Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20
15. Januar 2020

# Mathematik für Informatiker III

## 12. Übung

### Aufgabe 47 (4 Punkte)

Seien $b, m \in \mathbb{R}$ und $a, \sigma > 0$ beliebig, aber fest. Weiter sei $X$ eine reelle Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(i) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Y := aX + b$, falls $\mathbb{P}_X = \mathrm{N}_{m,\sigma^2}$ (Normalverteilung zu den Parametern $m$ und $\sigma$).

(ii) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Y := \log(X)$, falls $\mathbb{P}_X$ die R-Dichte

$$f_X(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x}}\, e^{-\frac{(\log(x)-m)^2}{2\sigma^2}}\, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

besitzt. Hierbei bezeichnet $\mathbb{1}_{(0,\infty)}$ die mit der Menge $(0,\infty)$ assoziierte Indikatorfunktion (vgl. Aufgabe 15).

*Hinweis:* Beachten Sie Bemerkung 2.10.19 und 2.10.20.

### Aufgabe 48 (5 Punkte)

Sei $X = (X_1, X_2)$ eine Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, deren Verteilung $\mathbb{P}_X$ die R-Dichte

$$f_X(x_1, x_2) := c\,(x_1^2 + x_2^2)\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$ besitzt. Hierbei bezeichnet $\mathbb{1}_{[-1,1]^2}$ die mit der Menge $[-1,1]^2$ assoziierte Indikatorfunktion (vgl. Aufgabe 15).

(i) Bestimmen Sie die Konstante $c$.

Sei nun die in (i) bestimmte Konstante $c$ fest.

(ii) Bestimmen Sie jeweils eine R-Dichte von $X_1$ und von $X_2$.

(iii) Berechnen Sie $\mathbb{C}\mathrm{orr}(X_1, X_2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

*Hinweis für (iii): Verwenden Sie das Analogon von Proposition 2.7.12(i)+(iii) für allgemeine W-Räume.*

### Aufgabe 49 (4 Punkte)

Sei $X$ eine reelle Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$, falls

(i) $\mathbb{P}_X = \mathrm{Exp}_\lambda$ für ein festes $\lambda \in (0,\infty)$.

(ii) $\mathbb{P}_X = \mathrm{N}_{m,\sigma^2}$ für feste $m \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

*Hinweis für (ii)*: Beachten Sie, dass gemäß Definition 2.10.14 die Funktion $f_{0,1}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, die R-Dichte der Normalverteilung $\mathrm{N}_{0,1}$ ist, d. h. es gilt insbesondere $\int_{-\infty}^{\infty} f_{0,1}(x)\,dx = 1$.

### Aufgabe 50 (3 Punkte)

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,\infty)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ beliebig, aber fest. Weiter seien $X_1$ und $X_2$ zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ derart, dass $\mathbb{P}_{X_i} = \mathrm{Exp}_{\lambda_i}$ für jedes $i = 1, 2$. Zeigen oder widerlegen Sie mithilfe der Faltungsformel (vgl. Satz 2.10.25), dass die Verteilung der Zufallsvariable $X_1 + X_2$ gegeben ist durch $\mathrm{Exp}_{\lambda_1+\lambda_2}$.