Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20
22. Januar 2020

Mathematik für Informatiker III

13. Übung

Aufgabe 51 (4 Punkte)

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass bei jedem Flug mit 250 Sitzplätzen im Durchschnitt nur ca. 90% der Personen mit gebuchten Tickets erscheinen. Hierbei kann angenommen werden, dass die Personen mit gebuchten Tickets unabhängig voneinander zum Flug erscheinen. Aus diesem Grund will die Fluggesellschaft in Zukunft pro Flug mehr Buchungen akzeptieren als Sitzplätze vorhanden sind. Berechnen Sie mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes, wie viele Buchungen die Fluggesellschaft aktzeptieren kann, damit die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung approximativ höchstens 0.02 ist.

Hinweis: Für die Umkehrfunktion $\Phi_{0,1}^{-1}$ der Verteilungsfunktion $\Phi_{0,1}$ einer $\mathrm{N}_{0,1}$-verteilten Zufallsvariable gilt: $\Phi_{0,1}^{-1}(0.75) \approx 0.6749$, $\Phi_{0,1}^{-1}(0.9) \approx 1.2816$, $\Phi_{0,1}^{-1}(0.98) \approx 2.0537$.

Aufgabe 52 (4 Punkte)

Seien $a, b, c \geq 0$ mit $a + b + c = 1$ beliebig, aber fest. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markov-Kette auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

(i) Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

(ii) Untersuchen Sie, ob die Zustände 1 und 2 jeweils rekurrent, transient bzw. absorbierend sind.

(iii) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a, b und c, ob der Zustand 3 rekurrent, transient oder absorbierend ist.

Aufgabe 53 (3 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein homogene Markov-Kette auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2\}$, Anfangsverteilung $\mathbb{P}_{X_0} = \mathrm{Gl}_{\{1,2\}}$ (Gleichverteilung auf $\{1, 2\}$) und Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}[\{X_2 = 1\}|\{X_0 = 2\}]$ und $\mathbb{P}_{X_2}$.

Aufgabe 54 (5 Punkte)

Seien $p, q \in (0, 1)$ beliebig, aber fest. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markov-Kette auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $E = \{0, 1\}$ und Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}.$$

Zudem gelte $\mathbb{P}[\{X_0 = i\}] > 0$ für jedes $i \in E$.

(i) Bestimmen Sie die mittleren Rückkehrzeiten m_0 und m_1.

(ii) Bestimmen Sie die (eindeutige) stationäre Verteilung der Markov-Kette und begründen Sie kurz, warum die Verteilung $\mathbb{P}_{X_n}$ für $n \to \infty$ (im Sinne der punktweisen Konvergenz der Zähldichte) gegen die stationäre Verteilung konvergiert.