Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20

18. Oktober 2019

Mathematik für Informatiker III

1. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$. Verknüpfen bzw. verketten Sie die Ereignisse A_1, A_2, A_3 derart, dass das resultierende Ereignis genau dann eintritt, wenn

(i) nur die Ereignisse A_2 und A_3 eintreten.

(ii) genau eins der Ereignisse A_1, A_2, A_3 eintritt.

(iii) mindestens zwei der Ereignisse A_1, A_2, A_3 eintreten.

(iv) höchstens zwei der Ereignisse A_1, A_2, A_3 eintreten.

Finden Sie die mengentheoretischen Relationen für die folgenden Aussagen:

(v) Wenn das Ereignis A_1 eintritt, tritt das Ereignis A_2 oder das Ereignis A_3 ein.

(vi) Wenn das Ereignis A_3 nicht eintritt, treten die Ereignisse A_1 und A_2 nicht gleichzeitig ein.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ Ereignisse. Wir definieren die *symmetrische Differenz von A_1 und A_2* als

$$A_1 \,\Delta\, A_2 := (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathbb{P}[A_1 \Delta A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - 2\,\mathbb{P}[A_1 \cap A_2]$.

(ii) Für $\mathbb{P}[A_1] = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}[A_2] = \frac{3}{4}$ folgt

$$\frac{1}{8} \le \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \le \frac{1}{2}.$$

(iii) $\mathbb{P}[A_1 \Delta A_3] \le \mathbb{P}[A_1 \Delta A_2] + \mathbb{P}[A_2 \Delta A_3]$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Für eine nichtleere, abzählbare Menge Ω nennt man eine Abbildung $\mathfrak{p} : \Omega \to [0,1]$ eine *Zähldichte*, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\mathfrak{p}(\omega) \ge 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega, \qquad \text{und} \qquad \sum_{\omega \in \Omega} \mathfrak{p}(\omega) = 1.$$

Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen jeweils um eine Zähldichte handelt.

(i) $\mathfrak{p} : \mathbb{N} \to [0,1]$, $k \mapsto \mathfrak{p}(k) := \frac{1}{2^k}$.

(ii) $\mathfrak{p} : \mathbb{N} \to [0,1]$, $k \mapsto \mathfrak{p}(k) := \frac{2}{4^{k-1}} \frac{3}{4} - \frac{1}{2^k}$.