Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20
13. November 2019

Mathematik für Informatiker III

5. Übung

Aufgabe 17 (5 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{P}$-integrierbare Zufallsvariable. Für jedes Ereignis $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$ nennt man

$$\mathbb{E}[X|A] := \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot \mathbb{P}[\{\omega\}]$$

den *bedingten Erwartungswert von X gegeben A.*

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X|A] = \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \cdot \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]$ für jedes $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$, wobei $\mathbb{1}_A$ die mit der Menge A assoziierte Indikatorfunktion bezeichnet (vgl. Aufgabe 15).

(ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X|\{X > 1\}]$, falls $\mathbb{P}_X = \Pi_\lambda$ (Poisson-Verteilung) für festes $\lambda \in (0, \infty)$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X|A_n] \cdot \mathbb{P}[A_n]$ für jede Familie $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Ereignisse aus $\mathcal{F}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ sowie $\mathbb{P}[A_n] > 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18 (2 Punkte)

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1, \dots, X_n$ reellwertige Zufallsvariablen auf einem diskreten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ derart, dass $X_1^2, \dots, X_n^2$ $\mathbb{P}$-integrierbar sind, und dass $\mathbb{E}[X_1] = \cdots = \mathbb{E}[X_n] = 0$ sowie $\mathbb{Cov}(X_i, X_j) = i^2+j^2-(i-j)^2$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Berechnen Sie die Varianz von $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

Aufgabe 19 (3 Punkte)

Es seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen auf einem diskreten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2} = \mathrm{B}_{1,1/2}$ (Bernoulli-Verteilung). Untersuchen Sie die Zufallsvariablen $X_1 + X_2$ und $|X_1 - X_2|$ auf Unabhängigkeit und Unkorreliertheit.

Aufgabe 20 (3 Punkte)

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass bei jedem Flug mit 150 Sitzplätzen im Durchschnitt nur ca. 95% der Personen mit gebuchten Tickets erscheinen. Aus diesem Grund will die Fluggesellschaft in Zukunft pro Flug mehr Ticketbuchungen akzeptieren als Sitzplätze vorhanden sind. Schätzen Sie mithilfe der Tchebyschev-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit ab, dass bei 155 Ticketbuchungen mehr als 150 Personen mit gebuchten Tickets zum Flug erscheinen. Hierbei kann angenommen werden, dass die Personen mit gebuchten Tickets unabhängig voneinander zum Flug erscheinen.

Aufgabe 21 (3 Punkte)

Es seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen auf einem diskreten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zähldichten $\mathfrak{p}_{X_1}$ und $\mathfrak{p}_{X_2}$. Dann ist die Zähldichte $\mathfrak{p}_{X_1+X_2}$ von $\mathbb{P}_{X_1+X_2}$ gegeben durch

$$\mathfrak{p}_{X_1+X_2}(k) = \sum\nolimits_{\ell\in X_2(\Omega)} \mathfrak{p}_{X_1}(k-\ell) \cdot \mathfrak{p}_{X_2}(\ell), \qquad k \in (X_1+X_2)(\Omega),$$

wobei $\mathfrak{p}_{X_1}(k-\ell) := 0$ für $k - \ell \notin X_1(\Omega)$. Bestimmen Sie $\mathbb{P}_{X_1+X_2}$ mithilfe obiger Formel, falls

(i) $\mathbb{P}_{X_i} = \mathrm{B}_{n_i,p}$ (Binomial-Verteilung), $i = 1, 2$, für feste $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.

(ii) $\mathbb{P}_{X_i} = \Pi_{\lambda_i}$ (Poisson-Verteilung), $i = 1, 2$, für feste $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$.