Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Universität des Saarlandes, WiSe 2019/20
29. Januar 2020

Mathematik für Informatiker III

14. Übung

Aufgabe 55 (+4 Punkte)

Betrachten Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ das Gauß-Modell aus Beispiel 3.1.4 mit unbekanntem Erwartungswert m und unbekannter Varianz σ^2, d. h. das statistische Modell

$$\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{\mathbb{P}^{(m,\sigma^2)} := \mathrm{N}_{m,\sigma^2}^{\otimes n} : (m,\sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\}\big).$$

Für jedes $(m,\sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ sind somit die Komponenten des Stichprobenvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)$ unabhängig (bzgl. $\mathbb{P}^{(m,\sigma^2)}$) und die Verteilung jeder Komponente X_i von X ist unter dem W-Maß $\mathbb{P}^{(m,\sigma^2)}$ gegeben durch N_{m,σ^2} (Normalverteilung). Zeigen Sie, dass der durch

$$\widehat{T}_n(x_1,\ldots,x_n) \,:=\, \tfrac{1}{n-1} \textstyle\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_n)^2$$

gegebene Punktschätzer $\widehat{T}_n : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ erwartungstreu ist für den durch $T(m,\sigma^2) := \sigma^2$ definierten Aspekt $T : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to [0,\infty)$.

Aufgabe 56 (+3 Punkte)

Beweis von Lemma 3.2.7. Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien $(\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n, \{\mathbb{P}^\theta : \theta \in \Theta\})$ ein statistisches Modell, $T : \Theta \to \mathbb{R}$ eine Aspektfunktion und $\widehat{T}_n : \mathcal{X}_n \to \mathbb{R}$ ein Punktschätzer für $T(\theta)$ mit $\mathbb{E}^\theta[\widehat{T}_n(X)^2] < \infty$ für jedes $\theta \in \Theta$. Hierbei bezeichnet $X = (X_1, \ldots, X_n)$ den Stichprobenvektor. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{MSE}(\widehat{T}_n, \theta) \,=\, \mathbb{V}\mathrm{ar}^\theta[\widehat{T}_n(X)] + \mathrm{Bias}(\widehat{T}_n, \theta)^2 \qquad \text{für alle } \theta \in \Theta.$$

Aufgabe 57 (+5 Punkte)

Betrachten Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ das Bernoulli-Modell aus Beispiel 3.1.3, d. h. das statistische Modell

$$\big(\{0,1\}^n, \mathfrak{P}(\{0,1\}^n), \{\mathbb{P}^p := \mathrm{B}_{1,p}^{\otimes n} : p \in [0,1]\}\big).$$

Für jedes $p \in [0,1]$ sind somit die Komponenten des Stichprobenvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)$ unabhängig (bzgl. $\mathbb{P}^p$) und die Verteilung jeder Komponente X_i von X ist unter dem W-Maß $\mathbb{P}^p$ gegeben durch $\mathrm{B}_{1,p}$ (Bernoulli-Verteilung). Weiter seien durch

$$\widehat{T}_n(x_1,\ldots,x_n) := \overline{x}_n \qquad \text{und} \qquad \widehat{S}_n(x_1,\ldots,x_n) := \tfrac{1}{n+2}\big(1 + n\overline{x}_n\big)$$

zwei Punktschätzer $\widehat{T}_n : \{0,1\}^n \to [0,1]$ und $\widehat{S}_n : \{0,1\}^n \to [0,1]$ für $T(p) = p$ gegeben.

(i) Bestimmen Sie $\mathrm{Bias}(\widehat{T}_n, p)$, $\mathrm{Bias}(\widehat{S}_n, p)$, $\mathrm{MSE}(\widehat{T}_n, p)$ und $\mathrm{MSE}(\widehat{S}_n, p)$ für jedes $p \in [0,1]$.

(ii) Bestimmen Sie diejenigen $p \in [0,1]$, für die $\mathrm{MSE}(\widehat{T}_n, p) > \mathrm{MSE}(\widehat{S}_n, p)$ gilt.

Aufgabe 58 (+4 Punkte)

Betrachten Sie für festes $n \in \mathbb{N}$ das statistische Modell

$$\big(\mathbb{N}^n, \mathfrak{P}(\mathbb{N}^n), \{\mathbb{P}^p := \mathrm{G}_p^{\otimes n} : p \in (0,1]\}\big).$$

Für jedes $p \in (0,1]$ ist somit die Zähldichte des W-Maßes $\mathbb{P}^p$ gegeben durch

$$\pi_p(x_1,\ldots,x_n) \,:=\, \textstyle\prod_{i=1}^n \mathrm{g}_p(x_i), \qquad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{N}^n,$$

wobei g_p die Zähldichte von G_p (geometrische Verteilung) ist. Konstruieren Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{T}_n : \mathbb{N}^n \to (0,1]$ für den durch $T(p) := p$ definierten Aspekt $T : (0,1] \to (0,1]$.