10.11.15

$f: V \to W$ linear

1) $f(v+w) = f(v) + f(w)$

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

<u>Satz 2.1</u> $f: V \to W$ linear

a) $f(\underset{V}{0}) = \underset{W}{0}$

b) $U \subset V$ UVR $\Rightarrow f(U) \subset W$ UVR

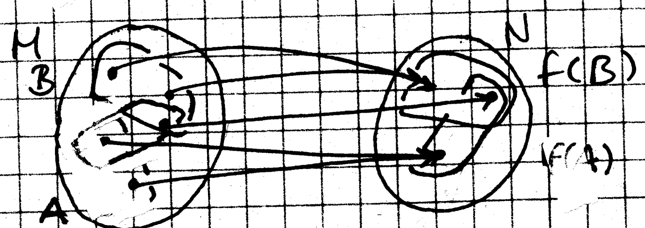
$Q \subset W$ UVR $\Rightarrow f^{-1}(Q) \subset V$ UVR

*

<u>Notation:</u> $f: M \to N$ Abbildung

$A \subset M$: $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ <u>Bild von A unter f</u>

$B \subset N$: $f^{-1}(B) := \{m \in M \mid f(m) \in B\}$ <u>Urbild</u>



<u>Außerdem:</u> f bijektiv $\Leftrightarrow \exists g: N \to M$ mit $g \circ f = id_M$
$f \circ g = id_N$

<u>Notation:</u> $g = f^{-1}$

$\underset{y \in N}{f^{-1}(y)} := \{m \in M \mid f(m) = y\}$ <u>Faser</u>

* c) f Isomorphismus $\Rightarrow f^{-1}$ linear

<u>Beweis:</u>

a) $f(\underset{V}{0}) = f(\underset{\mathbb{R}}{0} \cdot \underset{V}{0}) = \underset{\mathbb{R}}{0} \cdot f(\underset{V}{0}) = 0_W$

b) Übung

c) zu zeigen: f^{-1} linear $\quad v := f^{-1}(w) \quad v' := f^{-1}(w')$

Sei $w, w' \in W$

$f^{-1}(w+w')$

$f(v+v') = \overset{w}{\overset{\shortparallel}{f(v)}} + \overset{w'}{\overset{\shortparallel}{f(v')}} \quad | \, f^{-1}(\cdot)$

$v + v' = f^{-1}(w+w')$

$f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$

Philosophische Bemerkung:

$V \cong W$: V und W haben die gleiche VR-Theorie
($z.B.\ \dim(V) = \dim(W)$)

ABER: konkrete Identifikation von V und W hängen von der Wahl eines Isomorphismus $f: V \xrightarrow{\sim} W$ ab.

Korollar 2.2

Jeder endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-VR V ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim V$.

Genauer:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Basis } B \\ \text{von } V\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{matrix} f: \mathbb{R}^n \to V \\ \text{Isom.}\end{matrix}\right\}$$

$$B \longmapsto \left(\begin{matrix}\phi_B : \mathbb{R}^n \to V \\ (x_i) \mapsto \sum x_i v_i\end{matrix}\right)$$

$$(f(e_1), f(e_n)) \longleftarrow\!\!| \ f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$$

Bilder der Standardvektoren

"Basis wählen" $\hat{=}$ "Koordinaten wählen" $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V$

Def: $f: V \to W$ linear

Wir definieren Bild von f $\mathrm{Im}(f) := f(V) \subset W$

Kern von f $\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(0) \subset V$
$= \{v \in V \mid f(v) = 0\}$

Nach 2.1.c. sind beides UVR

Satz 2.3. $f: V \to W$ linear

Dann gilt:

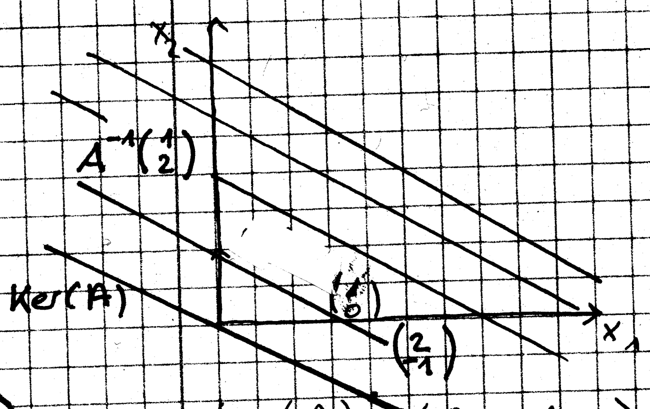
1) f surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = W$
2) f injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
3) $w \in W$

