Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

27. November 2019

Analysis I

6. Übung

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergieren und dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit e.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \lim_{m\to\infty} a_m.$$

Aufgabe 2 **(5 Punkte)** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiere

$$q := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)** Seien $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i\in I}$ Familien in $\mathbb{R}$, wobei $(b_i)_{i\in I}$ summierbar ist, und für alle $i \in I$ gelte $|a_i| \leq |b_i|$. Zeigen Sie:

$$(a_i)_{i\in I} \text{ ist summierbar und } \Big|\sum_{i\in I} a_i\Big| \leq \sum_{i\in I} |b_i| = \sup\{|b|_K | K \in \mathcal{E}(I)\}.$$

Aufgabe 4 **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass die folgenden Familien $(a_{n,m})$ summierbar sind und bestimmen Sie ihre Summe.

i) $a_{n,m} = \dfrac{1}{n!2^m}$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$

ii) $a_{n,m} = \dbinom{n}{m} x^m y^{n-m}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq m \leq n$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$, $|x|, |y| < \frac{1}{2}$ fest)