Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

22. November 2019

Analysis I

5. Übung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq c^2 |a_{n+1} - a_n| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

für ein $0 < c < 1$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c^n |a_2 - a_1|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 2$.

ii) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := |a_n - b_n| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{256}}{(1+\varepsilon)^n} \text{ für festes } \varepsilon > 0 \qquad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ für festes } x \in \mathbb{R} \qquad \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \qquad \text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{3^{2n+1}(n+1)}$$

Sind die Reihen absolut konvergent?

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

i) Zeigen Sie, dass für eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k \leq a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{2^n} a_k \geq \frac{a_1}{2} + \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} a_{2^k}.$$

ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge. Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ entweder beide konvergieren oder beide divergieren.

iii) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe, definiere

$$r_n := \sum_{m=n}^{\infty} a_m \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie,

i) $\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ divergiert.

iii) $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ konvergiert.