03.11.15

Satz 1.7 $F = (v_1, \dots, v_n)$ $v_i \in V$

i) F Basis $\Leftrightarrow$ ii) F minimales Erzeugendensystem $\Leftrightarrow$ iii) F maximal lin. unabh.

Beweis i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) folgen aus 1.6.

iii) $\Rightarrow$ i) zu zeigen $\langle F \rangle = V$

Sei $v \in V$. Da F maximal, ist $(v_1, \dots, v_n, v)$ lin. abh.

$\Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v$ mit einem $\lambda_i \neq 0$

Falls $\lambda_{n+1} = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ mit einem $\lambda_i \neq 0$

$\lightning$ zu $(v_1 \dots v_n)$ lin. unabh.

$\Rightarrow \lambda_{n+1} \neq 0$

$\xRightarrow{\text{wie in Beweis 1.6.}}$ $v \in \langle v_1 \dots v_n \rangle \Rightarrow \langle F \rangle = V$

Korollar 1.8 V endlich erzeugt $\Rightarrow$ existiert (endliche) Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ für V

Def.:

Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \begin{cases} n & \text{falls } \exists B = (v_1 \dots v_n) \text{ Basis für } V \;(*) \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

$\hat{=}$ endlich erzeugt $\hat{=}$ endlich-dimensional

unendlich-dimensional

Beispiele:

a) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ $\quad B = (e_1, \dots, e_n)$ $\quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — i-te Stelle

b) $L = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + \omega^2 f = 0 \}$ $\quad C^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ Beliebig oft differenzierbar $\}$

$B = (\sin(\omega x), \cos(\omega x))$ ist für L $\quad \dim(L) = 2$

c) $\dim(\{0\}) = 0$, denn $B = (\,)$ Basis

(*) ⚠ hat jede Basis von V dieselbe Länge n?

Lemma 1.9 ("Hilfssatz")

Sei $B = (v_1, \dots v_n)$ Basis von V.

Sei $w \in V$. Schreibe $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Wir nehmen an $\lambda_i \neq 0$.

Dann ist $B' = (v_1, v_{i-1}, w, v_{i+1}, v_n)$ Basis von V

Beweis: OBdA (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $i = 1$ (durch Umnummerieren)

1) B' erzeugt V: Da $\lambda_1 \neq 0$, folgt $v_1 \in \langle w, v_2, \dots, v_n \rangle$ $\quad v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} w + \dots + v_n$

$\Rightarrow \langle B' \rangle = V$

2) B' lin. unabhängig:

$$0 = \mu_1 w + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n \quad (w = \sum \lambda_i w_i \text{ einsetzen})$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\mu_1 \lambda_1 v_1}_{0} + \underbrace{(\mu_2 + \mu_1 \lambda_2)}_{0} v_2 + \dots + \underbrace{(\mu_n + \mu_1 \lambda_n)}_{0} v_n$$

$B = (v_1 \dots v_n)$ lin. unabh. $\Rightarrow$

$\mu_1 \lambda_1 = 0$, aber $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$

$\Rightarrow \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$

Aus 1) und 2) folgt B' ist Basis.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \neq 0 & & 0 \\ \vdots & 1 & \\ & 1 & \\ \lambda_n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ hat eindeutige Lösung x für alle b.

Austauschsatz 1.10

Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V

Sei $F(w_1, \dots, w_r)$ lin. unabh. Familie

Dann gilt $r \leq n$ und nach geeignetem Umnummerieren der v_i ist $B' = (w_1, w_r, w_{r+1}, \dots w_n)$ Basis von V.

Beweis: Induktion über r

IA $A(0)$ gilt

IS $\underset{IV}{A(r-1)} \Rightarrow A(r)$ gilt $\Rightarrow A(r) \ \forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

IA: $r=0$ trivial

IS: $r-1 \rightarrow r$ $\quad F=(w_1 \dots w_r)$ lin. unabh.

$\Rightarrow (w_1, \dots, w_{r-1})$ lin. unabh.

$\overset{IV}{\Rightarrow}$ umnummerieren $(w_1, \dots, w_{r-1}, v_r, \dots, v_n)$ ist Basis von V

und $r-1 \leq n$

Falls $r-1=n \Rightarrow (w_1, \dots, w_{r-1})$ Basis $\lightning$ F lin. unabh.

