30.10.15

Def.: Eine Familie $F = (v_1, v_2)$ $v \in V$ heißt Basis von V, falls jedes $v \in V$ eine eindeutige LK von F ist,

d. h. : $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, λ_i eindeutig

λ_i heißen Koordinaten von v (bezügl. Basis F)

Bsp.: $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_2} + \ldots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= e_n}$$

e_i : Einheitsvektoren $F = (e_1, \ldots, e_n)$
Standardbasis v. $\mathbb{R}^n$

Basen =

① jedes v ist LK $\Leftrightarrow$ F ist Erzeugnissystem

② jede LK ist eindeutig

zu ①:

Def sei $M \subset V$ eine Menge. Wir def. das Erzeugnis / lineare Hülle als die Menge aller LK von M, also

$$\langle M \rangle := \left\{ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R} \\ v \in M \end{array} \right\}$$

M heißt Erzeugnissystem, falls $\langle M \rangle = V$

Notation: $\langle \emptyset \rangle := \{0\}$

Def: Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum (UVR) wenn gilt:

A') $U \neq \emptyset$

B') $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$

C') $\begin{array}{l} u \in U \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \Rightarrow \lambda u \in U$

U ist abgeschlossen unter Addition und Skalarmult

Satz 1.2.: Jeder UVR $U \subset V$ ist selbst $\mathbb{R}$-VR (mit denselben Operationen wie V)

Beweis: Aus B') und C') folgt, dass wir die Operationen $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

auf $U \times U \to U$, $\mathbb{R} \times U \to U$ einschränken können.

Axiom C) Aus A') $U \neq \emptyset$
$\exists\, v \in U$
$\overset{C')}{\Rightarrow} 0 \cdot v = 0 \in U$

andere Axiome folgen direkt aus „V ist $\mathbb{R}$-VR".

Beispiel: a), b)

$Lös(A|0) \subset \mathbb{R}^n$

c), d)

$\mathbb{R}[x] \subsetneq C(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Satz 1.3.: Das Erzeugnis $\langle M \rangle \subset V$ ist ein UVR.

Beweis: Übung

Satz 1.4.: Sei $M \subset V$ Menge. Wir setzen $\mathcal{U} = \left\{ \begin{matrix} U \subset V \\ \text{UVR} \end{matrix} \middle| M \subset U \right\}$

U Teilm. v. V ist UVR

Dann gilt $\langle M \rangle = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

→ ist der kleinste UVR der M enthält.

Beweis: Mengengleichheit

$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$

z.z. hier: $\langle M \rangle \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

Sei $U \in \mathcal{U}$. Da $M \subset U$, folgt aus B'), C'), dass jede LK von Elementen aus M ebenfalls in U liegt, $\langle M \rangle \subset U$

$\Rightarrow \langle M \rangle \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

z.z.: $\langle M \rangle \supset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

Satz 1.3. $\Rightarrow \langle M \rangle$ ist UVR und $M \subset \langle M \rangle$

$\Rightarrow \langle M \rangle \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \subset \langle M \rangle$

zu (2) $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ (I)

$\stackrel{?}{=} \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_2 v_2$ (II)

(*)
$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$ (I) − (II)

Def: Eine Familie $F = (v_1, \ldots v_n)$ heißt linear unabhängig falls es eine nicht-triviale LK der 0 gibt, also:

$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$

Sonst heißt F linear abhängig

Korollar 1.5.

F ist linear unabhängig genau dann, wenn jede Linearkombination von F eindeutig ist, d.h.:

$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i$

Beweis: siehe (*)

$\boxed{\Rightarrow F \text{ Basis} \Leftrightarrow F \text{ Erzeugnissystem}, F \text{ linear unabhängig}}$

Beispiele: a) $F = (v_1)$

F lin unabhängig $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$

b) $F = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = 0$

$\Rightarrow F$ linear abhängig.