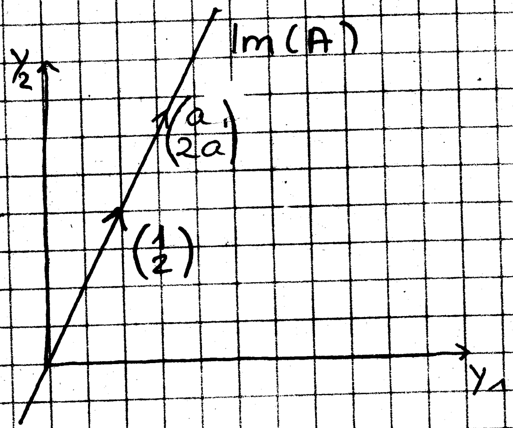
$f^{-1}(w) = \emptyset$ entweder / oder $f^{-1}(w) = v + \mathrm{Ker}(f)$ für geeignetes $v \in V$
$w \in \mathrm{Im}(f)$ $w \in \mathrm{Im}(f)$

$v + Ker(f) \hat{=}$ affiner Unterraum parallel zu $Ker(f)$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$

$$A = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto Ax$$





$$Im(A) = \langle Ae_1, Ae_2 \rangle$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 0 \\ \cancel{2x_1 + 4x_2 = 0} \end{matrix} \right\}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A^{-1}(w) \neq \emptyset \iff w \in Im(A)$$
$$A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 1 \\ \cancel{2x_1 + 4x_2 = 2} \end{matrix} \right\}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$a \in \mathbb{R}$ $$A^{-1}\left(\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathbb{R}^2 / Ker(f) = \{$ Geraden parallel zu $Ker(f) \}$

Aufgabe 4: $\mathbb{R}^2 / Ker(f)$ ist selbst $\mathbb{R}$-VR

$$Im(A) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 / Ker(f)$$
$$w \longmapsto A^{-1}(w) \quad \text{ist Isom.}$$

Sei U direkter Summand $Ker(f)$

Aufgabe 4 $\Rightarrow U \cong \mathbb{R}^2 / Ker(f) \cong Im(A)$

Beweis von 2.3.

1) klar nach Definition

2) und 3) folgen beide aus $f(v) = f(v') \Leftrightarrow f(v-v') = 0$

zu 2): f injektiv $\Leftrightarrow f(v) = f(v') \Rightarrow v = v' \Leftrightarrow f(v-v') = 0 \Rightarrow v - v' = 0$

$\Updownarrow$

$\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$

zu 3) $w \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists v \in V$ mit $f(v) = w$

$f^{-1}(w) = v + \operatorname{Ker}(f)$

"$\subseteq$" $v' \in f^{-1}(w)$

$\Rightarrow f(v') = w = f(v)$

$\Rightarrow f(\underbrace{v - v'}_{v''}) = 0$

$\Rightarrow v'' \in \operatorname{Ker}(f)$ und $v' = v - v''$

$\Rightarrow v' \in v + \operatorname{Ker}(f)$

"$\supseteq$" Sei $v'' \in \operatorname{Ker}(f)$

$f(v + v'') = f(v) + f(v'') = w + 0 = w$

$\Rightarrow v + v'' \in f^{-1}(w)$

d) V bel., $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ $v_i \in V$

$$\Phi_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^n \to V$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$\Phi_{\mathcal{F}}$ injektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ linear unabhängig

oder $\Phi_{\mathcal{F}}$ surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ Erzeugendensystem

oder $\Phi_{\mathcal{F}}$ bijektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist eine Basis

Isomorphismus

__Definition__: $f: V \to W$ lineare Abb.

f heißt __Isomorphismus__ $\Leftrightarrow$ f bijektiv

f Endomorphismus $\Longleftrightarrow$ $V = W$

f Automorphismus (z.B. Drehungen) $\Longleftrightarrow$ $V = W$ und f bijektiv

$V \cong W \Leftrightarrow$ V und W sind isomorph

$\Leftrightarrow$ $\exists$ $f: V \to W$ Isomorphismus

10.11.2015

$f: V \to W$ linear

1) $f(v+w) = f(v) + f(w)$

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Satz 2.1 $f: V \to W$ linear

