Prof. Dr. Christian Bender
M.Sc. Matthias Thiel

Universität des Saarlandes
WiSe 2019/20

18. Dezember 2019

Analysis I

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 1 Überprüfen Sie, ob

$$((\neg A \vee \neg B) \Rightarrow (\neg B \wedge B)) \Leftrightarrow (A \wedge B)$$

eine Tautologie ist.

Aufgabe 2 Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$$

Aufgabe 3 Überprüfen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie im Existenzfall ihren Grenzwert an.

i) $a_n = \sqrt{n^2 - 2n + 1} - n$

ii) $a_n = (-1)^n \frac{n^4+3n^2}{7n^4+8}$

Aufgabe 4 i) Überprüfen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und geben Sie im Existenzfall ihren Wert an.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \text{ wobei } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

ii) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n$ für $|x| < 1$ absolut konvergiert und für $|x| \geq 1$ divergiert.

Aufgabe 5 i) Definieren Sie die Begriffe „konvergente Folge“ und „Cauchy Folge“ in $\mathbb{R}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Arten von Folgen?

ii) Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 6 Beweisen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie anhand eines Gegenbeispiels:

i) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und für alle $a \in A$ gelte $a < 0$, dann folgt $\sup(A) < 0$.

ii) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^3-7x^2+5}{x^2+1}$ besitzt ein Maximum.

iii) Erfüllt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft

$$\lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

dann ist f stetig.

iv) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind genau dann konvergent, wenn die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind.