13.11.15

$f: V \to W$ linear

$Im(f) = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w \} \subset W$

$Ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subset V$

Satz 2.4. V endlich dimensional

$\dim(V) = \dim(Im(f)) + \dim(Ker(f))$

folgt aus

Satz 2.5 Sei $(v_1, \dots, v_r)$ Basis von $Ker(f)$

Sei $(w_1, \dots, w_\ell)$ Basis von $Im(f)$

Wähle $(\underbrace{u_1, \dots, u_\ell}_{\in V})$ mit $f(u_i) = w_i$.

Dann ist $(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_\ell)$ Basis von V.

Beweis:

1. $\langle B \rangle = V$

Sei $v \in V$. $f(v) = \sum_i \lambda_i w_i \in Im(f)$

$v' := \sum_i \lambda_i u_i \rightsquigarrow f'(v') = \sum \lambda_i w_i = f(v)$

$f(v - v') = 0 \Rightarrow \underbrace{v - v'}_{= \sum \mu_i v_i} \in Ker(f)$

$\Rightarrow v = \sum \mu_i v_i + v' = \sum \mu_i v_i + \sum \lambda_i u_i \in \langle B \rangle$

2. B linear unabhängig

$0 = \sum \mu_i v_i + \sum \lambda_i v_i$

Wir wenden f an: $f(v_i) = 0$

$\to 0 = f'(0) = 0 + \sum \lambda_i w_i \underset{\text{lin. unab.}}{\overset{w_i}{\Longrightarrow}} \lambda_i = \dots = \lambda_\ell = 0$

$\Rightarrow 0 = \sum \mu_i v_i \underset{\text{lin. unab.}}{\overset{v_i}{\Longrightarrow}} \mu_i = \dots \mu_r = 0$

$\hookrightarrow$ B ist linear unabhängig

LGS lösen

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \iff \underset{(a_{ij})}{A}x = \underset{=(b_i)}{b}$$

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Ax$$

$\text{Lös}(A|b) = A^{-1}(b)$ Faser von b

$\text{Lös}(A|0) = \text{Ker}(A)$

$\text{Lös}(A|b) \neq \emptyset \iff b \in \text{Im}(A)$
$= SR(A)$

Definition: Rang von A

$\text{rang}(A) := \dim(SR(A))$

Korollar 2.6.

1) $\text{Lös}(A|b) = \emptyset$

entweder

oder $\text{Lös}(A|b) = x + \text{Lös}(A|0)$

2) $\dim \text{Lös}(A|0) = n - \text{rang}(A)$

$\Downarrow$ Gauß-Algorithmus

Erhalten $(\tilde{A}|\tilde{b})$ mit

1) $\text{Lös}(A|b) = \text{Lös}(\tilde{A}|\tilde{b})$

2) $\tilde{A}$ ist in ZSF

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = m\left\{\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} \overset{i_1}{1} & \overset{i_2}{} & & * & \overset{i_r}{} & \tilde{b}_1 \\ & 1 & & & & \vdots \\ & & 1 & 1 & & \\ 0 & & & & 1 & \tilde{b}_r \\ & & & & & \tilde{b}_{r+1} \\ & & & & & \tilde{b}_m \end{array}\right)}_{n}\right.,\quad \left.\right\} r = \text{Anzahl der Stufen}$$

$i_1 \ldots i_r \in \{1, \ldots, n\}$ Stufenindizes

Satz 2.7.

1) $\text{Lös}(A|b) \neq \emptyset \iff \tilde{b}_{r+1} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$

2) $\text{rang}(A) = r$,

   $\dim \text{Lös}(A|0) = n-r$

3) Seien $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ die Stufenindizes von $\tilde{A}$.

   Wir betrachten die Projektion $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r}$

$$(x_i) \mapsto (x_1, \hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \hat{x}_{i_r}, \ldots x_n)$$

„alle Variablen x_{i_j} fallen weg"

Dann gilt $\pi|_{\text{Lös}(A|b)}: \text{Lös}(A|b) \to \mathbb{R}^{n-r}$ ist bijektiv

insbesondere ist $\pi|_{\text{Lös}(A|0)}$ ein Isomorphismus

Notation

$f: M \to N$ Abbildung

$A \subset M$

$$f|_A : A \to N$$
$$x \mapsto f(x)$$

$$\begin{array}{cccc} i_1=1 & x_2 & i_2=3 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = -2$

$x_2 \in \mathbb{R}$

$x_1 = -1 - 3(-2) - 2x_2$

$= -2x_2 + 5$

$$\begin{array}{ccc} \text{Lös}(A|b) = & \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2+5 \\ x_2 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \; x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ \downarrow \pi & \downarrow \\ \mathbb{R} & x_2 \end{array}$$

