20.10.15

LINEARE ALGEBRA

Ein lineares Gleichungssystem

Bsp.

$$\begin{aligned} I \quad & x_2 - 2x_3 = 6 \\ II \quad & 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 8 \\ III \quad & x_1 + 4x_2 = 10 \end{aligned}$$

A. Effiziente Schreibweise

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$ Koeffizientenmatrix $\quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right)$$ erweiterte Koeffizientenmatrix

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot x = \begin{pmatrix} 1x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A \cdot x \overset{!}{=} b}$$

$$\text{Lös}(A \mid b) = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = b \}$$

B. Erlaubte Operationen

$\text{Lös}(A \mid b)$ bleibt unverändert, wenn wir

1. Zeilen vertauschen
2. Zeilen mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, multiplizieren
3. (Vielfache einer) Zeile zu einer anderen Zeile dazuaddieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 0 & 10 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \quad II - 2I$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 10 \\ & 1 & -2 & 6 \\ & -2 & 4 & -12 \end{array}\right) \quad III + 2II$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei!}$$

↳ Zeilenstufenform

den Rest rekursiv

2. Zeile $\quad x_2 = 6 + 2x_3$

1. Zeile $\quad x_1 = 10 - 4x_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. Zeile}}}{=} -14 - 8x_3$

~~[illegible]~~

$$\text{Lös}(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} -14 - 8x_3 \\ 10 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

C. Gauß-Algorithmus

Wir fangen in der 1. Spalte an

(*) FALLS Spalte = Nullspalte

DANN gehe zur nächsten Spalte und zu (*)

FALLS NICHT:

A. evtl. Vertauschen von Zeilen, damit oben links Eintrag ~~[illegible]~~ $a_{ij} \neq 0$

B. multipliziere mit Kehrwert $\frac{1}{a_{ij}}$

C. Addiere Vielfache der „oberen" Zeile zu der unteren, so dass alle Einträge unter der 1 danach $= 0$ sind.
„Streiche" obere Zeile

GEHE zu nächster Spalte und (*)

Fragen:

1. Wann gibt es Lösungen?
2. Wieviele?
3. alternative Sichtweisen
   z. B. geometrisch

$\Rightarrow$ lineare Algebra

0. Kleinigkeiten

„Definition, Satz, Beweis"

↳ Axiome ≙ Spielregeln

0.1. Beispiel

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$

Def.: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler besitzt.

Test: $\cancel{1}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$ $\cancel{4}$

Satz v. Euklid: Satz: es gibt unendlich viele Primzahlen (Elemente / Euklid 300 v. Chr.)

Beweis durch Widerspruch: Beweis:

Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$

Für jedes $a \in \mathbb{N}$ gibt es ein i mit $p_i \mid a$ („p_i teilt a")

(können rekursiv zerlegen $a = b \cdot c = b \cdot d \cdot e = \ldots$)

Jetzt betrachten wir $a = 1 + \underbrace{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}_{b}$

Sei i, so dass $p_i \mid a$. Aber $p_i \mid p_1 \cdots p_n$, also $p_i \mid 1$ ↯ Widerspruch

$\square$

$p_i \mid a \Rightarrow$ es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $p_i \cdot k = a$

$p_i \mid b \Rightarrow$ " $l \in \mathbb{N}$ mit $p_i \cdot l = b$

Produkt aller Primzahlen außer p_i $(p_1 \cdots \hat{p_i} \cdots p_n)$

$a - b = p_i \cdot k - p_i \cdot l = p_i (k - l)$

$\Rightarrow p_i \mid a - b = 1$

0.2. Aussagenlogik

Aussage A: ist wahr oder falsch, aber nicht beides.

