1. Vektorräume

Df: Ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum (kurz $^{\mathbb{R}}$VR) ist eine Menge V mit zwei Operationen:

Die Elemente $v \in V$ heißen Vektoren

Vektoraddition $+$: $V \times V \longrightarrow V$
$(v, w) \longmapsto v + w$

Skalarprodukt : $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
$(\lambda, w) \longmapsto \lambda \cdot w = \lambda w$

die den folgenden Axiomen genügen:

Assoziativ-gesetz A) $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u, v, w \in V$

Kommutativ-gesetz B) $u+v = v+u$

Neutralelement C) es existiert ein Element $\vec{0} \in V$ mit $u+\vec{0} = u \quad \forall u \in V$

Inverses D) $u + (-1)u = \vec{0} \quad \forall u \in V$

E) $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Distributiv-gesetze F) $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda v \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in V$

G) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Notation

- eigentlich $(V, +, \cdot)$, oft V
- Inverse $\quad -u := (-1)u$

$u - v := u + (-1)v$

Satz 1.1 (Rechenregeln) Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Dann gilt:

0) $\vec{0}$ ist eindeutig bestimmt durch C)

~~Für alle~~

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ gilt:

1) $0 \cdot v = \vec{0}$

2) $1 \cdot v = v$

3) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

4) $\lambda \cdot v = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = \vec{0}$

Beweis:

0) Angenommen, es gibt $\vec{0}' \in V$, welches ebenfalls Axiom c) erfüllt.

$$\vec{0} \overset{c)}{=} \vec{0} + \vec{0}' \underset{\text{für } \vec{0}'}{\overset{B)c)}{=}} \vec{0}' \quad \Rightarrow \quad \vec{0} = \vec{0}'$$

1) $0 \cdot v = (0+0)\, v \overset{G)}{=} 0v + 0v \quad \| - \overset{D)}{0v}$

$$\vec{0}v = 0v = 0v + 0v - 0v$$

$$D) \Rightarrow \vec{0} = 0v + \vec{0} \overset{c)}{=} 0v$$

2) $\vec{0} = 0v = (1-1)\, v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v \quad \| + v$

$$\vec{0} + v = 1v + \underbrace{(-1)v + v}$$

$$B) \Rightarrow \quad v = 1v + \vec{0} \overset{D)}{=} 1v$$

3) zu Hause

4) A $\lambda \neq 0$

$$\lambda v = \vec{0} \quad \| \tfrac{1}{\lambda}$$

$$\tfrac{1}{\lambda}(\lambda \cdot v) = \tfrac{1}{\lambda} \vec{0}$$

$$v = 1 \cdot v = \vec{0} \;{}^{a)}$$

Notation $0 - \vec{0}$

$$u = v \quad \| + w$$

$$u + w = v + w$$

Beispiele:

a) $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

Operationen
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Damit wird $\mathbb{R}^n$ zum $\mathbb{R}$-VR

b) $a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0$

$\vdots$

$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0$

homogenes lineares Gleichungssystem (m Gleichungen in n Variablen)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{nm} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Def</u> Eine Familie von Vektoren $F = (v_1, \dots, v_n), v_i \in V$ heißt <u>Basis</u> des VR, wenn sich jedes $v \in V$ eindeutig als <u>Linearkombination</u> ~~Vektor~~ $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

schreiben lässt

27.10.15

Def.: Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (kurz $\mathbb{R}$-VR) ist eine Menge V mit zwei Operationen [Elemente $v \in V$ heißen Vektoren]

Vektoraddition $+ : V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$

Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, w) \mapsto \lambda \cdot w$

die den folgenden Axiomen genügen:

Assoziativgesetz A) $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall\, u, v, w \in V$

Kommutativgesetz B) $u+v = v+u \quad \forall\, u, v \in V$

neutrales Element $\hat{=}$ Nullvektor C) es existiert ein Element $\vec{0} \in V$ mit $u + \vec{0} = u \quad \forall\, u \in V$

Inverses D) $u + (-1)\cdot u = \vec{0} \quad \forall\, u \in V$

E) $\lambda\cdot(\mu\cdot v) = (\lambda\cdot\mu)\cdot v \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ v \in V$

Distributivgesetze:

F) $\lambda\cdot(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ u, v \in V$

G) $(\lambda+\mu)\cdot v = \lambda\cdot v + \mu\cdot v \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \ v \in V$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Notation