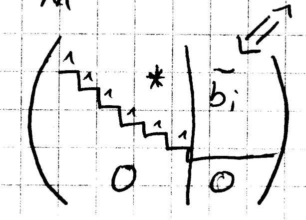
Beweis: 1) klar

2) Blatt 4, Nr. 1, 2.6. 2)

3) Übung

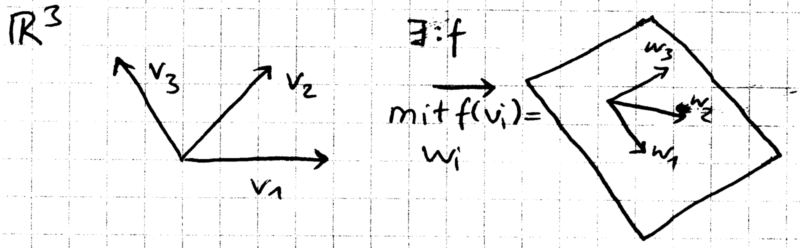
Spezialfall:

$Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$ und $n = r$



Basis von $Im(A)$ berechnen: Blatt 4, Nr. 1
" $Ker(A)$ " Blatt 5

Lineare Abbildungen bauen



Satz 2.8. V, W $\mathbb{R}$-VR

$v_1, \dots, v_n \in V$ Basis

$w_1, \dots, w_1 \in W$ beliebig

Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i \; \forall i$.

Außerdem: 1) $Im(f) = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$

2) f injektiv $\Leftrightarrow w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig.

Beweis: Sei $v \in V$ beliebig, $v = \Sigma = \lambda_i v_i$

Wir definieren $f(v) := \Sigma \lambda_i w_i \quad (*)$

Falls f' linear mit $f'(v_i) = w_i$

$\Rightarrow f'(v) = f(\Sigma \lambda_i v_i) = \Sigma \lambda_i f'(v_i) = f(v)$

$\Rightarrow f = f' \Rightarrow f$ eindeutig

noch zu zeigen: f linear

$$f(\underset{\Sigma \lambda_i v_i}{\underset{\shortparallel}{v}} + \underset{\Sigma \lambda_i' v_i}{\underset{\shortparallel}{v'}}) = f(\Sigma(\lambda_i + \lambda_i')v_i) = \sum_i (\lambda_i + \lambda_i')w_i =$$

$\sum_i \lambda_i w_i + \sum \lambda_i' w_i = f(v) + f(v')$

$f(\lambda v) =$ analog

1) klar

2) "$\Rightarrow$" f ist injektiv

Sei $0 = \sum \lambda_i w_i = f(\sum_i \lambda_i v_i)$

$\overset{f \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} \sum \lambda_i v_i = 0$

$\underset{\text{unabh.}}{\overset{v_i \text{ lin.}}{\Longrightarrow}} \lambda_i = 0 \ \forall i$

"$\Leftarrow$" analog

Vgl. 2.2. $\left\{ \begin{matrix} \text{Basis} \\ \text{von } V \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{Isomorph.} \\ \mathbb{R}^n \to V \end{matrix} \right\}$

Korollar 2.9 Jedes $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, lässt sich durch genau ein $A \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$ beschreiben. Also
$\exists! A$ mit $f(x) = Ax \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Beweis:

$$A := \left(f(e_1) \middle| \ldots \middle| f(e_n) \right)$$

Dann gilt $Ae_i = f(e_i)$

$\overset{2.8}{\Longrightarrow} Ax = f(x) \ \forall x$

$Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear} \}$

$Hom(V, W) = \{ f: V \to W \text{ linear} \}$

ist $\mathbb{R}$-VR mit

Vektoraddition $f + g$ definiert durch $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$

Skalarmultiplikation λf definiert durch $(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$

(Axiome nachrechnen!)

$\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ ist $\mathbb{R}$-VR durch

$$\underset{(a_{ij})}{\overset{\shortparallel}{A}} + \underset{(b_{ij})}{\overset{\shortparallel}{B}} = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\underset{\mathbb{R} \ni}{\lambda} \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$$

$$\dim(\mathrm{Mat}(m \times n)\mathbb{R}) = m \cdot n$$

$$\cong \mathbb{R}^{n \cdot m}$$

Korollar 2.9 (neu) Die lineare Abbildung

$$M: \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$

$$f \longmapsto M(f) = \big(f(e_1) | \dots | f(e_n) \big)$$

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \longleftarrow A$$

$$x \mapsto Ax$$

ist ein Isomorphismus

13.11.2015

$f: V \to W$ linear

$\operatorname{img}(f) = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w \} \subset W$

$\ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subset V$

Satz 2.4 V endlich dim. $f: V \to W$ linear.
$\dim(V) = \dim(\operatorname{img}(f)) + \dim(\ker(f))$.

folgt aus

~~Satz~~

Satz 2.5 Sei $(v_1, \dots, v_r)$ Basis von $\ker(f)$
" $(w_1, \dots, w_l)$ " " $\operatorname{img}(f)$.