a) $f(0) = 0$

b) $U \subset V$ UVR $\Rightarrow f(U) \subset W$ UVR

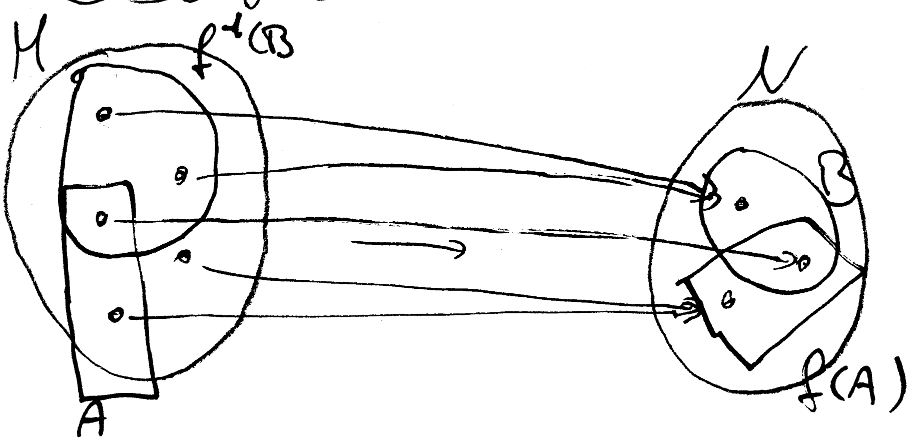
$Q \subset W$ UVR $\Rightarrow f^{-1}(Q) \subset V$ UVR

Notation: $f: M \to N$ Abbildung:

$A \subset M$ $\quad f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ Bild von A unter f

$B \subset N$ $\quad f^{-1}(B) := \{m \in M \mid f(m) \in B\}$ Urbild

$y \in N$ $\quad f^{-1}(y) := \{m \in M \mid f(m) = y\}$ Faser



Außerdem: f bijektiv $\Leftrightarrow \exists g: N \to M$

mit $g \circ f = id_M$

$f \circ g = id_N$

Notation: $g = f^{-1}$

c) f Isomorphismus $\Rightarrow f^{-1}$ linear

Beweis:

a) $f(\underset{V}{0}) = f(\underset{\mathbb{R}}{0} \cdot \underset{V}{0}) = \underset{\mathbb{R}}{0} \cdot f(\underset{V}{0}) = \underset{W}{0}$

b) Übung

c) z.z: f^{-1} linear

Sei $w, w' \in W$ $\quad f^{-1}(w+w')$

ww: unsere ursprüngliche Abb ist bijektiv

$\rightsquigarrow \quad v := f^{-1}(w)$

$\qquad v' := f^{-1}(w')$

$f^{-1}(w+w')$

$f(v+v') = f(v) + f(v') \qquad \| f^{-1}(\ldots)$

$v + v' = f^{-1}(w+w')$

$\overset{=}{} f^{-1}(w) + f^{-1}(w') \qquad \square$

Philosophische Bemerkung:

$V \cong W$: V und W haben die gleiche VR-Theorie

(z.B.: $\dim(V) = \dim(W)$)

Aber: konkrete Identifikation von V und W hängen von der Wahl eines Isomorphismus $f: V \xrightarrow{\sim} W$ ab

Korollar 2.2: Jeder endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-VR V ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim V$

Genauer: $\{\text{Basen von } V\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} f: \mathbb{R}^n \to V \\ \text{Isomorphismus} \end{matrix} \right\}$

$$B \longmapsto \left(\begin{matrix} \Phi_B: \mathbb{R}^n \to V \\ (x_i) \longmapsto \sum x_i v_i \end{matrix} \right.$$

$(f(e_1), \dots, f(e_n))$ $\longleftarrow\!\!\shortmid$ $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow V$

Bilder der Standard vektoren

„Basis wählen" $\hat{=}$ Koordinaten wählen

$f: \mathbb{R}$

Vortrag

Def: Ein VR V heißt unendlichdimensional, falls es eine linear unabhängige Menge $M \subset V$ gibt, welche unendlich viele Elemente hat.

unendliche Familie: $(v_i)_{i \in I} \in V^I$

$I \neq \emptyset$ unendlich

Lemma von Zorn:

Sei $(X, \leq)$ eine nichtleere geordnete Menge mit der Eigenschaft:

Jede vollständig geordnete Teilmenge y von X besitzt in X eine obere Schranke $(X, \leq)$.

Dann besitzt X maximale Element.

$1 \leq 800 \dots$

$B \subseteq V^{K-VR}$

$v = \sum \lambda_e \cdot b$ ~~...~~ $\lambda_e \in K$ fast alle 0

$U_1 \subseteq U_2 \dots$ $U_1 \subseteq U_2 \subseteq$ $B \subseteq V$

$\boxed{?}$

Def: $f: V \to W$ linear

Wir definieren

Bild von f $\quad Im(f) := f(V) \subset W$

Kern von f $\quad Ker(f) := f^{-1}(0) \subset V$

$\quad = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$

Nach 2.1.c sind beides UVR

Satz 2.3: $f: V \to W$ linear

Dann gilt:

1) f surjektiv $\Leftrightarrow Im(f) = W$

2) f injektiv $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$

3) $w \in W$.

entweder $f^{-1}(w) = \emptyset$ oder $f^{-1}(w) = \boxed{v + Ker(f)}$ ~~für ein~~ geeignetes $v \in V$

