Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20

20. November 2019

Mathematik für Informatiker III

6. Übung

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Für feste $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0, \infty)$ seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem diskreten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}_{X_i} = \Pi_{\lambda_i}$ für jedes $i = 1, \ldots, n$. Weiter sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

(i) Bestimmen Sie für jedes $i = 1, \ldots, n$ die W-erzeugende Funktion $g_{X_i} : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$.

(ii) Bestimmen Sie mithilfe der W-erzeugenden Funktion aus (i) die Verteilung von S_n.

(iii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von S_n.

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{\log(1+x_1^2 x_2^2)\, x_2^2}{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{2(x_1^2 x_2 + \sqrt{x_1^2\, |x_2|})}{x_1^2 + |x_2|} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) Sei $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ beliebig, aber fest. Weiter seien die Funktionen $f_{x_1^0}, f_{x_2^0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{x_2^0}(x_1) := f(x_1, x_2^0)$ bzw. $f_{x_1^0}(x_2) := f(x_1^0, x_2)$. Zeigen Sie, dass $f_{x_1^0}$ und $f_{x_2^0}$ stetig sind.

(ii) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0,0)$ *nicht* stetig ist.

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1\, x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} .$$

(i) Überprüfen Sie, in welchen Punkten f partiell differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0,0)$ *nicht* stetig ist.