$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$$

$$= (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

Zeile zuerst, spalte später

(*) $\Downarrow$ Gaußalgorithmus / Zeilenumformungen

1. Vertauschen
2. Skalieren mit $\lambda \neq 0$
3. Addieren

Zeilenstufenform

$$\begin{array}{cccc} j_1 & j_2 & & j_r \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & * & & & \\ & 1 & * & & \\ & & 1 & * & \\ 0 & & & 1 & * \end{pmatrix}$$

$\exists r \le n$

$\exists j_1 \ldots j_r \in \{1, \ldots, m\}$ mit $a_{ij_i} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, r$

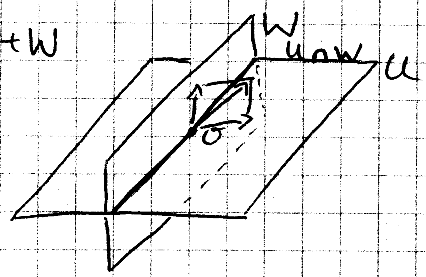
und $a_{ij} = 0 \quad \forall j < j_i$

06.11.15

$U, W \subset V$ UVR

$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ ist UVR $= \langle U \cup W \rangle$ (Übungsaufgabe)

$\mathbb{R}^3 = U + W$



$$\overset{3}{\dim(U + W)} = \overset{2}{\dim(U)} + \overset{2}{\dim(W)} - \dim(U \cap W)$$

Satz 1.15 (Dimensionsformel)

V $\mathbb{R}$-VR, $U, W \in V$ endl. dim. UVR.

Dann gilt: $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$

Beweis:

(1) Wähle $(v_1, \ldots, v_k)$ Basis von $U \cap W$
$\Rightarrow \dim U \cap W = k$

$\Rightarrow (v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig in U, W und V

(2) $\overset{1.12}{\Rightarrow}$ Ergänze zu $(v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_r)$ Basis von U

(3) $(v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_l)$ Basis von W

Behauptung: $B = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_l)$ ist Basis von $U + W$.

1. $\langle B \rangle = U + W$ klar

2. B linear unabhängig

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum \mu_i u_i + \sum \gamma_i w_i$$

$$v := \underbrace{\sum \lambda_i v_i + \sum \mu_i u_i}_{\in U} = \underbrace{-\sum \gamma_i w_i}_{\in W} \in U \cap W$$

$(v_1, \dots, v_k)$ Basis für Schnitt

(1) $\Rightarrow$ $\exists!$ Linearkombination $v = \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_k' v_k$

(2) $\Rightarrow$ $\underbrace{\lambda_i' = \lambda_i}_{\text{für } 1 \le i \le k}$ und $\underbrace{\mu_i = 0}_{\text{für } k+1 \le i \le r}$

(3) $\Rightarrow$ $\lambda_i' = 0$ und $\gamma_i = 0$
λ_i''

$\dim U + W = r + l - k = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Satz 1.16

Sei $V = U + W$

Äquivalent sind

i) $U \cap W = \{0\}$

ii) jedes $v \in W$ ist eindeutig darstellbar als $v = u + w$ $u \in U$, $w \in W$.

iii) $u \in U$, $w \in W$, $u \neq 0 \neq w$
$\Rightarrow$ (u, w) linear unabhängig.

iv) Es gibt Basen B von U, B' von W, so dass (B, B') Basis von V

v) $\dim V = \dim U + \dim W$

Beweis Übung

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, Rightarrow] & \\ C \arrow[ur, Rightarrow] & & B \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} & A \arrow[dr, Leftrightarrow] \arrow[dl, Leftrightarrow] & \\ C \arrow[rr, Leftrightarrow] & & B \end{tikzcd}$$

