23.10.2015

0. Kleinigkeiten

„Definition, Satz, Beweis"

$\downarrow$

Axiome $\hat{=}$ Spielregeln

0.1. Beispiel $\quad \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$

<u>Def:</u> Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt <u>Primzahl</u>, wenn sie genau zwei Teiler besitzt.

(Bsp: $\cancel{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\cancel{4}$)

<u>Satz:</u> Es gibt unendlich viele Primzahlen

(Elemente, Euklid, 300 v. Chr.)

<u>Beweis:</u>

Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$.

Für jedes $a \in \mathbb{N}$ gibt es ein i mit $p_i \mid a$ („p_i teilt a")

Jetzt betrachten wir $a = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$.

Sei i so, dass $p_i \mid a$.

Aber $p_i \mid p_1 \cdots p_n$, also $p_i \mid 1$ ↯ <u>Widerspruch</u>

$\square$

$p_i \mid a \Rightarrow$ Es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $p_i \cdot k = a$

$p_i \mid b \Rightarrow$ " " $l \in \mathbb{N}$ mit $p_i \cdot l = b$

$a - b = p_i k - p_i l = p_i (k - l)$

$\Rightarrow p_i \mid a - b = 1$

C Gauß-Algorithmus

INPUT: $(A|b)$

Wir fangen an der ersten Spalte an

(*) Falls: Spalte = Nullspalte

→ gehe zur nächsten Spalte & zu (*)

Falls nicht:

→ A evtl. Vertauschen von Zeilen, damit oben links Eintrag $a_{ij} \neq 0$

B Multipliziere mit Kehrwert $\frac{1}{a_{ij}}$

C Addiere Vielfache der „oberen" Zeile zu der unteren, sodass alle Einträge unter der 1 danach $= 0$ sind.

„Streiche" obere Zeile

→ Gehe zu nächster Spalte & (*)

Fragen:

1. Wann gibt es Lösungen?
2. Wieviele?
3. alternative Sichtweise.

zB. geometrisch

⇒ Lineare Algebra

02. Aussagenlogik RSDAP

Aussage A: ist wahr oder falsch, aber nicht beides

$\neg A$ nicht A

$A \Rightarrow B$ B folgt aus A

$A \Leftrightarrow B$ A ist äquivalent zu B

$A \wedge B$ A & B

$A \vee B$ A oder B (und/oder)

Quantoren

$\forall$ für alle

$\exists$ existiert ein

$\nexists$ existiert kein

$\exists!$ existiert genau ein

Zahlen:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \{$natürliche Zahlen$\}$

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} = \{$ganze Zahlen$\}$

$\mathbb{Q} := \{$rationale Zahlen$\} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R} := \{$reelle Zahlen$\}$

03. Vollständige Induktion

Beispiel $n \in \mathbb{Z}$

Satz: $\underbrace{n^3 - n \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar}}_{A(n)\ \forall n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: Induktionsanfang (IA): $n = 1$

$1^3 - 1 = 0$. 0 ist durch 6 teilbar

$\Rightarrow A(1)$ gilt.

Induktionsschritt (IS): $n \to n+1$

Annahme: $A(n)$ gilt $\Rightarrow n^3 - n = 6 \cdot k$

$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$

$= (n^3 - n) + 3\underbrace{\overbrace{(n^2+n)}^{\text{immer gerade}}}_{2l} + (1-1) = 6k + 6l = 6(k+l)$

$\Rightarrow 6 \mid (n+1)^3 - (n+1) \Rightarrow A(n+1)$ gilt

$\square$

Prinzip der vollst. Ind.

$$\left.\begin{array}{l} A(1) \text{ gilt} \quad (A(n_0) \text{ gilt}) \\ A(n) \Rightarrow A(n+1) \text{ gilt} \end{array}\right\} \Rightarrow A(n) \text{ gilt } \forall n \in \mathbb{N} \quad (A(n) \text{ gilt } \forall n \geq n_0)$$

Im Induktionsbeweis beweisen wir die linke Seite.

Varianten

$$\left.\begin{array}{l} A(1) \text{ gilt} \\ A(k) \Rightarrow A(n+1) \\ \forall k \leq n \end{array}\right\} A(n) \text{ gilt } \forall n \in \mathbb{N}$$

0.4. Mengen

$M = \{1, 3, 7, 8\}$

$N = \{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{n \text{ Primzahl}}_{\text{Bedingung}}\}$

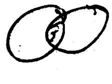
$1 \in M, \quad 2 \notin M$

$\{1, 2, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$

keine Vielfachheiten oder Reihenfolge

Teilmenge: $M \subset N :\Leftrightarrow x \in M \Rightarrow x \in N$

Schnittmenge $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$



Vereinigung $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$

~~Komplement~~ Differenz $M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

Kartesisches Produkt $M \times N \; \{\underbrace{(x,y)}_{\downarrow} \mid x \in M, y \in N\}$

Tupel $\hat{=}$ geordnetes Paar

leere Menge $\emptyset = \{ \}$

0.5. Abbildungen

M, N Mengen

Eine Abbildung $f: M \to N$ ordnet jedem $x \in M$ ein eindeutiges $f(x) \in N$ zu :

$$f: M \longrightarrow N$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Bsp: $A \{ \text{Menschen} \} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$x \longmapsto \text{Alter von } x = A(x)$$