$1 v_i = 0$

c) $F = (v_1, \dots v_n)$, $v_i = v_j$ für $i \neq j$

$\Rightarrow F$ linear abhängig.

$1 v_i - 1 v_j = 0$

Satz 1.6. Eine Familie F $(v_1 \dots v_n)$ ist linear abhängig genau dann, wenn sich ein v_i als LK der restl. schreiben lässt, also $\exists i : v_i \in \langle v_1, \hat{v}_i, \dots v_n \rangle$

weglassen

Beweis

"$\Rightarrow$" F lin. abh.

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

mit (mind.) einem $\lambda_i \neq 0$

$\Rightarrow$ Mult. mit $-\frac{1}{\lambda_i}$ liefert $-\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots - 1 v_i \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n = 0$

$\Rightarrow v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \hat{v}_i \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$

Def: Ein VR V heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Menge $M \subset V$ gibt mit $\langle M \rangle = V$

ab jetzt: V endlich erzeugt

Frage: existiert dann eine Basis?

Satz 1.7.: Sei $F(v_1 \dots v_n)$ eine Familie. Dann sind äquivalent:

a) F ist Basis

b) F ist minimale Erzeugungssystem

c) F ist maximale lin. unabh. Menge

Korollar 1.8.: Sei V endlich erzeugt. Dann existiert eine Basis $B = (v_1 \dots v_n)$ von V

Beweis: V endlich erzeugt

$\Rightarrow \exists\, \underset{\{v_1 \dots v_n\}}{\overset{\shortparallel}{M}} \subset V$ endlich mit $\langle M \rangle = V$

$\Rightarrow$ Falls M nicht minimal, können wir einen $v_i \in M$ weglassen.

weiter so bis $M \setminus \{v_i\}$ minimal

$\overset{1.7.}{\underset{(a \Leftrightarrow b)}{\Longrightarrow}}$ $M \setminus \{v_i\}$ ist Basis

b) $$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$ homogenes lineares Gleichungssystem (m Gleichungen in n Variablen)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

30.10.14 Eine Familie von Vektoren $F = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in V$

Definition: heißt Basis, falls sich jeder Vektor eindeutig als Linearkombination von ... $+ \lambda_n v_n$ schreiben lässt, d.h. $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \quad \lambda_i \text{ eindeutig.}$$

λ_i heißen Koordinaten von V (bzgl. der Basis F)

Bsp: $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n}$$

e_i Einheitsvektoren. $F = (e_1, \dots, e_n)$ Standardbasis von $\mathbb{R}^n$

BRUNNEN

Basen =
① jedes v is Linearkomb $\Leftrightarrow$ F ist Erzeugendensystem
& ② jede Linearkomb ist eindeutig

zu ①:

Def: Sei $M \subset V$ eine Menge. Wir definieren das Erzeugnis / lineare Hülle (engl. linear span) als die Menge aller Linearkomb von M, also $\langle M \rangle := \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in M \}$

M heißt Erzeugendensystem, falls $\langle M \rangle = V$

Def: Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum (UVR) wenn gilt:

A') $U \neq \emptyset$

B') $u, v \in U \Rightarrow \cancel{\ } u + v \in U$

C') $u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$

U ist abgeschlossen ist unter Addition und Skalarmultiplikation.

Satz 1.2 Jeder UVR $U \subset V$ ist selbst $\mathbb{R}$-VR (mit „denselben" Operationen wie V)

Beweis: Aus B') und C') folgt, dass wir die Operationen

$+ : V \times V \to V$ $\quad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

auf $U \times U \to U$, $\mathbb{R} \times U \to U$ einschränken können.

Axiom C) Aus A') $U \neq \emptyset \Rightarrow \exists v \in U$

$\xRightarrow{C'} 0 \cdot v = \vec{0} \in U$

andere Axiome folgen direkt aus „V is $\mathbb{R}$-VR" zu ① $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ (I)

$= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ (II)

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$ (I)-(II)

Def Eine Familie $F = (v_1, \dots, v_n)$, heißt linear unabhängig, falls es keine nicht-triviale LK der 0 gibt, also

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Sonst heißt F linear abhängig.