i) $\Rightarrow$ ii) $\quad u + w = u' + w' \iff u - u' = w' - w \in U \cap W$

ii) $\Rightarrow$ iii) nicht-triviale Darstellung der 0

$\Rightarrow$ 0 nicht eindeutig darstellbar

iii) $\Rightarrow$ i) $\quad v \in U \cap W, \; v \neq 0$

$0 = v - v$

$\Rightarrow (\underset{\in U}{v}, \underset{\in W}{v})$ lin abhängig

i) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ v) Beweis von 1.15

v) $\Rightarrow$ i) $\quad \dim(U \cap W) = 0$

$\Rightarrow U \cap W = \{0\}$

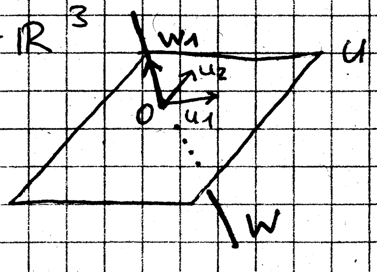
<u>Def</u>: V heißt <u>direkte Summe</u> von U, $W \subset V$, falls gilt:

$$V = U + W \text{ und } U \cap W = \{0\}$$

<u>Notation</u>: $V = U \oplus W$

W <u>direkter Summand</u> von U

$V = \mathbb{R}^3$



<u>Satz 1.17</u>

Sei $U \subset V$ UVR, V endl. dim.

Dann existiert $W \subset V$ mit $V = U \oplus W$ nicht eindeutig!

<u>Beweis</u>: $(u_1, \dots, u_r)$ Basis von U

$\xRightarrow{\text{Basis-Ergänzungssatz}}$ Ergänze zu $(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_l)$ Basis von V

$W := \langle w_1, \dots, w_l \rangle$

Aus 1.16 folgt $V = U \oplus W$

2. Lineare Abbildungen

Def.: Seien V, W zwei $\mathbb{R}$-VR.

Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt <u>linear</u> (<u>$\mathbb{R}$-linear</u> oder $\mathbb{R}$-VR-Homomorphismus)

wenn für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $f(u \underset{V}{+} v) = f(u) \underset{W}{+} f(v)$

b) $f(\lambda \underset{V}{\cdot} u) = \lambda \underset{W}{\cdot} f(u)$

„f verträgt sich mit den Operationen von V und W"

Beispiele

a) Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

$$\Phi_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \\ \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Es gilt: $A(x+y) = Ax + Ay$

$A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Ax$

$\Rightarrow \Phi_A$ linear

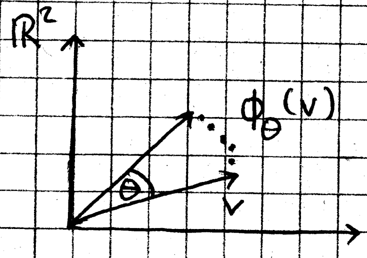
$e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{R}^m$ Einheitsvektoren

$$\begin{array}{c} 0 \ldots 0\,1\,0 \ldots 0 \\ \begin{pmatrix} & a_{1i} & \\ & & \\ & a_{ni} & \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{i-te Spalte} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Spalte} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \\ a_{ni} \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektor}$$

$$\boxed{\text{Spaltenvektoren von } A \text{ sind Bilder } \Phi_A(e_i) \text{ der Einheitsvektoren } e_i.}$$

b) Drehungen im $\mathbb{R}^2$ **Automorph.**

$0 \leq \Theta < 2\pi$ $\quad \phi_\Theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

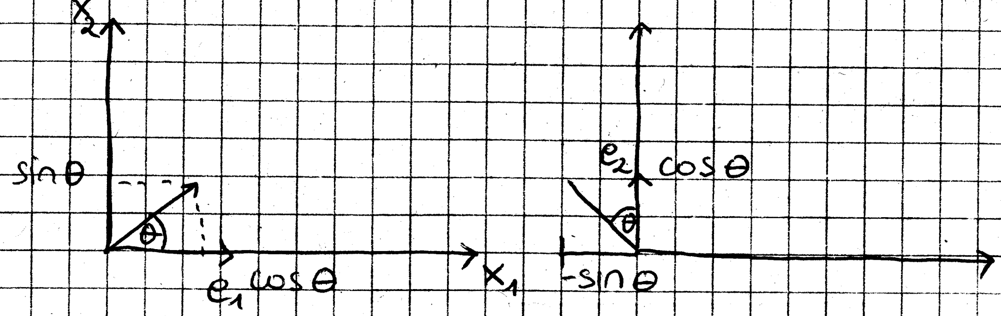


$v \longmapsto$ Drehung von V um Winkel Θ gegen Uhrzeigersinn

ϕ_Θ ist linear
a) Parallelogramm dreht sich mit
b) Strecken und Drehen vertauschen

