerte nachstehender Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

i) $a_n = \dfrac{(3n^2 - 2n)(5n - 2)}{(n - 1)(1 - n)(3n + 2)}$ ii) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{4k-2}{n-2} + \frac{5}{n-1}k - 3n\right)}{4\frac{n-5}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (3k - \frac{3}{2})}$