Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20
18. Dezember 2019

Mathematik für Informatiker III

10. Übung

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ x_1 + x_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichung $f(x_1, x_2) = (0,0)^\top$ approximativ mittels zweier Iterationsschritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_{(0)} = (0,1)$.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := -x_1 + x_2 + 2x_3.$$

Bestimmen Sie mithilfe des Lagrange-Ansatzes die Extremstellen von f auf der Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 = 1\}$.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass M als abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt ist und f als stetige Funktion somit Minimum und Maximum auf M annimmt.

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Funktionen, die definiert sind durch

$$f(x_1, x_2) := x_1 + x_2, \qquad g_1(x_1, x_2) := (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \quad \text{und} \quad g_2(x_1, x_2) := (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 4.$$

Gesucht ist im Folgenden die Minimalstelle von f auf der Menge $M := M_1 \cap M_2$, wobei

$$M_i = M_{g_i} := \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : g_i(x_1, x_2) = 0\big\}, \qquad i = 1, 2.$$

(i) Fertigen Sie eine Schaubild an, in dem Sie die Mengen M_1 und M_2 skizzieren. In welchem Punkt $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in M$ nimmt die Funktion $f|_M : M \to \mathbb{R}$ ihr Minimum an? Skizzieren Sie in das obige Schaubild zudem die Gradienten $\nabla g_1(x^*)$ und $\nabla g_2(x^*)$ im Punkt x^*.

Sei nun $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in M$ die Minimalstelle der Funktion $f|_M : M \to \mathbb{R}$ aus (i).

(ii) Bestimmen Sie den Rang der Jacobi-Matrix der Funktion $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Stelle x^*.

(iii) Begründen Sie, weshalb *keine* Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}$ derart existieren, dass

$$\nabla f(x^*) = \lambda_1^* \nabla g_1(x^*) + \lambda_2^* \nabla g_2(x^*).$$

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} \log(1 + x_1^2 + x_2^2) \\ x_1\, e^{x_2} \end{bmatrix}.$$

(i) Geben Sie die Menge A aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$ an, in welchen die Jacobi-Matrix $Jf(x)$ invertierbar ist und zeigen Sie, dass f eine C^1-Funktion auf A ist. Ist die Menge A offen?

(ii) Bestimmen Sie für alle $x \in A$ die Jacobi-Matrix der lokalen Inversen von f im Punkt $f(x)$.