ϕ_Θ als Matrix?

$$\phi_\Theta = \phi_A \text{ mit } A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$



c) $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft diff.bar $\}$

Endomorph. $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$f \longmapsto f'$ (Ableitung)

$(f+g)' = f' + g'$, $\quad (\lambda f)' = \lambda f'$ $\;\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \Rightarrow D$ linear

$I : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$f \longmapsto F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \int_0^x f(y)\,dy$

$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx \; \int g\,dx$

$\int \lambda f\,dx = \lambda \int f\,dx \quad \Rightarrow I$ linear

BRUNNEN

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Verknüpfung v. Abb.}}}{D \circ I} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Identitätsfkt } x \mapsto x}}{\mathrm{Id}_{C^\infty(\mathbb{R})}}$$

d) V beliebig, $F = (v_1, \dots, v_n)$ $v_i \in V$

$$\phi_F : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$\phi_F \text{ injektiv} \Leftrightarrow F \text{ linear unabhängig}$$

$$\phi_F \text{ surjektiv} \Leftrightarrow F \text{ Erzeugendensystem}$$

$$\underbrace{\phi_F \text{ bijektiv} \Leftrightarrow F \text{ Basis}}_{\text{Isomorph.}}$$

<u>Def.:</u> $f : V \to W$ lineare Abb.

f <u>Isomorphismus</u> $:\Leftrightarrow$ f bijektiv

f <u>Endomorphismus</u> $:\Leftrightarrow$ $V = W$

f <u>Automorphismus</u> $:\Leftrightarrow$ $V = W$ und f bijektiv

$V \cong W \Leftrightarrow V$ und W sind isomorph

$\Leftrightarrow \exists f : V \to W$ Isomorphismus.

Korollar 1.12 (Basisergänzungssatz)
Sei ~~V~~ V endlich-dim. Sei $F = (v_1, \ldots, v_r)$ eine lin. unabh. Familie. Dann existieren $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$, sodass

$(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V

Beweis: Wähle Basis $(w_1, \ldots, w_n)$

$\xrightarrow[\text{Umnummerieren}]{1.10} (v_1, \ldots, v_r, \underset{v_{r+1}}{\underset{\shortparallel}{w_{r+1}}}, \ldots, \underset{v_n}{\underset{\shortparallel}{w_n}})$ Basis

Satz 1.13 Sei V endlich-dim., sei $U \subset V$ UVR.
Dann ist U ebenfalls endlich-dimensional und $\dim(U) \leq \dim(V)$.
Falls $\dim(U) = \dim(V)$, folgt $U = V$

Beweis: ① U endlich dimensional
Annahme: U unendlich-dim. (nicht endlich erzeugt)

Dann existieren lin. unabh. Familie $F_n = (v_1, \ldots, v_n)$ der Länge n für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Starke IA: $F = (\underset{\neq 0}{v_1})$ für beliebiges $\underset{\neq 0}{v_1} \in V$

IS nach IV $\exists F_n = (v_1, \ldots, v_n)$ lin. unabh.
Da U nicht endlich erzeugt, gilt $\langle F_n \rangle \neq U$
Wähle $v_{n+1} \in U \setminus \langle F_n \rangle$
$\Rightarrow F_{n+1} = (v_1, v_{n+1})$ lin. unabh.

Für $n > \dim V$, erhalten $\lightning$ zu 1.10

② Sei $(w_1, \ldots, w_m)$ Basis von U.
$\Rightarrow (w_1, \ldots, w_m)$ lin. unabh. (in V) $\overset{1.10}{\Rightarrow} m \leq \dim(V)$

Problem: INPUT: $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

OUTPUT: Basis von $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$

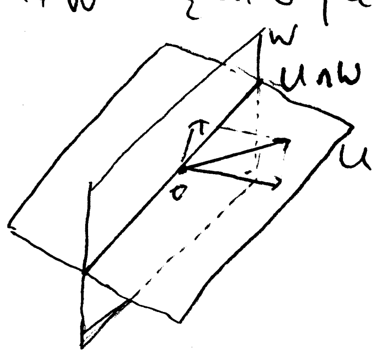
$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline \vdots \\ \hline v_n \end{pmatrix} = (v_{ij})$$

06.11.2015

$U, W \subset V$ UVR

$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ ist UVR $= \langle U \cup W \rangle$



Übungsaufgabe

$$\dim \overset{3}{(U+W)} = \dim \overset{2}{(U)} + \dim \overset{2}{(W)} - \dim (U \cap W)$$

Satz 1.15 (Dimensionsformel)

V $\mathbb{R}$-VR, $U, W \subset V$ endlich dim. UVR.

