Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

13. November 2019

Analysis I

4. Übung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** Geben Sie jeweils ein Beispiel von Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ an, sodass gilt:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = c$ für eine vorgegebene reelle Zahl c.

iii) Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, konvergiert aber nicht.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)** Wir definieren die Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv mittels

$$x_n = x_{n-1}(2 - 3x_{n-1}), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten der Folge in Abhängigkeit des Startwerts x_0.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

i) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c > 0$ und $n, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+a)^n} = 0 \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \max\{a, b, c\}.$$

ii) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Aufgabe 4 **(3 Punkte)** Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{7n}{5} - \left\lfloor \frac{7n}{5} \right\rfloor,$$

wobei für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z} | \, y \le x\}$.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Mittelwerte der Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.