

## Mathematik für Informatiker III

### 11. Übung

#### Aufgabe 43 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden R-Integrale und begründen Sie jeweils, warum diese existieren.

(i)  $\int_D \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) d(x_1, x_2)$  für  $D := [1, 2]^2$ .

(ii)  $\int_D x_1 \cos(x_1^2 + x_2) d(x_1, x_2)$  für  $D := [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ .

(iii)  $\int_D \cos(x_1 + x_2) d(x_1, x_2)$  für  $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \pi/2\}$ .

(iv)  $\int_D \left(\frac{3}{2}x_1^2 + 3x_2^2\right) d(x_1, x_2)$  für  $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2\}$ .

*Hinweis:* Sie können ohne Beweis annehmen, dass die Mengen  $D$  in (iii) und (iv) jeweils Jordan-messbar sind.

#### Aufgabe 44 (3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden R-Integrale und begründen Sie jeweils, warum diese existieren.

(i)  $\int_D \frac{2x_3}{(x_1+x_2)^2} d(x_1, x_2, x_3)$  für  $D := [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 1]$ .

(ii)  $\int_D \frac{4x_1x_2x_3}{x_1^2} d(x_1, x_2, x_3)$  für  $D := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_3 \in [1, e], 0 \leq x_2 \leq \sqrt{\log(x_3)}\}$

*Hinweis:* Sie können ohne Beweis annehmen, dass die Menge  $D$  in (ii) Jordan-messbar ist.

#### Aufgabe 45 (4 Punkte)

Berechnen Sie für festes  $n \in \mathbb{N}$  das uneigentliche R-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2)} d(x_1, \dots, x_n).$$

#### Aufgabe 46 (4 Punkte)

Für feste  $a, b > 0$  mit  $a < b$  sei  $D_{a,b} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, a^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq b^2\}$ . Weiter sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Berechnen Sie mithilfe des Transformationssatzes (vgl. Satz 1.14.1) das folgende R-Integral und begründen Sie, warum dieses existiert:

$$\int_{D_{a,b}} f(x_1, x_2) d(x_1, x_2).$$