Wähle $(u_1, \dots, u_l) \in V$ mit $f(u_i) = w_i$

Dann ist $B = (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_l)$ Basis von V

Beweis:

1. $\langle B \rangle = V$ (zeigen, dass diese Familie B ganz V erzeugt)

Sei $v \in V$. $f(v) \in \operatorname{img}(f)$
$= \sum_i \lambda_i w_i$

$v' := \sum_i \lambda_i u_i \rightsquigarrow f(v') = \sum \lambda_i w_i = f(v)$

$f(v - v') = 0 \Rightarrow \underbrace{v - v'}_{= \sum \mu_i v_i} \in \ker(f)$

$\Longrightarrow v = \sum \mu_i v_i + v' = \sum \mu_i v_i + \sum \lambda_i u_i \in \langle B \rangle$

2. B lin unabh.

$0 = \sum \mu_i v_i + \sum \lambda_i u_i$

wenden f an: $f(v_i) = 0$

$\Rightarrow 0 = f(0) = 0 + \sum \lambda_i w_i \xrightarrow[\text{lin. unabh.}]{w_i} \lambda_1 = \dots = \lambda_e = 0$

$\Rightarrow 0 = \sum \mu_i v_i \xrightarrow[\text{lin. unabh.}]{v_i} \mu_1 = \dots = \mu_r = 0$

$\Rightarrow$ B linear unabh.

Lineare Gleichungssysteme lösen

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \iff \underset{(a_{ij})}{\underset{\|}{A}}x = \underset{(b_i)}{\underset{\|}{b}}$$

$$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Ax$$

$\text{Lös}(A|b) = A^{-1}(b)$ Faser von b

$\text{Lös}(A|0) = \ker(A)$

$\text{Lös}(A|b) \neq \emptyset \iff b \in \text{img}(A)$
$= SR(A)$
Spaltenraum von A

Korollar 2.6

1) $\text{Lös}(A|b) = \emptyset$

entweder
oder

$\text{Lös}(A|b) = x + \text{Lös}(A|0)$

2) $\dim \text{Lös}(A|0) = n - \text{rang}(A)$

$\Downarrow$ Gauß-Algorithmus

Erhalten $(\tilde{A}|\tilde{b})$ mit

1) $\text{Lös}(A|b) = \text{Lös}(\tilde{A}|\tilde{b})$
2) $\tilde{A}$ ist in ZSF (Zeilen-Stufen-Form)

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = m\left\{\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} i_1 & \cdots & i_2 & i_3 & \cdots & i_r \\ 1 & & & & * & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & & 1 & \end{matrix}}^{} & \begin{matrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{matrix} \end{array}\right)\right. \quad \Big\} \; r = \text{Anzahl der Spalten}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n}$$

$i_1, \dots i_r$ sind die Stufenindizes $\in \{1, \dots, n\}$

Satz 2.4

1) $\text{Lös}(A|b) \neq \emptyset \iff \tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$
2) $\operatorname{rang}(A) = r$, $\dim \text{Lös}(A|0) = n - r$
3) Seien $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ die Stufenindizes von $\tilde{A}$.
   Wir betrachten die Projektion $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r}$
   $$(x_i) \mapsto (x_1 \dots \widehat{x_{i_1}} \dots \widehat{x_{i_2}} \dots x_{i_r} \dots x_n)$$
   „alle Variablen x_{i_j} fallen weg"

   Dann gilt: $\pi|_{\text{Lös}(A|b)} : \text{Lös}(A|b) \to \mathbb{R}^{n-r}$ ist bijektiv

   Insbesondere ist $\pi|_{\text{Lös}(A|0)}$ ein Isomorphismus

Notation:
$f: M \to N$ Abb.
$A \subset M$
$f|_A : A \to N$
$x \mapsto f(x)$

Beweis

1) klar

2) Blatt 4/1 + Korollar 2.6.2)

3) Übung

Spezialfall:

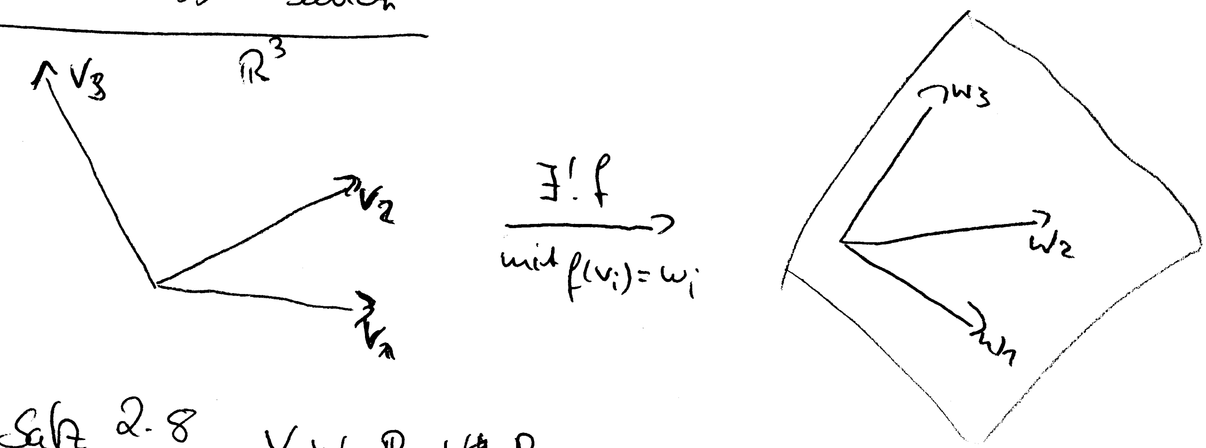
$Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\Longleftrightarrow$ $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_n = 0$ und $n = r$

Basis von $\mathrm{img}(A)$ berechnen: Blatt 4/1

" " $\ker(A)$ " : Blatt 5

Das ist Alles!

lineare Abb bauen



Satz 2.8 V, W $\mathbb{R}$-VR.

$v_1, \dots, v_n \in V$ Basis

$w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig.

Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i \ \forall i$

Außerdem

1) $\mathrm{Img}(f) = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$

2) f injektiv $\Leftrightarrow$ $w_1, \dots, w_n$ lin. unabh.

Beweis: Sei $v \in V$ beliebig, $v = \sum \lambda_i v_i$

Wir definieren $f(v) := \sum \lambda_i w_i$ $(*)$

Falls f' linear mit $f'(v_i) = w_i$

$\Rightarrow f'(v) = f'(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i f'(v_i) = f(v)$

$\Rightarrow f = f' \Rightarrow f$ eindeutig

noch zu zeigen: f linear

- $f(\underset{\sum \lambda_i v_i}{\underset{\shortparallel}{v}} + \underset{\sum \lambda_i' v_i}{\underset{\shortparallel}{v'}}) = f(\sum (\lambda_i + \lambda_i') v_i) = \sum_i (\lambda_i + \lambda_i') w_i$

$= \sum_i \lambda_i w_i + \sum \lambda_i' w_i = f(v) + f(v')$

- $f(\lambda v) = \cancel{\dots} \dots$ analog

1) klar

2) „$\Rightarrow$" f injektiv

Sei $0 = \sum \lambda_i w_i = f(\sum_i \lambda_i v_i)$

$\xRightarrow{f \text{ inj.}} \sum \lambda_i v_i = 0$

$\xRightarrow[\text{unabh.}]{v_i \text{ lin.}} \lambda_i = 0 \ \forall i$

„$\Leftarrow$" analog

vgl. 2.2 $\left\{ \begin{matrix} \text{Basis} \\ \text{von } V \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{Isomor.} \\ \mathbb{R}^n \to V \end{matrix} \right\}$

~~Ko~~ Korollar 2.9

Jedes $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear lässt sich durch genau ein $A \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$ beschreiben.

also $\exists!\ A$ mit $f(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Beweis $A := \begin{pmatrix} f(e_1) \Big| & \dots & \Big| f(e_n) \end{pmatrix}$

Dann gilt $Ae_i = f(e_i)$

$\xRightarrow{2.8} Ax = f(x) \quad \forall x.$

$Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear} \}$

$Hom(V, W) = \{ f: V \to W \text{ linear} \}$

ist $\mathbb{R}$-VR mit

Vektoraddition $f+g$ definiert durch $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$

Skalarmultiplikation $\lambda \cdot f$ definiert durch $(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$

(Axiome nachrechnen!)

$Mat(m \times n, \mathbb{R})$ ist $\mathbb{R}$-VR

durch $\underset{(a_{ij})}{A} + \underset{(b_{ij})}{B} = (a_{ij} + b_{ij})$

$\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} \cdot A = (\lambda a_{ij})$

$\dim(Mat(m \times n), \mathbb{R}) = m \cdot n$

Korollar 2.9 (neu): Die lineare Abbildung

$M: Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow Mat(m \times n, \mathbb{R})$

$f \longmapsto M(f) = \left(f(e_1) \Big| \dots \Big| f(e_n) \right)$

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \longleftarrow\!\!\!\shortmid \; A$$
$$x \mapsto Ax$$

ist ein Isomorfismus