

Analysis I

9. Übung

Aufgabe 1 (10 Punkte) Überprüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese im Existenzfall:

$$\text{i) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \text{ii) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \quad \text{iv) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 2} \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - 4x} & , \text{ für } x \neq 2 \\ 4 & , \text{ für } x = 2 \end{cases} \quad \text{vi) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x \quad \text{vii) } \lim_{x \searrow 0} x^k \ln(x) \quad \text{viii) } \lim_{x \searrow 0} x^x$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Zeigen Sie: Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und existieren die Grenzwerte $\lim_{x \searrow a} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow b} f(x)$, dann ist f gleichmäßig stetig auf (a, b) .

Aufgabe 3 (5 Punkte)

- i) Bestimmen Sie in \mathbb{C} die neutralen und die inversen Elemente bzgl. Addition und Multiplikation.
- ii) Zeigen Sie, dass $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Zusatzaufgabe (10 Bonuspunkte) Sei $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} , definiert durch:

$$w_1 = -6, \quad w_{n+1} = \begin{cases} w_n + 2 + 2b_n & , n \text{ ungerade} \\ w_n + (b_n)^2 & , n \text{ gerade} \end{cases}$$

wobei die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert ist durch:

$$b_n = \begin{cases} i & , \text{ falls } n < 10 \\ 0 & , \text{ falls } n = 10 \\ i^3 & , \text{ falls } n > 10. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die ersten 20 Werte der Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und veranschaulichen Sie diese in der komplexen Zahlenebene (siehe Bemerkung 11.4). Verbinden Sie für alle $n = 1, \dots, 19$ die Zahlen w_n und w_{n+1} durch Geraden.

Frohe Weihnachten!