Korollar 1.5.: F ist linear unabhängig, genau dann, wenn jede Linearkomb. von F eindeutig ist, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i$$ Beweis: siehe (*)

$\Rightarrow$ F Basis $\Leftrightarrow$ F Erzeugendensystem, F lin. unabh.

Beispiele:

a) $F = (v_1)$

F linear unabh. $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$

b) $F = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = 0$ $\Rightarrow$ F linear abhängig

$1 v_i = 0$

c) $F = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = v_j$ für $i \neq j$

$\Rightarrow$ F linear abhängig

$1 v_i - 1 v_j = 0$

Satz 1.6: Eine Familie F $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear abhängig, gdw ~~…~~ sich ein v_i als LK der restlichen schreiben lässt, also

$\exists i: v_i \in \langle v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$

$\hat{v}_i$ heißt: v_i weglassen

Beispiel: a), b)

$Lös(A|0) \subset \mathbb{R}^n$

c), d) $\mathbb{R}[x]_{\leq d} \subset C_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Polynome vom Grad d — diffbare

Satz 1.3 Das Erzeugnis $\langle M \rangle \subset V$ ist ein UVR

Beweis: Übung

Notation: $\langle \emptyset \rangle := \{0\}$

Satz 1.4 Sei $M \subset V$ Menge.

Wir setzen $\mathcal{U} = \{ U \subset V$ ~~...~~ Untervektorraum $| M \subset U \}$

Dann gilt: $\langle M \rangle = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

→ ist der kleinste UVR, der M enthält

Beweis: Mengengleichheit

$M_1 = M_2 \iff M_1 \subset M_2,\ M_2 \subset M_1$

zu zeigen: $\langle M \rangle \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

Sei $U \in \mathcal{U}$. Da $M \subset U$ folgt aus B'), C'), dass LK ~~aus M~~ von Elementen aus M ebenfalls in U liegt, also $\langle M \rangle \subset U \implies \langle M \rangle \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

Zu zeigen: $\langle M \rangle \supset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

Satz 1.3 $\implies \langle M \rangle$ ist UVR und $M \subset \langle M \rangle$

$\implies \langle M \rangle \in \mathcal{U} \implies \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \subset \langle M \rangle$

BRUNNEN

Beweis:

„$\Rightarrow$" F linear abhängig $\rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$
(es gibt eine Linearkombination der Null) mit (mindestens) 1 einem $\lambda_i \neq 0$

$\rightarrow$ Mult. mit $-\frac{1}{\lambda_i}$ liefert $-\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + -1 v_i \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n = 0$

$\Rightarrow v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \dots \widehat{v_i} \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$

„$\Leftarrow$" umgekehrt, sonst analog

Def: Ein VR V heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Menge $M \subset V$ gibt mit $\langle M \rangle = V$

ab jetzt: V endlich erzeugt.

Frage: Existiert dann eine Basis?

Satz 1.7 Sei $F = (v_1, \dots, v_n)$ eine Familie

Dann sind äquivalent:

a) F ist Basis

b) F ist minimales Erzeugendensystem

c) F ist maximal linear unabhängige Menge

Korollar 1.8: Sei V endlich erzeugt. Dann ex. eine Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V.

Beweis: V endlich erzeugt $\Rightarrow \exists\, M \subset M$ endlich mit $\langle M \rangle = V$, $M = \{v_1, \dots, v_k\}$

$\rightarrow$ Falls M nicht minimal, können wir ein $v_i \in M$ weglassen

weiter so bis $\underbrace{M}_{M \setminus \{v_k\}}$ minimal. $\overset{1.7}{\underset{a) \Leftrightarrow b)}{\Rightarrow}}$ $M \setminus \{v_i\}$ ist Basis.