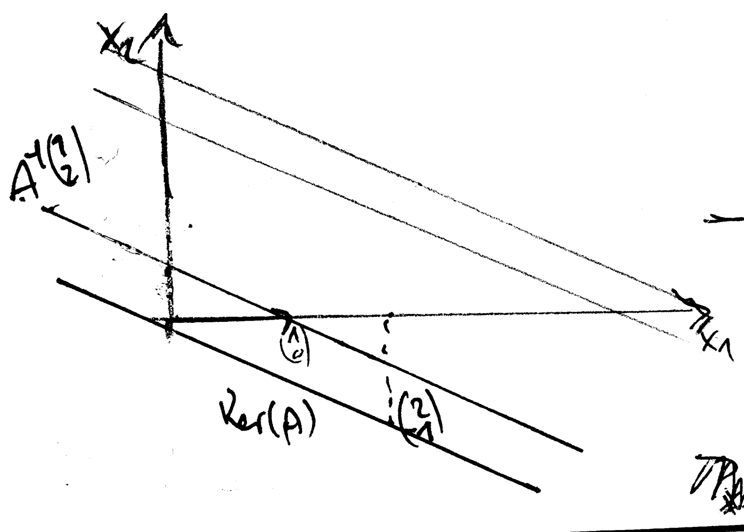
$w \notin Im(f)$ $\qquad\qquad w \in Im(f)$

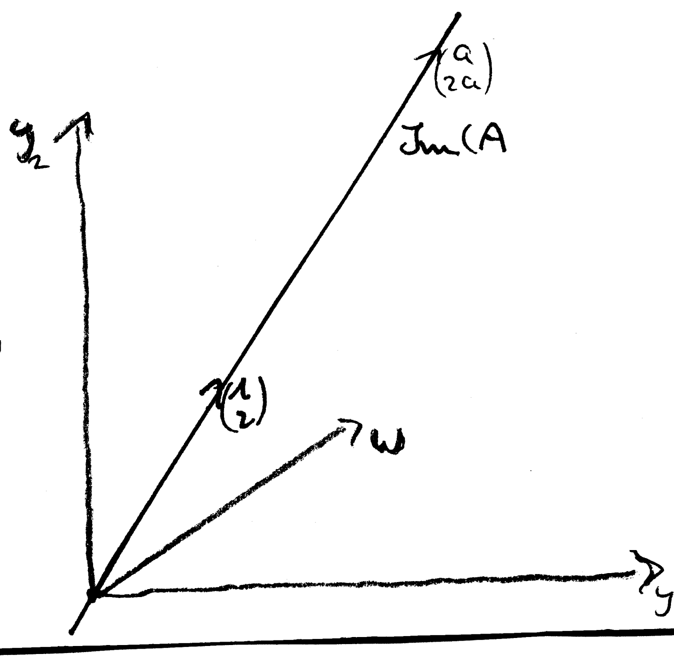
affiner Unterraum parallel zu $Ker(f)$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$x \mapsto Ax$





$\mathrm{Im}(A) = \langle Ae_1, Ae_2 \rangle$

$= \langle \binom{1}{2}, \binom{2}{4} \rangle = \langle \binom{1}{2} \rangle$

$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \binom{x_1}{x_2} \middle| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ \cancel{2x_1 + 4x_2 = 0} \end{array} \right\}$

$= \langle \binom{2}{-1} \rangle$

$A^{-1}(w)$

$A^{-1}(w) \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in \mathrm{Im}(A)$

$A^{-1}\left(\binom{1}{2}\right) = \left\{ \binom{x_1}{x_2} \middle| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 \\ \cancel{2x_1 + 4x_2 = 2} \end{array} \right\}$

$= \binom{1}{0} + \underbrace{\langle \binom{2}{-1} \rangle}_{\mathrm{Ker}(A)}$

$A^{-1}\left(\binom{a}{2a}\right) = \binom{a}{0} + \langle \binom{2}{-1} \rangle$

$a \in \mathbb{R}$

$= \left\{ \binom{a}{0} + \lambda \binom{2}{-1} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

---

zum Übungsblatt

$\mathbb{R}^2 / \mathrm{Ker}(f) = \{$ alle Geraden parallel zu $\mathrm{Ker}(f) \}$

<u>Aufgabe 4</u>: $\mathbb{R}^2 / \mathrm{Ker}(f)$ ist selbst $\mathbb{R}$-VR

$\mathrm{Im}(A) \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 / \mathrm{Ker}(f)$

$w \longmapsto A^{-1}(w)$

ist Isomorph.

Sei U direkter Summand $\mathrm{Ker}(f)$.

Aufgabe 4 $\Rightarrow U \cong \mathbb{R}^2 / \mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(A)$