Dann gilt $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$

Beweis:

(1) Wähle $(v_1, \dots, v_k)$ Basis von $U \cap W$

$\Rightarrow \dim U \cap W = k$

$\Rightarrow (v_1, \dots, v_k)$ ist linear unabhängig in U, W und V

$\overset{1.12}{\Rightarrow}$ Ergänze zu

(2) $(v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r)$ Basis von U

(3) $(v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l)$ Basis von W

Behauptung $B = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_l)$ ist Basis von $U+W$

zz:

1. $\langle B \rangle = U + W$

2. B lin. unabh.

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum \mu_i u_i + \sum \gamma_i w_i$$

betrachte: $v := \underbrace{\sum \lambda_i v_i + \sum \mu_i u_i}_{\in U} = \underbrace{-\sum \gamma_i w_i}_{\in W} \in U \cap W$

ww.: $(v_1, \dots, v_k)$ bilden Basis für Schnitt

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \exists!$ Linkomb $v = \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_k' v_k$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \lambda_i' \overset{!}{=} \lambda_i$ und $\mu_i \overset{!}{=} 0$

für $1 \le i \le k$ für $k+1 \le i \le r$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \underset{\overset{=}{\lambda_i}}{\lambda_i'} = 0$ und $\gamma_i = 0$

$\dim U + W = r + l - k = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$

Satz 1.16. Sei $V = U + W$

Äquivalent sind

(i) $U \cap W = \{0\}$

(ii) Jedes $v \in V$ ist <u>eindeutig</u> darstellbar als $v = u + w$, $u \in U, w \in W$

(iii) $u \in U$, $w \in W$, $u \neq 0 \neq w$

$\Longrightarrow (u, w)$ lin. unabh.

(iv) Es gibt Basen B von U, B' von W

so dass (B, B') Basen von V

(v) $\dim V = \dim U + \dim W$

Beweis: Übung

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A \arrow[dr, Rightarrow] & \\ C \arrow[ur, Rightarrow] & & B \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd}[column sep=small] & A \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ C \arrow[ur, Leftrightarrow] \arrow[rr, Leftrightarrow] & & B \end{tikzcd}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) . $u + w = u' + w'$

$\underbrace{u - u' = w - w'}_{=0} \quad \in U \cap W$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) nicht-triviale ~~Darstellung~~ Darstellung der 0

$\Rightarrow$ 0 nicht eindeutig darstellbar

(iii) $\Rightarrow$ (i) $v \in U \cap W$, $v \neq 0$

$0 = v - v$

$\Rightarrow (\underset{\in U}{v}, \underset{\in W}{v})$ lin. abhängig

---

(i) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ v) Beweis von 1.15.

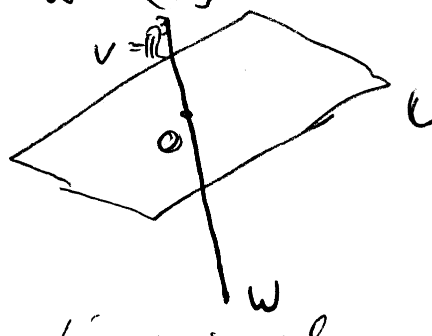
(v) $\Rightarrow$ (i) $\dim (U \cap W) = 0 \Rightarrow U \cap W = \{0\}$

Definition: V heißt <u>direkte Summe</u> von $U, W \subset V$,
falls gilt:

$V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$

Notation: $V = U \oplus W$

W <u>direkter Summand</u> von U



<u>Satz</u> 1.17

Sei $U \subset V$ UVR, V endlich dimensional.
Dann existiert $W \subset V$ mit $V = U \oplus W$.