$\Rightarrow r-1<n \Rightarrow r \leq n$

$$w_r = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{r-1} w_{r-1} + \lambda_r v_r + \dots + \lambda_n v_n$$

Angenommen $\lambda_r = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow w_r \in \langle w_1, \dots, w_{r-1} \rangle$

$\overset{1.6.}{\Rightarrow}$ F lin. abhängig $\lightning$

$\Rightarrow \exists i \in \{r, r+1, \dots, n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$

OBDA $i=r$

$\overset{\text{Lema 1.9.}}{\Rightarrow} (w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ Basis von V.

Korollar 1.11

Sei V endlich-dimensional. Dann hat jede Basis von V dieselbe Länge.

Beweis: Seien $B=(v_1 \dots v_n)$, $B'=(v_1' \dots v_m')$ Basis von V

Wir können 1.10 zweimal anwenden $\begin{pmatrix} B=B & & B=B' \\ F=B' & \text{und} & F=B \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m \leq n$ und $n \leq m$

$\Rightarrow n=m$

$\Rightarrow$ Definition von $\dim(V)$ ergibt Sinn (wohldefiniert)

Korollar 1.12 (Basisergänzungssatz)

Sei V endl.-dim.

Sei $F = (v_1 \dots v_r)$ eine lin. unabh. Familie. Dann existieren $v_{r+1} \dots v_n \in V$, so dass $(v_1, \dots v_n)$ Basis von V.

Beweis: Wähle Basis $(w_1, \dots w_n)$.

$\overset{1.10}{\Longrightarrow} (v_1, \dots, v_r, w_{r+1} \dots w_n)$ Basis

Satz 1.13

Sei V endl. dimensional. Sei $U \subset V$ UVR.

① Dann ist U ebenfalls endlich-dimensional und $\dim(U) \leq \dim(V)$

② Falls $\dim(U) = \dim(V)$, folgt $U = V$

Beweis: ① U endlich-dimensional

Annahme: U unendl.-dim. / nicht endlich erzeugt

Dann existieren linear unabhängige Familie $F_n = (v_1 \dots v_n)$ der Länge n für alle $n \in \mathbb{N}$.

(IA $F_1 = (\underset{\neq 0}{v_1})$ für bel. $\underset{\neq 0}{v_1 \in V}$

IS Nach IV $\exists\, F_n = (v_1, \dots v_n)$ lin. unabh.

Da U nicht endlich erzeugt, gilt $\langle F_n \rangle \neq U$

Wähle $v_{n+1} \in U \setminus \langle F_n \rangle$

$\Rightarrow F_{n+1} = (v_1, \dots, v_{n+1})$ lin. unabh.)

Für $n > \dim V$, erhalten wir $\lightning$ zu 1.10

② Sei $(w_1 \dots w_n)$ Basis von U

$\Rightarrow (w_1, \dots, w_m)$ lin. unabh. (in V) $\overset{1.10}{\Longrightarrow} m \leq \dim(V)$

Problem: INPUT: $v_1, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$

OUTPUT: Basis von $U = \langle v_1, \dots v_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$

$v_i = (v_i 1, \dots v_i n)$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline \\ \hline v_n \end{pmatrix} = (v_{ij})$$

(*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$$

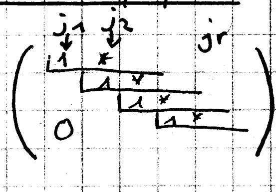
$$= (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

Zeile zuerst, Spalte später

(*) $\Downarrow$ Gaußalgorithmus / Zeilenumformungen

1. Vertauschen
2. Skalieren mit $\lambda \neq 0$
3. Addieren

<u>Zeilenstufenform</u>



$\exists r \le n$

$\exists j_1 \dots j_r \in \{1, \dots, m\}$ mit $a_{ij_i} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, r$

und $a_{ij} = 0 \quad \forall j < j_i$

Beweis:

„$\Rightarrow$" F linear abhängig $\Rightarrow$ $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$
(es gibt eine Linearkombination der Null)
mit (mindestens) einem $\lambda_i \neq 0$

$\Rightarrow$ Mult. mit $-\frac{1}{\lambda_i}$ liefert $-\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + -1 v_i \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n = 0$

$\Rightarrow v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \dots \widehat{v_i} \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$

„$\Leftarrow$" umgekehrt, sonst analog

<u>Def</u>: Ein VR V heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls es eine <u>endliche</u> Menge $M \subset V$ gibt mit $\langle M \rangle = V$

ab jetzt: V endlich erzeugt.