- eigentlich $(V, +, \cdot)$, oft V
- Inverse $-u := (-1)\cdot u$

  $u - v := u + (-1)\cdot v$

Satz 1.1. (Rechenregeln)

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Dann gilt:

0) $\vec{0}$ ist eindeutig bestimmt durch C)

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ gilt:

1) $0 \cdot v = \vec{0}$
2) $1 \cdot v = v$
3) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$
4) $\lambda \cdot v = \vec{0}$

   $\Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$

Beweis:

0) Angenommen, es gilt $\vec{0}' \in V$ welches ebenfalls Axiom c) erfüllt.

$$c) \quad \underset{\text{für } \vec{0}'}{\vec{0}} = \vec{0} + \underset{\text{für } \vec{0}}{\vec{0}'} \overset{B), C)}{=} \vec{0}'$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{0}'$$

1) $$0 \cdot v = (0+0)v \overset{G)}{=} 0v + 0v \quad | -0v$$

$$0v - 0v = 0v + 0v - 0v$$

$$D) \Rightarrow \quad \vec{0} = 0v + \vec{0} \overset{c)}{=} 0v$$

2) $$\vec{0} \overset{1)}{=} 0 \cdot v = (1-1)v$$

$$\overset{G)}{=} 1v + (-1)v \quad | +v$$

$$\vec{0} + v = 1v + \underbrace{(-1)v + v}_{D)}$$

$$B \Rightarrow \quad v \overset{c)}{=} 1v + \vec{0} \underset{c)}{=} 1v$$

3) Übung

4) Angenommen $\lambda \neq 0$

$$\lambda \cdot v = \vec{0} \quad | \cdot \tfrac{1}{\lambda}$$

$$\tfrac{1}{\lambda}(\lambda v) = \tfrac{1}{\lambda}\vec{0}$$

$$v \overset{2)}{=} 1 v \overset{E)}{=} \vec{0} \quad 3)$$

Notation: $0 = \vec{0}$

Beispiele:

a) $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

Operationen: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_1 + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Damit wird $\mathbb{R}^n$ zum $\mathbb{R}$-VR

b) $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$ homogenes lineares GS.

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$ m. Gleichungen in n Variablen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ Suchen $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = 0 \in \mathbb{R}^n$

$\text{Lös}(A|0)$ ist $\mathbb{R}$-VR

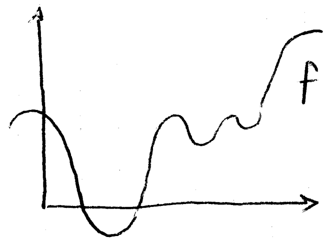
$\hookrightarrow \subset \mathbb{R}^n$

(denn $x, y \in \text{Lös}(A|0) \Rightarrow x + y \in \text{Lös}(A|0)$
$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in \text{Lös}(A|0)$)

c) Sei M Menge. $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) = \{\text{Funktionen } f: M \to \mathbb{R}\}$

$f, g \in F(M, \mathbb{R})$

$f + g: M \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) + g(x)$



$\lambda \cdot f: M \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto \lambda \cdot f(x)$

$\Rightarrow (F(M, \mathbb{R}), +, \cdot)$ ist $\mathbb{R}$-VR.

Nullvektor? $\vec{0}: M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ $\Rightarrow 0 \in F(M, \mathbb{R})$

$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{\text{differenzierbare Funktionen } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

ebenfalls $\mathbb{R}$-VR

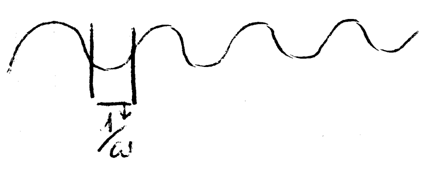
$\mathbb{R}[x]_{\leq d} := \{\text{Polynomfunktionen vom Grad} \leq d$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0$

d) lineare Differentialgleichungen

Bsp.: harmonische Oszillator

I $f'' + \omega f = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \geq 0$

$\Rightarrow \text{Lös}(1)$ ist $\mathbb{R}$-VR. suchen $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$



e) $V = \{0\}$ triviale VR.

<u>Def</u>. Eine Familie von Vektoren $F = (v_1, \ldots, v_n)$ $v \in V$ heißt <u>Basis</u> des VR, wenn sich jedes $v \in V$ <u>eindeutig</u> als <u>Linearkombination</u> s

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \quad , \lambda_i \in \mathbb{R}$$

schreiben lässt.