Beweis: $(u_1, \ldots, u_r)$ Basis von U

<u>Basis</u>ergänzungssatz $(u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_l)$ Basis von V

$W := \langle w_1, \ldots, w_l \rangle$

Aus 1.16 folgt $V = U \oplus W$.

2. Lineare Abbildungen

Def.: Seien V, W zwei $\mathbb{R}$-VR

Eine Abb $f: V \to W$ heißt <u>linear</u> ($\mathbb{R}$-linear, oder $\mathbb{R}$-VR-Homomorphismus), wenn für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $f(u +_V v) = f(u) +_W f(v)$

b) $f(\lambda \cdot_V u) = \lambda \cdot_W f(u)$

„f verträgt sich mit den Operationen von V und W

<u>Beispiele</u>

a) Matrizen $A = (a_{ij}) \in Mat(n \times m, \mathbb{R})$

$$\Phi_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\underset{\text{Vektor}}{x} \longmapsto \underset{\text{Matrix}}{A} \cdot \underset{\text{Vektor}}{x}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Es gilt $A(x+y) = Ax + Ay$

$A(\lambda x) = \lambda A x$

$\Rightarrow \Phi_A$ linear

$e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{R}^m$ Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} & a_{1i} & \\ & \vdots & \\ & a_{ni} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Stelle} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ i-te Spalte

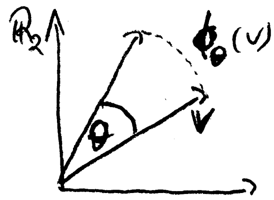
<u>Spaltenvektor</u>

$$\boxed{\text{Spaltenvektoren von } A \text{ sind Bilder } \Phi_A(e_i) \text{ der Einheitsvektoren } e_i}$$

b) Drehungen im $\mathbb{R}^2$

Winkel $0 \le \vartheta < 2\pi$

$$\Phi_\vartheta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$v \longmapsto \text{Drehung von } V \text{ um Winkel } \vartheta \text{ gegen Uhrzeigersinn}$$



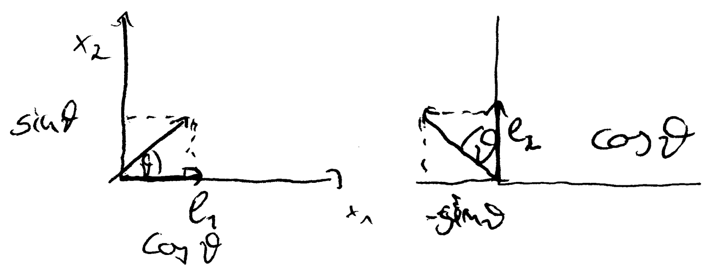
Φ_ϑ ist linear

a) Parallelogramm dreht sich mit

b) Strecken und Drehen vertauschen

Φ_ϑ als Matrix?

$$\Phi_\vartheta = \Phi_A \text{ mit } A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$



c) $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ bel. oft diffbar}\}$

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Endomorphismus $f \longmapsto f'$ ← Ableitung

$$(f+g)' = f' + g' \quad , \quad (\lambda f)' = \lambda f'$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ D ist linear

$$I : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^x f(y)\,dy$$

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$
$$\int \lambda f\,dx = \lambda \int f\,dx$$

verknüpfung

$\Longrightarrow$ I ist linear

$$D \circ I = \underbrace{\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}}_{\text{identitätsfunktion } x \mapsto x}$$

d) V bel. , $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ $v_i \in V$

$$\Phi_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^n \to V$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$\Phi_{\mathcal{F}}$ injektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ linear unabhängig

oder $\Phi_{\mathcal{F}}$ surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ Erzeugendensystem

oder $\underbrace{\Phi_{\mathcal{F}} \text{ bijektiv} \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ ist eine Basis}}_{\text{Isomorphismus}}$

Definition: $f: V \to W$ lineare Abb.

f heißt Isomorphismus $\Leftrightarrow$ f bijektiv

f Endomorphismus $:\Leftrightarrow$ $V = W$

f Automorphismus $\Longleftrightarrow$ $V = W$ und f bijektiv
(z.B. Drehungen)

$V \cong W$ $\Leftrightarrow$ V und W sind isomorph
$\Leftrightarrow$ $\exists\ f: V \to W$ Isomorphismus