$\neg A$ nicht A

$A \Rightarrow B$ B folgt aus A

$A \Leftrightarrow B$ A ist äquivalent zu B (aus A folgt B und B folgt aus A)

$A \wedge B$ A und B

$A \vee B$ A oder B (inklusives oder, kein entweder oder)

$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ entweder oder

Quantoren

$\forall$ für alle $\quad\quad$ $\nexists$ existiert kein

$\exists$ existiert $\quad\quad$ $\exists!$ existiert genau ein

Bsp.:

$\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + n$ gerade $\quad$ A

$\exists n \in \mathbb{N}: n^2 + n$ ungerade $\quad$ $\neg A$

($\forall n \in \mathbb{N}$ $n^2 + n$ ungerade) weder A noch $\neg A$

Zahlen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \{$natürliche Zahlen$\}$

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} = \{$ganze Zahlen$\}$

$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} = \{$rationale Zahlen$\}$

$\mathbb{R} := \{$reelle Zahlen$\}$

0.3. Vollständige Induktion

Beispiel

Satz: $\underbrace{n^3 - n \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$A(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: Induktionsanfang (IA): $n = 1$

$1^3 - 1 = 0$, 0 ist durch 6 teilbar $\Rightarrow A(1)$ gilt

Induktionsschritt (IS): $n \to n+1$

Annahme: $A(n)$ gilt $\Rightarrow n^3 - n = 6 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$
$$= (n^3 - n) + 3n\underbrace{(n^2 + n)}_{2\ell} + (1 - 1)$$

$\hookrightarrow$ immer gerade

$$= 6 \cdot k + 6 \cdot \ell$$
$$= 6 \cdot (k + \ell)$$

$\Rightarrow 6 \mid (n+1)^3 - (n+1) \Rightarrow A(n+1)$ gilt $\blacksquare$

Prinzip der vollständigen Induktion

$$\left.\begin{array}{l} A(1) \text{ gilt} \\ A(n) \Rightarrow A(n+1) \text{ gilt} \end{array}\right\} A(n) \text{ gilt } \forall n \in \mathbb{N}$$

Im Induktionsbeweis beweisen wir die linke Seite.

Varianten

- $A(n_0)$ gilt $\quad A(n)$ gilt $\forall n \geq n_0$
- $\left.\begin{array}{l} A(1) \text{ gilt} \\ A(k)\ \forall \text{ [redacted] } \Rightarrow A(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow A(n) \text{ gilt } \forall n \in \mathbb{N}$
  $\forall k \leq n$

0.4. Mengen

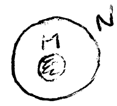
$M = \{1, 3, 7, 8\}$

$N = \{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{n \text{ Primzahl}}_{\text{Bedingung}}\}$

$1 \in M,\ 2 \notin M$

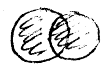
$\{1, 2, 2\} = \{1, 2\} \qquad \{1, 2\} = \{2, 1\}$

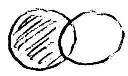
→ keine Vielfachheiten oder Reihenfolge



Teilmenge $\quad M \subset N \ :\Leftrightarrow\ x \in M \Rightarrow x \in N$

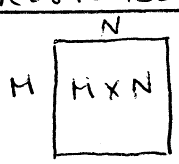
Schnittmenge $\quad M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ 

Vereinigung $\quad M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ 

Komplement $\quad M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$ 

kartesisches Produkt $\quad M \times N = \{\underbrace{(x, y)}_{} \mid x \in M, y \in N\}$

Tupel $\hat{=}$ geordnetes Paar (Reihenfolge wichtig)



leere Menge $\quad \emptyset = \{\ \}$

$\nexists\, x$ mit $x \in \emptyset$

0.5. Abbildungen

M, N Mengen

Eine Abbildung $f : M \to N$ ordnet jedem $x \in M$ ein <u>eindeutiges</u> $f(x) \in N$ zu.

$$f : \begin{array}{l} M \to N \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{(Abbildungsvorschrift)}$$

Bsp.:

$A : \{\text{Menschen}\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

$x \longmapsto \text{Alter von } x = A(x)$