Frage: Existiert dann eine Basis?

<u>Satz 1.7</u> Sei $F = (v_1, \dots v_n)$ eine Familie

Dann sind äquivalent:

a) F ist Basis

b) F ist minimales Erzeugendensystem

c) F ist maximal linear unabhängige Menge

<u>Korollar 1.8</u>: Sei V endlich erzeugt. Dann ex eine Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V.

Beweis: V endlich erzeugt $\Rightarrow \exists \underset{\{v_1, \dots v_k\}}{\overset{\shortparallel}{M}} \subset M$ endlich mit $\langle M \rangle = V$

$\rightarrow$ Falls M nicht minimal, können wir ein $v_i \in M$ weglassen

weiter so bis $\underbrace{M}_{M \setminus \{v_k\}}$ minimal. $\overset{1.7}{\underset{a) \Leftrightarrow b)}{\Rightarrow}}$ $M \setminus \{v_i\}$ ist Basis.

BRUNNEN

03.11.2015

Satz 1.7. $F = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in V$

(i) F Basis $\Leftrightarrow$ (ii) F minimales Erzeugendensystem $\Leftrightarrow$ (iii) F maximal lin unabh

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgen aus 1.6

iii) $\Rightarrow$ i) zu zeigen: $\langle F \rangle = V$

Sei $v \in V$. Da F maximal, ist $(v_1, \dots, v_n, v)$ lin abh.

$\Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v$

Falls $\lambda_{n+1} = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ mit einem $\lambda_i \neq 0$ ~~Wid~~ zu $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabh.

$\Rightarrow \lambda_{n+1} \neq 0$.

$\xrightarrow[\text{Beweis 1.6}]{\text{wie in}} v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow \langle F \rangle = V$

Korollar 1.8 V endlich erzeugt $\Rightarrow$ existiert (endliche) Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ für V

Def Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \begin{cases} n & \text{falls } \exists B = (v_1, \dots, v_n) \text{ Basis für } V \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$ (endlich erzeugt) $\hat{=}$ endl. dim

Bsp:

a) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ $\quad B = (e_1, \dots, e_n)$

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle

b) $\mathcal{L} = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + \omega^2 f = 0 \}$

$B = (\sin(\omega x), \cos(\omega x))$ ist für $\mathcal{L}$

$\dim(\mathcal{L}) = 2$

c) $\dim(\{0\}) = 0$

denn $B = ()$ Basis.

? Hat jede Basis von V dieselbe Längen ??

Lemma 1.9

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V. Sei $w \in V$

Schreibe $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Wir nehmen an, $\lambda_i \neq 0$

Dann ist $B' = (v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots v_n)$ Basis von V

(durch umnummerieren)

Beweis: OBdA $i = 1$
(ohne Bedenken der Anwesenden)

1. B' erzeugt V

Da $\lambda_1 \neq 0$ folgt $v_1 \in \langle w, v_2, \ldots, v_n \rangle$

$\Rightarrow \langle B' \rangle = V$

2. B' lin unabh.

$0 = \mu_1 w + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$

(setze ein $w = \sum \lambda_i w_i$)

$\Rightarrow 0 = \underbrace{\mu_1 \lambda_1}_{=0} v_1 + \underbrace{(\mu_2 + \mu_1 \lambda_2)}_{=0} v_2 + \ldots + \underbrace{(\mu_n + y_n \lambda_n)}_{=0} v_n$

$B = (v_1, \ldots v_n)$ lin unabh.

$\mu_1 \lambda_1 = 0$, aber $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$

$\Rightarrow \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$

Aus 1. und 2. folgt: B' ist Basis

Anderes Vorgehen („Physikerbeweis")

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ \vdots & 1 & 0 \\ & & \ddots \\ \lambda_n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ hat eindeutige Lösung x für alle b

1.10 Austauschsatz
(Steinitz)

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V. Sei $F = (w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängige Familie. Dann gilt $r \leq n$ und nach geeignetem umnummerieren der v_i ist

$B' = (w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots v_n)$ Basis von V.

