Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20
27. November 2019

Mathematik für Informatiker III

7. Übung

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden drei Funktionen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, jeweils den Gradienten an beliebiger Stelle $x = (x_1, x_2) \in D_i$.

(i) $f_1(x_1, x_2) := \cos(x_1 x_2) + \frac{1}{3} x_1 x_2^3$ für $(x_1, x_2) \in D_1$, wobei $D_1 := \mathbb{R}^2$.

(ii) $f_2(x_1, x_2) := \frac{x_1 \log(x_2)}{x_2(x_1 - x_2^2)}$ für $(x_1, x_2) \in D_2$, wobei $D_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq x_2^2,\ x_2 > 0\}$.

(iii) $f_3(x_1, x_2) := \tan(x_1 x_2) - \frac{2x_1}{\sqrt{x_2}}$ für $(x_1, x_2) \in D_3$, wobei $D_3 := \{(x_1, x_2) \in (0, \pi)^2 : x_1 x_2 \neq \frac{\pi}{2}\}$.

Aufgabe 28 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases} .$$

(i) Zeigen Sie, dass f eine C^2-Funktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist und geben Sie die Hesse-Matrix von f an beliebiger Stelle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ an.

(ii) Geben Sie die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(0, 0)$ an. Warum stellt diese Gestalt der Hesse-Matrix keinen Widerspruch zum Satz von Schwarz (Satz 1.4.15) dar?

Aufgabe 29 (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := \sin(x_1 + x_2) \log(1 + x_3^2).$$

Zudem seien für ein festes $\alpha \in (0, 2\pi)$ die folgenden drei Vektoren gegeben:

$$v_1 := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 := \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass f eine C^1-Funktion ist.

(ii) Bestimmen Sie für $i = 1, 2, 3$ die Richtungsableitungen von f in Richtung v_i an beliebiger Stelle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} \cos(x_2)(x_1 - 2x_2) \\ x_1 \log(1 + x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass f eine C^1-Funktion ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f total differenzierbar ist und geben Sie die totale Ableitung von f an beliebiger Stelle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ an.