Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20
11. Dezember 2019

Mathematik für Informatiker III

9. Übung

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in \mathbb{R}$.

(i) Sei f eine C^3-Funktion. Leiten Sie im Rahmen von Bemerkung 1.8.5 eine Darstellung für den Operator $D^2_{h,1} f$ zur numerischen Approximation der zweiten Ableitung von f derart her, dass
$$D^2_{h,1} f(x) \,=\, f''(x) + \mathcal{O}(h).$$

(ii) Sei f eine C^5-Funktion. Leiten Sie im Rahmen von Bemerkung 1.8.5 eine Darstellung für den Operator $D^2_{h,2} f$ zur numerischen Approximation der zweiten Ableitung von f derart her, dass
$$D^2_{h,2} f(x) \,=\, f''(x) + \mathcal{O}(h^3).$$

Hinweis: Die in den Rechnungen auftretenden Matrizengleichungen dürfen mithilfe eines Computers gelöst werden.

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^3-Funktion und $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ fest. Für $i = 1, 2$, den i-ten Einheitsvektor e_i im $\mathbb{R}^2$ sowie jedes $h \in (0, \infty)$ setze
$$D^1_{i;h} f(x) \,:=\, \frac{f(x + he_i) - f(x - he_i)}{2h} \quad \text{und} \quad D^2_{i;h} f(x) \,:=\, \frac{f(x + 2he_i) - 2f(x) + f(x - 2he_i)}{4h^2}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $D^1_{i;h} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \mathcal{O}(h^2)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $D^2_{i;h} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x) + \mathcal{O}(h^2)$.

Hinweis: Wenden Sie die eindimensionale Taylor-Formel (vgl. `MfI 1`) auf geeignete Funktionen an.

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch
$$f(x_1, x_2) \,:=\, \frac{x_1^2 + 4x_2^2}{e^{4x_1^2 + x_2^2}}.$$

Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte von f und entscheiden Sie, ob es sich bei den gefundenen Extremstellen um lokale bzw. globale (isolierte) Extremstellen handelt.

Aufgabe 38 (4+2* Punkte)

Seien $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, Funktionen, die definiert sind durch
$$f_1(x_1, x_2) \,:=\, x_1^4 - x_2^2, \quad f_2(x_1, x_2) \,:=\, -x_2^2 - 2x_1^4 \quad \text{und} \quad f_3(x_1, x_2) \,:=\, 2 - x_2^2.$$

(i) Überprüfen Sie, ob f_1 im Punkt $(0, 0)$ eine Extremstelle besitzt und begründen Sie Ihre Aussage.

(ii) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0, 0)$ für f_2 und f_3 jeweils eine lokale Maximalstelle ist, und überprüfen Sie diese auf Isoliertheit.

(iii) Überprüfen Sie, ob f_2 und f_3 im Punkt $(0, 0)$ eine globale (isolierte) Maximalstelle besitzen.