Beweis: : Induktion über r

$\underline{IA}$ $A(0)$ gilt

$\underline{IS}$ $\underbrace{A(r-1)}_{IV} \Rightarrow A(r)$ gilt $\Rightarrow A(r)\ \forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\underline{IA}$: $r=0$ trivial

IS: $r-1 \to r$ $\mathcal{F} = (w_1, \ldots, w_r)$ lin. unabh.

$\Rightarrow (w_1, \ldots, w_{r-1})$ lin. unabh.

$\underset{\text{umnummerieren}}{\overset{IV}{\Longrightarrow}}$ $(w_1, \ldots, w_{r-1}, v_r, \ldots v_n)$ ist Basis von V und $r-1 \leq n$

Falls $r-1=n$ $\Rightarrow (w_1, \ldots, w_{r-1})$ Basis

$\lightning$ $\mathcal{F}$ lin unabh.

$\Rightarrow r-1 < n \Rightarrow r \leq n$

$w_r = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{r-1} w_{r-1} + \lambda_r v_r + \ldots + \lambda_n v_n$

Angenommen $\lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$

$\Longrightarrow w_r \in \langle w_1, \ldots w_{r-1} \rangle$

$\overset{1.6}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{F}$ lin. abh. $\lightning$

$\Rightarrow \exists\, i \in \{r, r+1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$

OBdA $i = r$

$\overset{\text{Lemma 1.9}}{\Longrightarrow}$ $(w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots v_n)$ Basis von V

Korollar 1.11. Sei V endlichdimensional, dann hat jede Basis von V dieselbe Länge

Beweis: Seien $\left.\begin{matrix} B = (v_1, \ldots, v_n) \\ B' = (v_1, \ldots, v_m) \end{matrix}\right)$ Basen von V

Können 1.10 zweimal anwenden $\left(\begin{matrix} B = B \\ \mathcal{F} = B' \end{matrix} \text{ und } \begin{matrix} B = B' \\ \mathcal{F} = B \end{matrix}\right)$

$\Rightarrow m \leq n$ und $n \leq m$ $\Rightarrow n = m$

$\Rightarrow$ Definition von $\dim(V)$ ergibt Sinn (wohldefiniert)

Korollar 1.12 (Basisergänzungssatz)
Sei ~~#~~ V endlich-dim. Sei $F = (v_1, \dots, v_r)$ eine lin. unabh.
Familie. Dann existieren $v_{r+1}, \dots v_n \in V$, sodass

$(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V

Beweis: Wähle Basis $(w_1, \dots, w_n)$

$\overset{1.10}{\underset{\text{Umnummerieren}}{\Longrightarrow}}$ $(v_1, \dots v_r, \underset{\substack{\| \\ v_{r+1}}}{w_{r+1}}, \dots \underset{\substack{\| \\ v_n}}{w_n})$ Basis

Satz 1.13 Sei V endlich-dim, sei $U \subset V$ UVR.
Dann ist U ebenfalls endlich-dimensional und
$\dim(U) \leq \dim(V)$.
Falls $\dim(U) = \dim(V)$, folgt $U = V$

Beweis: ① U endlich dimensional
Annahme: U unendlich-dim (nicht endlich erzeugt)
Dann existieren lin unabh. Familie $F_n = (v_1, \dots, v_n)$
der Länge n für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Starte IA: $F = (\underset{\neq 0}{v_1})$ für beliebiges $\underset{\neq 0}{v_1} \in V$
IS Nach IV $\exists F_n = (v_1, \dots v_n)$ lin unabh.
Da U nicht endlich erzeugt, gilt $\langle F_n \rangle \neq U$
Wähle $v_{n+1} \in U \setminus \langle F_n \rangle$
$\Rightarrow F_{n+1} = (v_1, v_{n+1})$ lin. unabh.
Für $n > \dim V$, erhalten ⚡ zu 1.10

② Sei $(w_1, \dots, w_m)$ Basis von U.
$\Rightarrow (w_1, \dots, w_m)$ lin unabh. (in V) $\overset{1.10}{\Longrightarrow}$ $m \leq \dim(V)$

Problem: INPUT: $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$

OUTPUT: Basis von $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$

$$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{\quad v_1 \quad} \\ \underline{\quad v_2 \quad} \\ \vdots \\ \overline{\quad v_k \quad} \end{pmatrix} = (v_{ij})$$